МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1977

УДК 539.3:534.1

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПОЛОГИХ СТРОГО ВЫПУКЛЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

В. И. БАБЕНКО

(Харьков)

Исследование потери устойчивости оболочек в работе [1] было сведено к решению вариационной задачи для функционала, определенного на разрывных бесконечно малых изгибаниях срединной поверхности оболочки. Анализ этой задачи проведен в [2], где получено условие устойчивости безмоментного равновесного состояния непологих строго выпуклых изотропных оболочек. Это же условие было получено в [3] непосредственно из общего вариационного принципа теории оболочек. Для изучения потери устойчивости строго выпуклых пологих и сферических непологих оболочек в [3–6] был применен асимптотический метод [7]. В частности, было показано, что асимптотические представления для деформации оболочек можно строить так, чтобы их головная часть описывала деформацию в том же приближении, что и геометрический метод [1].

Здесь, исходя из уравнений теории оболочек Кирхгофа – Лява [8], асимптотическими методами [7, 9] изучается потеря устойчивости безмоментного равновесного состояния непологих несимметричных (строго выпуклых) достаточно тонких анизотропных оболочек и их поведение в начальной послекритической стадии.

Строятся асимптотические представления для деформаций. Получен критерий устойчивости оболочек, т. е. обобщен результат работы [2]. Рассмотрено влияние закрепления оболочки вдоль края на ее устойчивость.

1. Постановка задачи. Запишем систему уравнений нелинейной теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа — Лява, в следующей безразмерной форме [8]:

$$(n^{\alpha\beta}-\varepsilon^4 a_*{}^{\alpha\mu}b_{\mu\nu}{}^*m^{\nu\beta})_{,\beta^*}-\varepsilon^4 a_*{}^{\alpha\mu}b_{\mu\nu}{}^*m^{\nu\beta}_{,\beta^*}+\varepsilon\left(P-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\sqrt{\frac{a}{a_*}}a_*{}^{\alpha\mu}r_\mu{}^*=0$$

$$\varepsilon^4 m^{\alpha\beta}_{,(\alpha\beta)^*}+b_{\alpha\beta}{}^*(n^{\alpha\beta}-\varepsilon^4 a_*{}^{\beta\mu}b_{\mu\nu}{}^*m^{\alpha\nu})+\varepsilon\left(P-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\sqrt{\frac{a}{a_*}}n_*=0 \qquad (1.1)$$

$$n^{\alpha\beta}=K^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu},\quad m^{\alpha\beta}=D^{\alpha\beta\mu\nu}\varkappa_{\mu\nu} \qquad (1.2)$$

$$\begin{gathered}\varepsilon_{\alpha\beta}=(a_{\alpha\beta}{}^*-a_{\alpha\beta})/2\varepsilon=e_{\alpha\beta}+{}^1/_2\varepsilon(\omega_\alpha\omega_\beta+u_{\nu\alpha}u_{\cdot\beta}{}^\nu)\\ \varkappa_{\alpha\beta}=(b_{\alpha\beta}-b_{\alpha\beta}{}^*)/\varepsilon=-\{E_3(\omega_{\alpha,\beta}+b_\beta{}^\nu u_{\nu\alpha})+\\ +b_{\alpha\beta}(E_3-1)/\varepsilon+\varepsilon E^\nu(u_{\nu\alpha,\beta}-\omega_\alpha b_{\nu\beta})\}\end{gathered} \qquad (1.3)$$

$$\begin{gathered}[u]=[u_{,1}]=[m^{11}]=[m^{\alpha1}_{,\alpha^*}+\partial m^{12}/\partial x^2]=\\ =[n^{\alpha1}+\varepsilon^4 a_*{}^{\alpha\mu}(-2m^{\nu1}b_{\mu\nu}{}^*+m^{11}b_{1\mu}{}^*)]=0\end{gathered} \qquad (1.4)$$

$$\begin{gathered}E_\nu=\sqrt{a/a_*}\{-\omega_\nu(1+\varepsilon u_{\cdot\mu}{}^\mu)+\varepsilon\omega_\alpha u_{\cdot\nu}{}^\alpha\}\\ E_3=\sqrt{a/a_*}\{1+\varepsilon u_{\cdot\mu}{}^\mu+{}^1/_2\varepsilon^2(u_{\cdot\alpha}{}^\alpha u_{\cdot\beta}{}^\beta-u_{\cdot\nu}{}^\mu u_{\cdot\mu}{}^\nu)\}\end{gathered} \qquad (1.5)$$

$$\begin{gathered}e_{\alpha\beta}={}^1/_2(u_{\alpha\beta}+u_{\beta\alpha}),\quad u_{\alpha\beta}=u_{\alpha,\beta}-wb_{\alpha\beta},\quad \omega_\alpha=w_{,\alpha}+u^\nu b_{\nu\alpha},\quad u_\alpha=ur_\alpha,\quad w=un\\ r_\alpha\equiv r_{,\alpha},\quad n_*=\varepsilon E^\alpha r_\alpha+E_3 n,\quad r_\alpha{}^*=(a_{\alpha\nu}+\varepsilon u_{\nu\alpha})r^\nu+\varepsilon\omega_\alpha n\end{gathered} \qquad (1.6)$$

Здесь (1.1) – полевые уравнения; (1.2) – соотношения упругости; $\varepsilon e_{\alpha\beta}$, $\varepsilon\varkappa_{\alpha\beta}$ – тензоры деформации и изменения кривизны; (1.4) – условия сшивки решений вдоль линии γ их гладкого сопряжения; характерный размер оболочки (например ее минимальный главный радиус кривизны) принят равным единице; $eK^{\alpha\beta\mu\nu}$, $\varepsilon^4 eD^{\alpha\beta\mu\nu}$ – тензоры упругих постоянных; e – характерная (размерная) упругая постоянная; ε – малый параметр относительной тонкостенности оболочки; предполагается, что при $\varepsilon\to 0$ отличные от нуля физические компоненты тензоров $K^{\alpha\beta\mu\nu}$ и $D^{\alpha\beta\mu\nu}$ являются величинами порядка единицы (в изотропном случае полагаем $\varepsilon=12^{-1/4}\delta^{1/2}$, $e=E\delta$, где δ – толщина оболочки, E – модуль Юнга); $e\varepsilon n^{\alpha\beta}$ и $e\varepsilon^5 m^{\alpha\beta}$ – симметричные тензоры усилий и моментов; $e\varepsilon^2 P$ – вектор плотности внешней поверхностной нагрузки; $t(m\delta/e\varepsilon)^{1/2}$ – время, m – плотность материала; εu – вектор смещений точек срединной поверхности F недеформированной оболочки; $r(x^\alpha)$ – радиус-вектор точек поверхности F, являющийся вектор-функцией пары гауссовых поверхностных координат x^α; $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ – коэффициенты I и II квадратичных форм поверхности F; $a=|a_{\alpha\beta}|$; n – нормаль к F.

Ниже всюду: греческие индексы пробегают значения 1, 2; принято правило суммирования по повторяющимся индексам; величины, описывающие срединную поверхность F_* деформированной оболочки, в отличие от соответствующих величин, описывающих F, обозначены звездочкой; поднятие и опускание индексов тензоров производится с помощью фундаментального тензора $a_{\alpha\beta}$ (единственное исключение составляют контравариантные компоненты $a_*^{\alpha\beta}$ фундаментального тензора поверхности F_*); индексы без звездочки после запятой означают ковариантное дифференцирование в метрике $a_{\alpha\beta}$, а со звездочкой в – $a_{\alpha\beta}{}^*$; если компоненты тензоров обозначены цифровыми индексами, то это значит, что они вычислены в локальной полугеодезической системе координат (x^1, x^2), введенной на F на базе линии γ (или ∂F – края F); при этом за координаты x^1, x^2 приняты длины дуг соответственно линий $\gamma(\partial F)$ и геодезических, ортогональных $\gamma(\partial F)$ (линия $x^1=0$ совмещена с $\gamma(\partial F)$, а область $x^1>0$ прилегает к $\gamma(\partial F)$ со стороны ее выпуклости на F); $[f]\equiv f(x^1+0)-f(x^1-0)$ – изменение $f(x^\alpha)$ при переходе через линию сшивки решения γ.

Рассматриваются согласованные с вариационным принципом комбинации следующих способов закрепления оболочек вдоль края:

$$u_1=0,\quad u_2=0,\quad w=0,\quad \omega_1=0 \tag{1.7}$$

$$(n^{\alpha 1}-2\varepsilon^4 m^{\nu 1} b_{\nu\mu}{}^* a_*^{\mu\alpha})(\delta_\alpha{}^\beta+\varepsilon u_{\cdot\alpha}{}^\beta)+$$
$$+\varepsilon^5\left(m^{\alpha 1}_{,\alpha^*}+\frac{\partial m^{12}}{\partial x^2}\right)E^\beta=0,\qquad w=0,\qquad m^{11}=0 \tag{1.8}$$

Условия (1.7) соответствуют жесткому закреплению края; а (1.8) – шарнирному опиранию края, свободного от нормальных и касательных усилий.

Пусть при $t<0$ оболочка находится в безмоментном равновесном состоянии T (докритическом). При $t=0$ оболочке сообщаются малые возмущения, в результате чего смещения точек поверхности F и их скорости получают малые приращения (δu, $\delta u^\cdot$), и оболочка может потерять устойчивость. Описывая ее деформацию (послекритическую) при $t>0$, начальные условия примем в виде

$$u|_{t=+0}=u|_{t=-0}+\delta u,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=+0}=\delta u^\cdot \tag{1.9}$$

Начальные возмущения δu и $\delta u^\cdot$, вызывающие потерю устойчивости оболочки с описанными ниже начальными послекритическими деформациями, не могут быть совершенно произвольными. Произвол в их задании должен совпадать с произволом, который допускают построенные ниже асимптотические представления.

Следуя [1], предположим, что геометрия и упругие свойства рассматриваемых оболочек, их нагружение и закрепление вдоль края таковы, что общий характер их деформации как в докритической, так и в послекритической стадиях сводится в основном к следующему. Почти всюду напряжения, возникающие в оболочках, близки к безмоментным, а деформация оболочек близка к их бесконечно малым геометрическим изгибаниям с разрывами непрерывности вдоль линий (γ), которые соответствуют границам вмятин, появляющихся на поверхности оболочки при ее выпучивании. Эта картина нарушается лишь в малой окрестности линий γ и края оболочки ∂F, где имеет место краевой эффект.

2. Построение асимптотических представлений. Асимптотические представления для смещений, определяемых системой (1.1)—(1.9), будем искать в виде рядов [7] ($t\neq 0$):

$$u^\alpha \sim \overset{\alpha}{u}_{(N)} \equiv \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \overset{\alpha}{u}_{(\mathrm{I}k)} + S(x^\beta) \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^k \overset{\alpha}{u}_{(\mathrm{II}k)}$$

$$w \sim w_{(N)} \equiv \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k w_{(\mathrm{I}k)} + S(x^\beta) \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^k w_{(\mathrm{II}k)} \tag{2.1}$$

Здесь $S(x^\beta)$ — сглаживающая функция [7], равная единице в ε-окрестности линий γ, ∂F и исчезающая при удалении от γ, ∂F на расстояния порядка единицы. Предполагаем, что линии γ — гладкие.

Уравнения для определения функций $\overset{\alpha}{u}_{(\mathrm{I}k)}$, $w_{(\mathrm{I}k)}$ получим при помощи I итерационного процесса [7]. Подставим ряды (2.1) при $S(x^\beta)\equiv 0$ в уравнения (1.1)—(1.4), (1.6) и приравняем в них коэффициенты при одинаковых степенях ε

$$\overset{\alpha\beta}{n}_{(\mathrm{I}0),\beta}=0, \qquad b_{\mu\nu}\overset{\mu\nu}{n}_{(\mathrm{I}0)}=0, \qquad \overset{\alpha\beta}{\varepsilon}_{(\mathrm{I}0)}=\overset{\alpha\beta}{e}_{(\mathrm{I}0)} \tag{2.2}$$

$$\overset{\alpha\beta}{n}_{(\mathrm{I}k),\beta}+\left(P_{(\mathrm{I}(k-1))}-\frac{\partial^2 u_{(\mathrm{I}(k-1))}}{\partial t^2}\right)r^\alpha=\overset{\alpha}{N}_{(\mathrm{I}k)}$$

$$b_{\alpha\beta}\overset{\alpha\beta}{n}_{(\mathrm{I}k)}+\left(P_{(\mathrm{I}(k-1))}-\frac{\partial^2 u_{(\mathrm{I}(k-1))}}{\partial t^2}\right)n=N_{(\mathrm{I}k)} \tag{2.3}$$

$$\overset{\alpha\beta}{\varepsilon}_{(\mathrm{I}k)}=\overset{\alpha\beta}{e}_{(\mathrm{I}k)}+\overset{\alpha\beta}{N}_{(\mathrm{I}k)} \qquad (1\leqslant k\leqslant N) \tag{2.4}$$

где через $f_{(\mathrm{I}i)}$ обозначен i-й коэффициент разложения функции смещений $f(\overset{\alpha}{u}_{(N)}, w_{(N)})$ в ряд по степеням ε при $S(x^\beta)\equiv 0$; $\overset{\alpha\beta}{n}_{(\mathrm{I}i)}$ и $\overset{\alpha\beta}{e}_{(\mathrm{I}i)}$, $\overset{\alpha}{\omega}_{(\mathrm{I}i)}$, $\overset{\alpha\beta}{u}_{(\mathrm{I}i)}$ выражаются соответственно через $\overset{\alpha\beta}{\varepsilon}_{(\mathrm{I}i)}$ и $\overset{\alpha}{u}_{(\mathrm{I}i)}$, $w_{(\mathrm{I}i)}$ по формулам (1.2) и (1.6); в $\overset{\alpha}{N}_{(\mathrm{I}k)}$, $N_{(\mathrm{I}k)}$ и $\overset{\alpha\beta}{N}_{(\mathrm{I}k)}$ включены члены, не содержащие соответственно $\overset{\alpha\beta}{n}_{(\mathrm{I}s)}$, $u_{(\mathrm{I}(s-1))}$ и $u_{(\mathrm{I}s)}$ $(s\geqslant k)$; $\overset{\alpha}{N}_{(\mathrm{I}1)}=N_{(\mathrm{I}1)}\equiv 0$.

Решение головной системы (2.2), описывающее деформацию оболочки в основном приближении, ищем среди бесконечно малых изгибаний формы F. Искомые бесконечно малые изгибания могут иметь разрывы непрерывности вдоль линий γ, что соответствует потере устойчивости оболочки с образованием вмятин вдали от края [1]. Так как $\overset{\alpha\beta}{n}_{(\mathrm{I}_0)}\equiv 0$, то в основном приближении напряженное состояние описывается условиями $\overset{\alpha\beta}{n}_{(\mathrm{I}_1)}$.

Уравнения для погранслойных функций $\overset{\alpha}{u}_{(\mathrm{II}k)}, w_{(\mathrm{II}k)}$, определяемых в ε-окрестности линий разрывов γ и края ∂F, получим при помощи II итерационного процесса. Полагая $S(x^\beta)\equiv 1$, подставим ряды (2.1) в уравнения (1.1)—(1.3), (1.5), (1.6) и преобразуем последние с учетом уравнений (2.2)—(2.4). Рассматривая преобразованные таким образом уравнения в ε-окрестности линий γ и ∂F, отнесенной к полугеодезической системе координат x^1, x^2, разложим все функции, входящие в эти уравнения (кроме погранслойных), в ряды Тейлора по x^1 при $x^1=0$ и положим $x^1=\varepsilon s$. Приравнивая, наконец, в рассматриваемых уравнениях коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим искомую систему уравнений II итерационного процесса. Выпишем уравнения, определяющие функции $\overset{\alpha}{u}_{(\mathrm{II}0)}$, $w_{(\mathrm{II}0)}$.

Обозначим через $f_{(\mathrm{II}k)}$ коэффициенты разложения в ряд по степеням ε разности

$$f(\overset{\alpha}{u}_{(N)}, w_{(N)})-\varepsilon^k f_{(\mathrm{I}k)} \tag{2.5}$$

составленной при $S(x^\beta)\equiv 1$ для величин f, определяемых смещениями u.

Из уравнений (1.2), (1.3), (1.5), (1.6), (2.1) находим, что разложения в ряд по степеням ε разности (2.5), составленной для $m^{\alpha\beta}$ и $\varkappa^{11}$, начинаются со слагаемых порядка ε^{-2}; для $n^{\alpha\beta}$, ε_{11}, ε_{12}, $\varkappa_{12}$, $\varkappa_{22}$ — со слагаемых порядка ε^{-1}; для ε_{22} — порядка ε^0.

Из (1.2) следует, что $\overset{\alpha\beta}{n}_{(\mathrm{II}k)}$ и $\overset{\alpha\beta}{m}_{(\mathrm{II}i)}$ выражаются соответственно через $\overset{\alpha\beta}{\varepsilon}_{(\mathrm{II}k)}$ и $\overset{\alpha\beta}{\varkappa}_{(\mathrm{II}i)}$ по формулам, совпадающим с (1.2). Из уравнений II итерационного процесса далее последовательно находим

$$\overset{\alpha\beta}{n}_{(\mathrm{II}(-1))}=\overset{12}{\varepsilon}_{(\mathrm{II}(-1))}=0, \qquad \overset{2}{u}_{(\mathrm{II}0)}\equiv 0 \tag{2.6}$$

$$\overset{11}{\varepsilon}_{(\mathrm{II}(-1))}=0, \qquad \overset{11}{n}_{(\mathrm{II}0)}=\overset{12}{n}_{(\mathrm{II}0)}=0 \tag{2.7}$$

Первое уравнение в (2.7) удовлетворяем тождественно, вводя вспомогательный угол $\varphi_*(s)$ по формулам

$$\partial w_{(\mathrm{II}0)}/\partial s=-\sin(\varphi_*-\varphi), \qquad \partial \overset{1}{u}_{(\mathrm{II}0)}/\partial s=\cos(\varphi_*-\varphi)-1 \tag{2.8}$$

Тогда будем иметь

$$\overset{11}{\varkappa}_{(\mathrm{II}(-2))}=\frac{\partial\varphi_*}{\partial s}, \qquad \overset{22}{\varkappa}_{(\mathrm{II}(-1))}=\frac{(\sin\varphi-\sin\varphi_*)}{\rho}, \qquad \frac{\partial\overset{22}{\varepsilon}_{(\mathrm{II}0)}}{\partial s}=\frac{(\cos\varphi_*-\cos\varphi)}{\rho} \tag{2.9}$$

Здесь φ — угол между бинормалью к $\gamma(\partial F)$ и нормалью к F, ρ — радиус кривизны $\gamma(\partial F)$.

Уравнения, получаемые из (1.1) (при рассмотрении коэффициентов при ε^0), удовлетворяются тождественно при введении функции напряжений ψ по формулам

$$\overset{22}{n}_{(\mathrm{II}0)}=\rho\frac{\partial\psi}{\partial s}, \qquad \overset{12}{n}_{(\mathrm{II}1)}=-\frac{\partial(\rho\psi)}{\partial x^2} \tag{2.10}$$

В результате получим

$$\overset{11}{n}_{(\mathrm{II}1)}=-\overset{11}{\varkappa}_{(\mathrm{II}(-2))}\overset{11}{m}_{(\mathrm{II}(-2))}-\overset{11}{n}_{(\mathrm{I}1)}(1-\cos(\varphi_*-\varphi))+\psi\cos\varphi_*$$

$$\overset{2}{u}_{(\mathrm{II}1)}=\int_s^\infty\Bigg[K_{1222}^{(-1)}\big|_{s=0}2\frac{\partial(-\rho\psi)}{\partial x^2}-\Bigg(\frac{\partial u_{(\mathrm{II}0)}}{\partial x^2}-2\frac{\cos\varphi}{\rho}\overset{1}{u}_{(\mathrm{II}0)}-2b_{12}\big|_{s=0}w_{(\mathrm{II}0)}+$$

$$+(u_{(\mathrm{I}0)}\big|_{s=0}+u_{(\mathrm{II}0)})\cos(\varphi_*-\varphi)-(\omega_2^{(\mathrm{I}0)}\big|_{s=0}+\omega_2^{(\mathrm{II}0)})\sin(\varphi_*-\varphi)\Bigg)\Bigg]ds \tag{2.11}$$

где $K_{\alpha\beta\mu\nu}^{(-1)}$ — тензор, определяющий $\varepsilon_{\alpha\beta}$ через $n^{\mu\nu}$ $(\varepsilon_{\alpha\beta}=K_{\alpha\beta\mu\nu}^{(-1)}n^{\mu\nu})$.

Для определения введенных выше вспомогательных функций $\varphi_*(s)$ и $\psi(s)$ имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\sigma^2}+\Phi=\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\beta}\left(\varphi_*-\varphi+\frac{\cos\varphi_*-\cos\varphi}{\sin\varphi}\right) \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\sigma^2}-\Psi+2(1-2\beta^2)\Phi=\Psi\frac{\sin\varphi_*-\sin\varphi}{\sin\varphi}-$$

$$-2(1-2\beta^2)\frac{\sin(\varphi_*-\varphi)-(\varphi_*-\varphi)}{\beta/\operatorname{ctg}\varphi},\qquad \Phi=\Psi=0 \text{ при } s=\pm\infty$$

$$\Psi=\left(\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\beta}\sqrt{\frac{\rho^2K_{2222}^{(-1)}}{D^{1111}}}\right)\Bigg|_{s=0}\psi,\qquad \Phi=\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\beta}(\varphi_*-\varphi)$$

$$\sigma=\left(\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2D^{1111}K_{2222}^{(-1)}}\right)^{1/4}\Bigg|_{s=0}s,\qquad \beta^2=\frac{1}{4}\left[2-\frac{\overset{11}{n}_{(I1)}}{b_{22}}\left(\frac{K_{2222}^{(-1)}}{D^{1111}}\right)^{1/2}\right]\Bigg|_{s=0} \tag{2.13}$$

Аналогичные уравнения будут для определения погранслойных функций $w_{(IIk)}$, $\overset{\alpha}{u}_{(IIk)}$ $(1\leqslant k\leqslant N-1)$:

$$\frac{\partial\overset{1}{u}_{(IIk)}}{\partial s}=\varphi_k\sin(\varphi_*-\varphi)+(*),\qquad \frac{\partial w_{(IIk)}}{\partial s}=\varphi_k\cos(\varphi_*-\varphi)+(*)$$

$$\overset{11}{\varkappa}_{(II(k-2))}=-\frac{\partial}{\partial s}\varphi_k+(*),\qquad \overset{22}{\varkappa}_{(II(k-1))}=-\frac{\varphi_k\cos\varphi_*}{\rho}+(*)$$

$$\frac{\partial\overset{22}{\varepsilon}_{(IIk)}}{\partial s}=\frac{\varphi_k\sin\varphi_*}{\rho}+(*),\qquad \overset{22}{n}_{(IIk)}=\rho\frac{\partial\psi_k}{\partial s}+(*),\qquad \overset{12}{n}_{(II(k+1))}=-\frac{\partial(\rho\psi_k)}{\partial x^2}+(*)$$

$$\overset{11}{n}_{(II(k+1))}=-2\frac{\partial\varphi_*}{\partial s}\overset{11}{m}_{(II(k-2))}+\varphi_k\frac{\partial\overset{11}{m}_{(II(-2))}}{\partial s}+ \tag{2.14}$$

$$+\psi_k\cos\varphi_*+\overset{11}{n}_{(I(k+1))}[\cos(\varphi_*-\varphi)-1]+(*)$$

Вспомогательные функции φ_k и ψ_k удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial s^2}D^{1111}|_{s=0}=$$

$$=[\overset{11}{n}_{(I1)}\cos(\varphi_*-\varphi)+\psi\cos\varphi_*]\varphi_k-\psi_k\sin\varphi_*-\overset{11}{n}_{(I(k+1))}\sin(\varphi_*-\varphi)+(*)$$

$$\frac{\partial^2\psi_k}{\partial s^2}K_{2222}^{(-1)}|_{s=0}=\frac{\sin\varphi_*}{\rho^2}\varphi_k+(*),\qquad \varphi_k=\psi_k=0 \text{ при } s=\pm\infty \tag{2.15}$$

Здесь звездочкой обозначены слагаемые, не содержащие φ_k, ψ_k. Они определяются через $\overset{1}{u}_{IIi}$, $w_{(IIi)}$, $u_{(I(i))}$, $\overset{\alpha\beta}{n}_{(I(i+1))}$, где $i\leqslant k-1$. Функции $\overset{2}{u}_{(II(k+1))}$ определяются через φ_k, ψ_k в квадратурах.

Условия сшивки при $s=0$ (вдоль γ) для коэффициентов рядов (2.1) получим из (1.4), подставляя в них ряды (2.1). Используя уравнения I и II итерационных процессов, эти условия можно упростить и представить в следующем виде:

$$[\overset{12}{n}_{(\mathrm{I}1)}]=[\overset{11}{n}_{(\mathrm{I}1)}]=0 \tag{2.16}$$

$$[\psi]=[\partial\psi/\partial s]=[\varphi_*]=[\partial\varphi_*/\partial s] \tag{2.17}$$

$$[\overset{2}{u}_{(\mathrm{I}0)}]=0, \qquad [v_{(\mathrm{I}0)}]+[v_{(\mathrm{II}0)}]=0 \tag{2.18}$$

$$[\overset{12}{n}_{(\mathrm{I}(k+1))}]+(*)=[\overset{11}{n}_{(\mathrm{I}(k+1))}]+(*)=0 \tag{2.19}$$

$$[\overset{2}{u}_{(\mathrm{I}k)}]+(*)=[v_{(\mathrm{I}k)}]+[v_{(\mathrm{II}k)}]=0$$

$$[\psi_k]+(*)=[\partial\psi_k\,/\,\partial s]+(*)=[\varphi_k]+(*)=[\partial\varphi_k\,/\,\partial s]+(*)=0 \qquad (1\leqslant k\leqslant N-1)$$

где v — проекция вектора смещений u на бинормаль к γ. Краевые условия на ∂F получим из условий закрепления края.

3. Решение головной системы II итерационного процесса вдоль линий γ. Если потеря устойчивости оболочки сопровождается выпучиванием ее части вдали от края, то должны существовать нетривиальные решения головной системы (2.2) I итерационного процесса, являющиеся разрывными бесконечно малыми изгибаниями исходной формы оболочки с разрывами вдоль линии γ (п. 1). Величина этих разрывов мала в начальной послекритической стадии, когда внешняя нагрузка близка к критической, а вклад инерционных членов невелик. Соответственно малыми будут и нетривиальные решения головной системы II итерационного процесса (2.12), (2.17). Последние можно построить только тогда, когда β^2 мало; это следует из анализа линеаризованной системы (2.12), (2.17). Наличие малого параметра β позволяет так же, как и в случае пологих оболочек [6], асимптотическим методом построить асимптотическое представление для решений системы (2.12), (2.17).

Рассмотрим случай, когда линии γ не близки одна к другой и к ∂F. Тогда можно считать, что $\Phi(\sigma)$ и $\Psi(\sigma)$ — четные функции. Поступая так же, как и в [6] (при φ, не близком к $\pi/2$, $\varepsilon\ll\beta\ll1$), построим в третьем приближении асимптотическое представление для Φ и Ψ:

$$\eta={}^1/_2(\Phi+\Psi)=R\cos\vartheta+{}^1/_8\beta R^2(-5-\cos2\vartheta)+$$
$$+\beta^2\{{}^1/_{256}R^3(1+{}^1/_3\,\mathrm{tg}^2\,\varphi)+{}^7/_{12}RR_1\sin2\vartheta\}+O(\beta^3)$$

$$\xi={}^1/_2(\Phi-\Psi)=\beta\{R_1\sin\vartheta+{}^1/_8R^2(3-\cos2\vartheta)\}+$$
$$+\beta^2\{{}^1/_{64}R^3(1+{}^1/_3\,\mathrm{tg}^2\,\varphi)+{}^1/_4RR_1\sin2\vartheta-{}^1/_{64}R^3(11+\mathrm{tg}^2\,\varphi)\cos\vartheta\}+O(\beta^3)$$

$$R_1=-R\sqrt{1-\frac{7+\mathrm{tg}^2\,\varphi}{32}R^2},\qquad R(\sigma)=\frac{\sqrt{32/(7+\mathrm{tg}^2\,\varphi)}}{\mathrm{ch}\,\beta(\sigma+\sigma_0)}+\beta^2Q(\sigma)+O(\beta^4)$$

$$\vartheta(\sigma)=\left(1-\frac{\beta^2}{2}\right)\sigma-\beta\frac{9(1+{}^1/_3\,\mathrm{tg}^2\,\varphi)\,\mathrm{th}[\beta(\sigma+\sigma_0)]}{2(7+\mathrm{tg}^2\,\varphi)}+O(\beta^3),\qquad \sigma_0=O(\beta)$$

$$[v_{(\mathrm{II}0)}]=-\beta\frac{16\,\mathrm{tg}^2\,\varphi}{(7+\mathrm{tg}^2\,\varphi)\cos\varphi}\left(\frac{\rho^2D^{1111}K_{2222}^{(-1)}}{\sin^2\varphi}\right)^{1/4}\Bigg|_{s=0}+O(\beta^3) \tag{3.1}$$

Выражение для $Q(\sigma)$ не выписано ввиду его громоздкости.

4. Критерий устойчивости оболочек. Так как потеря устойчивости оболочки, сопровождаемая выпучиванием ее части вдали от края, возможна лишь в окрестности тех точек оболочки, где правая часть соотношения (2.13) положительна и достаточно мала, то безмоментное равновесное состояние T данной оболочки будет устойчиво, если

$$\min_{(F,\gamma)} \beta_T > 0 \qquad (\beta_T \equiv \beta^2|_{t<0}) \tag{4.1}$$

где минимум берется по внутренним точкам поверхности F и по возможным направлениям линий разрывов γ в этих точках. Оболочка может потерять устойчивость с выпучиванием ее части вдали от края, если

$$\min_{(F,\gamma)} \beta_T = 0 \tag{4.2}$$

В случае изотропных оболочек условия (4.1), (4.2) упрощаются и переходят в условия, полученные в [2, 3]. Условие (4.2), вообще говоря, не является достаточным.

5. Влияние закрепления оболочки вдоль края на ее устойчивость. В дальнейшем для определенности будем считать, что оболочка односвязная. Пусть край жестко заделан. Подставляя (2.1) в (1.7), получим краевые условия на ∂F для $u_{(\mathrm{I}0)}$, $u_{(\mathrm{II}0)}$:

$$\overset{2}{u}_{(\mathrm{I}0)} = 0, \quad v_{(\mathrm{I}0)} + v_{(\mathrm{II}0)} = 0, \quad \partial\Psi/\partial\sigma = 0, \quad \Phi = 0 \tag{5.1}$$

Решая систему (2.12) с третьим и четвертым условием (5.1) на полуоси $\sigma \geqslant 0$ методом п. 3, находим, что $\Phi \equiv \Psi \equiv 0$, т. е. $u_{(\mathrm{II}0)} \equiv 0$. Это, по-видимому, означает, что при жесткой заделке исключена потеря устойчивости с образованием вмятин у края ∂F (соприкасание линий γ и ∂F исключено).

Из первого и второго условия (5.1) следует, что поле смещений $u_{(\mathrm{I}0)}$ на ∂F равно нулю; тогда оно будет равно нулю всюду в прилегающей к ∂F области F' на F, где $u_{(\mathrm{I}0)}$ непрерывно [10]. При докритических деформациях ($t<0$) $u_{(\mathrm{I}0)}$ непрерывно, поэтому $u_{(\mathrm{I}0)}|_{t<0} \equiv 0$ на F.

Чтобы построить нетривиальные решения $u_{(\mathrm{I}0)}$ при послекритических деформациях ($t>0$), необходимо потребовать, чтобы линии γ были замкнутыми. Из (2.18) для поля $u_{(\mathrm{I}0)}|_{t>0}$, отличного от нуля в области F'' на F, ограниченной линией γ, находим краевое условие на γ

$$u_{(\mathrm{I}0)} = 0, \qquad v_{(\mathrm{I}0)} = [v_{(\mathrm{II}0)}] \tag{5.2}$$

Отметим, что при заданной форме γ и условии (5.2.1) F'' допускает три линейно-независимых изгибающих поля [10]. В данном случае форма линии γ — искомая.

Далее из (1.7) с учетом того, что $u_{(\mathrm{I}0)} = u_{(\mathrm{II}0)}|_{\partial F} = 0$ для $k \geqslant 1$, находим

$$\overset{2}{u}_{(\mathrm{I}k)} = (*), \quad \overset{1}{u}_{(\mathrm{I}k)} = (*), \quad w_{(\mathrm{II}k)} = -w_{(\mathrm{I}k)}, \quad \varphi_k = (*) \tag{5.3}$$

При $k=1$ $(*)\equiv 0$. Процесс построения искомых функций при $t<0$ сводится к последовательному, начиная с $k=1$, определению $u_{(\mathrm{I}k)}$ и $u_{(\mathrm{II}k)}$ соответственно из системы (1.2), (2.3), (2.4), первое, второе условие (5.3) и (2.14), (2.15) (вдоль ∂F), третье, четвертое условие (5.3).

При $t>0$ система уравнений I и II (в ε-окрестностях γ и ∂F) итерационных процессов будет, вообще говоря, нерасцепляющейся. Она расцепляется для осесимметричных задач [6]. В общем случае для ее решения можно воспользоваться малостью параметра β, при этом в первом приближении получим $u_{(\mathrm{I}1)}|_{t>0} = u_{(\mathrm{I}1)}|_{t<0}$ (см. п. 3, 4).

Осесимметричная задача о выпучивании оболочек вращения согласно (3.1) сводится к изучению такого же уравнения движения для $[u_{(\mathrm{I}0)}]$, как и в [6]. Из него, в частности, получаем, что сферическая оболочка, меньшая полусферы при внешнем давлении, близком к критическому, теряет устойчивость под действием минимально возможного начального импульса выпучиванием достаточно малой области.

Ослабим закрепление края (1.7), заменив четвертое условие на соответствующее условие в (1.8). Тогда на ∂F вместо четвертого условия в (5.1) и (5.3) будем иметь: $\partial\Phi/\partial\sigma=0$, $\partial\varphi_k/\partial\sigma=(*)$. Это повлечет за собой единственное изменение в предыдущих рассуждениях — могут появиться вмятины у края, так как система (2.12), третье условие (5.1) $\partial\Phi/\partial\sigma|_{\partial F}=0$ имеет нетривиальное решение для $\sigma\geqslant0$ (п. 3). Это произойдет, если

$$\min_{(\partial F)} \beta_T|_{\gamma\equiv\partial F}=0$$

6. Шарнирное опирание. Подставляя (2.1) в (1.8), получим краевые условия на ∂F

$$\psi=-\overset{11}{n}_{(\mathrm{I}1)}/\cos\varphi,\quad \overset{12}{n}_{(\mathrm{I}1)}=-\partial(\rho\psi)/\partial x^2,\quad w_{(\mathrm{I}0)}=-w_{(\mathrm{II}0)},\quad \partial\varphi_*/\partial s=0 \qquad (6.1)$$

$$\psi_k=-\overset{11}{n}_{(\mathrm{I}(k+1))}/\cos\varphi+(*),\quad \overset{12}{n}_{(\mathrm{I}(k+1))}=-\partial(\rho\psi_k)/\partial x^2+(*)$$
$$w_{(\mathrm{I}k)}+w_{(\mathrm{II}k)}=0,\quad \partial\varphi_k/\partial s=(*)\quad {\scriptstyle(k=1,2,3\ldots)} \qquad (6.2)$$

При $t<0$ из (2.3), (2.10)—(2.12) (в окрестности ∂F), первого, второго и четвертого условий (6.1) находим $n^{\alpha\beta}_{(\mathrm{I}1)}, u_{(\mathrm{II}0)}$. Изгибающее поле строим при третьем условии (6.1).

Дальнейший процесс построения искомых функций сводится к последовательному, начиная с $k=1$, определению $n^{\alpha\beta}_{(\mathrm{I}(k+1))}$, $u_{(\mathrm{II}k)}$, $u_{(\mathrm{I}k)}$ из систем (1.2) (первое соотношение), (2.3), (2.4), (2.14), (2.15) (вдоль ∂F) (6.2).

В данном случае возможна потеря устойчивости с образованием вмятин у края, что связано с существованием критического значения $\beta_*(\varphi)$ параметра $\beta_T|_{\gamma\equiv\partial F}$, в окрестности которого система (2.12), первое и третье условие (6.1) имеет два близких решения (для пологих оболочек $\beta_*(\varphi)\approx{}^2/_5$) [3, 4].

Как и прежде, при достижении равенства (4.2) оболочка может потерять устойчивость с образованием вмятины вдали от края (при $\beta_T|_{\partial F}\leqslant$ $\leqslant\beta_*(\varphi)$). В этом случае добавятся новые искомые функции $u_{(\mathrm{II}k)}|_\gamma$ и форма линии γ, и к рассмотренным выше системам ($t>0$) на k-й итерации следует добавить систему (2.10)—(2.19).

Усилим закрепление края (1.8) в направлении края ∂F, заменив (1.8.2) на (1.7.2), а (6.1.2), (6.2.2) на (5.1.1), (5.3.1). Эта задача подобна предыдущей, а при наличии осевой симметрии совпадает с ней. Изгибающее поле $u_{(\mathrm{I}0)}$ построим при условии (5.1.1); $n^{\alpha\beta}_{(\mathrm{I}1}$ $u_{(\mathrm{II}0)}$ найдем из (2.3), (2.8)—(2.12), (6.1.1), (6.1.3), (6.1.4) и т. д.

При $\beta_T|_{\gamma\equiv\partial F}=\beta_*'(\varphi)$, как и ранее, оболочка теряет устойчивость с выпучиванием у края, а при достижении (4.2) — вдали от края.

Усилим далее закрепление края (1.8) в направлении ν, касательном к F и нормальном к ∂F, заменив (1.8.1) на (1.7.1) и (6.1.1), (6.1.3), (6.2.1), (6.2.3) на (5.1.2) и следующие условия:

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}=\frac{\nu u_{(\mathrm{I}0)}}{\rho^2K^{(-1)}_{2222}},\qquad \frac{\partial\psi_k}{\partial s}=\frac{\nu u_{(\mathrm{I}k)}}{\rho^2K^{(-1)}_{2222}}+(*),\qquad V_{(\ k)}=-V_{(\mathrm{II}k)} \qquad (6.3)$$

При наличии осевой симметрии эта задача совпадает с (1.7.1)—(1.7.3), (1.8.4). Если $t<0$, то $u_{(\mathrm{II}0)}=u_{(\mathrm{I}0)}\equiv0$; $n^{\alpha\beta}_{(\mathrm{I}1)}$ определяется из (2.3), (6.1.2).

Далее, начиная с $k=1$, последовательно находим $u_{(\mathrm{I}k)}$ из (1.2) (первое соотношение), (2.3), (5.3.2); $u_{(\mathrm{II}k)}$ из (2.14), (2.15), (6.2.4), (6.3.3) $n^{\alpha\beta}_{(\mathrm{I}(k+1))}$ из (2.3), (6.2.2).

Если достигается (4.2), то при $t>0$ возможно выпучивание вдали от края, при этом по-прежнему $u_{(\mathrm{I}0)}=u_{(\mathrm{II}0)}\equiv0$ на F'; изгибающее поле $u_{(\mathrm{I}0)}$ на F'', $u_{(\mathrm{II}0)}$ вдоль

γ, $n^{\alpha\beta}_{(\mathrm{I}1)}$ определяем из системы (2.2), (2.3), (2.8)—(2.12), (2.16), (2.17), (5.2), (6.1.2). При построении последующих итераций ($k\geqslant 1$) в отличие от случая $t<0$ соответствующие системы приходится рассматривать одновременно на каждом шаге; к тому же добавляется искомая вектор-функция $u_{(\mathrm{II}k)}|_\gamma$ и система (2.14), (2.15), (2.19).

Если на ∂F достигается $\min\limits_{(\partial F)} \beta_T|_{\gamma=\partial F}=0$, то возможно выпучивание у края. Изгибающее поле $u_{(\mathrm{I}0)}$, $u_{(\mathrm{II}0)}$, $n^{\alpha\beta}_{(\mathrm{I}1)}$ определяется из системы (2.3), (2.8)—(2.12), (5.1.2), (6.1.2), (6.1.4), (6.3.1). Далее, начиная с $k=1$, последовательно находим $u_{(\mathrm{I}k)}$, $u_{(\mathrm{II}k)}$, $n^{\alpha\beta}_{(\mathrm{I}(k+1))}$ из системы (1.2) (первое соотношение), (2.3), (2.4), (2.8)—(2.12), (6.2.2), (6.2.4), (6.3.2), (6.3.3).

К системам уравнений (п. 5, 6), определяющим функции I итерационного процесса при $t>0$, следует присоединить также начальные условия, которые следуют из (1.9), (2.1) ($k\geqslant 0$):

$$u_{(\mathrm{I}k)}|_{t=+0}=u_{(\mathrm{I}k)}|_{t=-0}+\delta u_{(\mathrm{I}k)}, \qquad \partial u_{(\mathrm{I}k)}/\partial t|_{t=+0}=\delta \dot{u}_{(\mathrm{I}k)}$$

При этом произвол в задании начальных возмущений δu и $\delta \dot{u}$, вызывающих выпучивание оболочки в описанной выше форме, должен быть согласован с произволом, который имеют асимптотики $\overset{\alpha}{u}_{(N)}$, $w_{(N)}$, описывающие послекритические деформации оболочки.

Поступила 21 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Погорелов А. В.* Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. М., «Наука», 1969.
2. *Бабенко В. И.* Геометрическое исследование неустойчивости безмоментных оболочек. Укр. геометр. сб., вып. 12. Изд-во Харьковск. ун-та, 1972.
3. *Бабенко В. И.* Неустойчивость безмоментных консервативных оболочек. (Математическая физика и функциональный анализ, вып. 3.) Харьков, 1972.
4. *Срубщик Л. С.* Асимптотический метод определения критических нагрузок потери устойчивости пологих строго выпуклых оболочек вращения. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
5. *Срубщик Л. С.* О потере устойчивости несимметричных строго выпуклых тонких пологих оболочек. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
6. *Бабенко В. И.* Асимптотический анализ послекритического поведения пологих строго выпуклых оболочек вращения. (Математическая физика и функциональный анализ, вып. 4.) Харьков, 1973.
7. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук, 1960, т. 15, вып. 3.
8. *Koiter W. T.* On the non-linear theory of thin elastic shells. Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet., Amsterdam, 1966, Ser. B, vol. 69, No. 1, p. 1–54.
9. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.
10. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959.