МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1977

УДК 539.3

КОНТАКТ АНИЗОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ С ЖЕСТКИМИ ЛИНЕЙНЫМИ ШТАМПАМИ

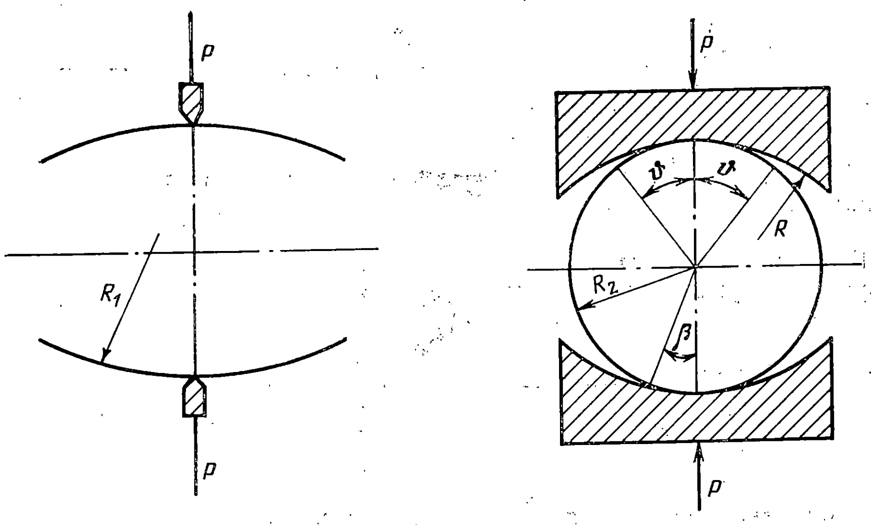
В. Н. МАКСИМЕНКО, Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

(Сумы)

Исследуется специальный класс контактных задач о взаимодействии жестких штампов с упругими анизотропными оболочками вращения. Для изотропных оболочек подобные задачи изучались в [1–3].

1. Рассмотрим пологую анизотропную оболочку вращения, сжимаемую ω одинаковыми штампами с абсолютно жесткой кромкой постоянного радиуса R (фиг. 1, $\omega=2$).

Задача состоит в определении реакции со стороны штампа на оболочку и величины зоны контакта 2ϑ. Реакцию q, действующую со стороны штампа на оболочку, считаем нормальной к поверхности оболочки (поло-



Фиг. 1

жительное направление к оси оболочки), трение в зоне контакта не учитываем. Считаем, что каждый штамп сжимается силой P.

Задача решается в линейной постановке. Как указано в [1], это оправдано, если либо мал угол контакта, либо радиус кромки штампа мало отличается от радиуса поверхности оболочки.

Поставленная задача является идеализированной моделью ряда задач, представляющих практический интерес.

Исходное уравнение, как и в [1], получим из условия плотного прилегания штампа к оболочке в зоне контакта

$$\varkappa_2=R^{-1}-R_2^{-1} \tag{1.1}$$

где $\varkappa_2$, R_2 — изгибная деформация и радиус срединной поверхности оболочки в окружном направлении, R — радиус кромки штампа.

Изгибная деформация $\varkappa_2$ срединной поверхности оболочки от нагрузки q, приложенной на отрезках $\alpha=0$, $|\beta-sT|<\vartheta$ ($T=2\pi/\omega$; $s=0, 1, \ldots, \omega-1$), при действии периодической системы ω штампов будет [4]:

$$\varkappa_2(0, \beta)=R_2\int_{-\vartheta}^{\vartheta} \varkappa(\beta-\beta_1)q(\beta_1)\,d\beta_1 \tag{1.2}$$

$$\varkappa(\beta)=\frac{1}{R_2^2}\frac{\partial^2 B_{33}}{\partial\beta^2}G(0,\beta)=\sum_{j=0}^{4} b_j\frac{\partial^6 G(0,\beta)}{\partial\alpha^{4-j}\,\partial\beta^{j+2}}=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{k}\cos k\omega\beta$$

$$d_k=-i\sum_{\nu=1}^{4}\frac{p(z_\nu^{(k)})}{\Delta_k'(z_\nu^{(k)})},\qquad p(z)=\sum_{j=0}^{2} b_j z^{4-j}$$

Функция $\varkappa(\beta)$ имеет особенность типа логарифма; выделив ее в замкнутом виде, получим

$$\varkappa(\beta)=\varkappa_0(\beta)+\varkappa_1(\beta),\qquad \varkappa_0(\beta)=-\frac{d}{\pi}\ln\left|2\sin\frac{\omega\beta}{2}\right| \tag{1.3}$$

$$d=-i\sum_{\nu=1}^{4}\frac{p(z_\nu)}{\Delta'(z_\nu)},\qquad \varkappa_1(\beta)=\frac{d}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k}\cos k\omega\beta,\qquad a_k=\frac{d_k-d}{d}$$

где значения $G(\alpha, \beta)$, z_ν, $\Delta(z)$, f определены в [4].

Можно показать, что ряд для $\varkappa_1(\beta)$ будет равномерно и абсолютно сходящимся, а коэффициенты a_k будут убывать при больших k не хуже чем k^{-4}.

Вводя замену переменных $\beta=\vartheta x$ и используя формулы (1.1)–(1.3), получим следующее интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$\int_{-1}^{1}\ln\left|2\sin\frac{\omega\vartheta(x-t)}{2}\right|\varphi(t)\,dt-\int_{-1}^{1}k(x-t)\varphi(t)\,dt=A \tag{1.4}$$

$$\varphi(x)=\vartheta q(\vartheta x),\qquad k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k}\cos k\omega\vartheta x,\qquad A=\left(1-\frac{R_2}{R}\right)\frac{\pi}{dR_2^2}$$

а дополнительное условие на искомую нагрузку примет вид

$$\int_{-1}^{1}\varphi(t)\cos\vartheta t\,dt=\frac{P}{R_2} \tag{1.5}$$

Уравнение (1.4) можно преобразовать к уравнению Фредгольма второго рода [1]. В частности, такое преобразование позволяет выделить в явном виде характер особенностей искомой функции.

Ниже предлагается прямой путь решения (1.4). В силу четности $q(\beta)$ представим $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x)=(1-x^2)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}X_nT_{2n}(x) \tag{1.6}$$

где $T_n(x)$ — полиномы Чебышева первого рода.

Выпишем ряд соотношений, используемых ниже [5, 6]:

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ln|x-t|\,dt=\begin{cases}-\pi\ln 2 & (n=0)\\ -\pi/nT_n(x) & (n=1,2,3,\ldots)\end{cases} \tag{1.7}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)\,T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \pi/2 & (m=n\neq 0)\\ \pi & (m=n=0)\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{t^{2n}T_{2m}(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=\begin{cases}0 & (n<m)\\ \dfrac{\pi}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n-m} & (n\geqslant m)\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_{2n}(t)\cos at}{\sqrt{1-t^2}}dt=(-1)^n\pi J_{2n}(a)\qquad (a>0)$$

$$\ln\left|2\sin\frac{\omega\vartheta x}{2}\right|=\ln|\omega\vartheta x|-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{B_{2n}(\omega\vartheta x)^{2n}}{2n(2n)!}$$

Здесь $J_n(a)$ — функция Бесселя первого рода индекса n, B_{2n} — числа Бернулли. Нетрудно также получить формулу

$$\sum_{l=m}^{k}\binom{2k}{2l}\binom{2l}{l-m}\frac{1}{2^{2l}}\int_{-1}^{1}\frac{x^{2(k-l)}T_{2n}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx= \tag{1.8}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2^{2k}}\dfrac{[(2k)!]^2}{(k+m-n)!\,(k+n-m)!\,(k+n+m)!\,(k-n-m)!} & (k\geqslant n+m)\\ 0 & (k<n+m)\end{cases}$$

Подставляя выражение для $\varphi(t)$ из (1.6) в (1.4), умножая обе части полученного равенства на $T_{2n}(x)\,(1-x^2)^{-1/2}$ и интегрируя с использованием равенств (1.7), (1.8), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов X_n

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_{nm}X_m=A_n,\qquad a_{nm}=\pi^2\ln\frac{\omega\vartheta}{2}+A_{nm}^1+A_{nm}^2\quad (n=m=0) \tag{1.9}$$

$$a_{nm}=-\frac{\pi^2}{4m}+A_{nm}^1+A_{nm}^2\quad (n=m\neq 0),\qquad a_{nm}=A_{nm}^1+A_{nm}^2\quad (n\neq m)$$

$$A_{nm}{}^1=\pi^2\sum_{k=r}^{\infty}\frac{(-1)^k B_{2k}(\omega\vartheta)^{2k}(2k)!}{2k2^{2k}(k+n-m)!(k+m-n)!(k+n+m)!(k-n-m)!}$$

$$A_{nm}{}^2=(-1)^{n+m+1}\pi^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k}J_{2n}(k\omega\vartheta)J_{2m}(k\omega\vartheta)$$

$$A_0=\pi A,\quad A_n=0,\quad r=\max\{1,\ n+m\}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

Дополнительное условие (1.5) примет вид

$$\pi\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m X_m J_{2m}(\vartheta)=\frac{P}{R_2}\tag{1.10}$$

Отметим, что описанный выше метод вывода и решения интегрального уравнения задачи можно обобщить на случай штампов с переменной кривизной кромок.

2. Рассмотрим случай, когда к оболочке по отрезкам $\alpha=0$ $|\beta-sT|<\vartheta$ ($s=0,\ 1,\ldots,\ \omega-1$) приварено ω одинаковых шпангоутов. Пренебрегая жесткостью шпангоута на растяжение — сжатие и считая шпангоут абсолютно жестким на изгиб, приходим к задаче о штампе с острыми углами, которая отличается от рассмотренной выше тем, что здесь зона контакта задана заранее. Возникающие при этом нормальные усилия взаимодействия q между оболочкой и шпангоутом подлежат определению.

Для случая изотропной цилиндрической оболочки поставленная задача сведена к уравнению Фредгольма второго рода в [2]. В этом случае со стороны шпангоута на оболочку будут действовать как погонные усилия, так и нормальные сосредоточенные силы на концах шпангоутов.

Ниже приводится решение указанной задачи для случая анизотропной оболочки вращения иным методом. Так как зона контакта заранее задана и для выполнения условия (1.5) не остается произвола, будем, следуя [2], искать q в форме

$$q(\beta)=q_1(\beta)+P_1[\delta(\beta-\vartheta)+\delta(\beta+\vartheta)](2R_2)^{-1}\tag{2.1}$$

где P_1 — величина сосредоточенной силы, приложенной в точках $\alpha=0$, $\beta=\pm\vartheta$; $q_1(\beta)$ — интегрируемая функция; $\delta(\beta)$ — дельта-функция Дирака.

Полагая $\beta=\vartheta x$, $\varphi(x)=\vartheta q_1(\beta)$ и представляя $\varphi(x)$ в виде (1.6), получим аналогично п. 1 бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно P_1 и X_n ($n=0,\ 1,\ 2,\ldots$)

$$\cos\vartheta\frac{P_1}{R_2}+\pi\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m J_{2m}(\vartheta)X_m=\frac{P}{R_2},\qquad b_n\frac{P_1}{R_2}+\sum_{m=0}^{\infty}a_{nm}X_m=A_n\tag{2.2}$$

$$b_n=\sum_{i=1}^{3}b_n{}^i,\qquad b_0{}^1=\pi\ln\frac{\omega\vartheta}{2},\qquad b_n{}^1=-\frac{\pi}{n}\qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

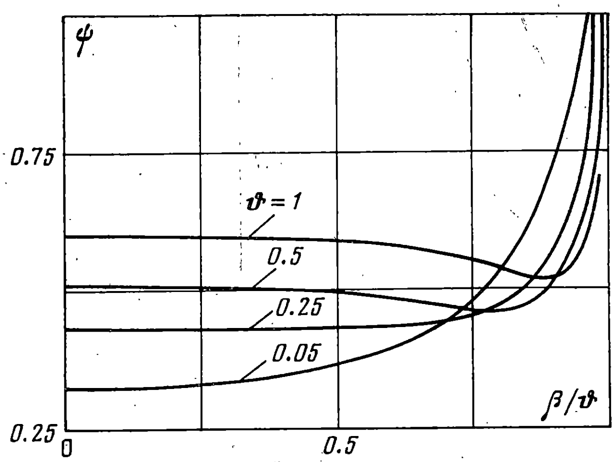
$$b_n{}^2=\sum_{k=r}^{\infty}\frac{(-1)^k B_{2k}(\omega\vartheta)^{2k}l_{kn}}{2k(2k)!}\qquad r=\max\{1,n\}$$

$$l_{kn}=0 \quad (k<n), \qquad l_{kn}=\sum_{l=n}^{k}\binom{2k}{2l}\binom{2l}{l-m}\frac{\pi}{2^{2l}} \quad (k\geqslant n)$$

$$b_n^3=(-1)^{n+1}\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k}\cos k\omega\vartheta J_{2n}(k\omega\vartheta) \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

Здесь a_{nm}, A_n и a_k определяются формулами (1.3) и (1.9).

3. Распространим решение рассмотренных задач на случай полубесконечной ортотропной цилиндрической оболочки со свободным опиранием



Фиг. 2

на торце $\alpha=0$, когда штампы действуют на конечном расстоянии $\alpha=\alpha_0$ от торца.

Можно показать, что в данном случае фундаментальное решение, удовлетворяющее условиям свободного опирания, будет иметь вид

$$G_1(\alpha, \alpha_1, \beta-\beta_1)=G(\alpha-\alpha_1, \beta-\beta_1)-G(\alpha+\alpha_1, \beta-\beta_1) \tag{3.1}$$

Исходным уравнением задачи является (1.4). Подставляя величину G_1 из (3.1) в (1.2) вместо G, представим изгибную деформацию $\varkappa_2(\beta)$ в следующей форме:

$$\varkappa_2(\beta)=R_2\int_{-\vartheta}^{\vartheta}\varkappa^*(\alpha_0, \beta-\beta_1)q(\beta_1)d\beta_1 \tag{3.2}$$

$$\varkappa^*(\alpha_0, \beta)=\frac{f}{R_2^2}\frac{\partial^2 B_{33}}{\partial\beta^2}[G(0, \beta)-G(2\alpha_0, \beta)]=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k+D_k}{k}\cos k\omega\beta$$

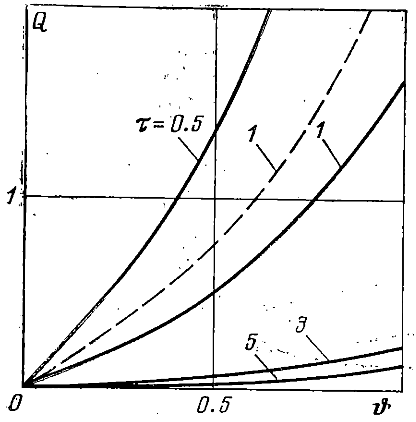
$$D_k=\mathrm{Re}\left[i\sum_{\nu=1}^{4}\frac{p(z_\nu^{(k)})}{\Delta_k'(z_\nu^{(k)})}e^{ik\omega z_\nu^{(k)}2\alpha_0}\right]$$

Из физических соображений ясно, что поставленная задача имеет смысл лишь при α_0, существенно больших нуля.

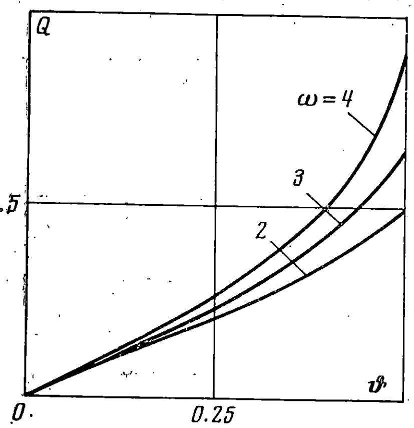
Считая это условие выполненным, можно утверждать, что достаточно быстро сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{k} \cos k\omega\beta$$

Повторяя рассуждения п. 1, 2, сведем решение первой задачи к системе (1.9), а второй — к (2.2). При этом в выражении для a_{nm} следует заменить a_k на a_k+D_k/d.



Фиг. 3



Фиг. 4

4. Ниже приводятся результаты расчетов по системе (1.9) для задачи о действии штампов на бесконечно длинную цилиндрическую оболочку из стеклопластика АГ-4С ($E_1=2.1\cdot10^4$ *Мн/м*², $E_2=1.6\cdot10^4$ *Мн/м*², $G=4.1\cdot10^3$ *Мн/м*², $\nu_2=0.07$, $R_2/R=0.99$).

Расчеты проводились в следующей последовательности: задавался угол ϑ, по его значениям из системы (1.9) определялись X_n, затем по формулам (1.6), (1.10) находилось усилие P и реакция q.

На фиг. 2 приведены кривые распределения $\psi=qR_2\vartheta/P$ по окружной координате β для некоторых значений угла ϑ при $\omega=2$, $\tau=10^{-2}R_2h^{-1}=1$ (h — толщина оболочки).

Фиг. 3 иллюстрирует зависимость величины $Q=P\cdot10^5(E_1h)^{-1}$ от угла ϑ для различных значений τ при $\omega=2$.

Пунктирная линия на фиг. 3 соответствует случаю поворота осей упругой симметрии на угол $\pi/2$ (ось E_1 совпадает с окружным направлением).

Кривые зависимости $Q(\vartheta)$ от количества штампов ω приведены на фиг. 4.

Расчеты проводились на ЭЦВМ. В системе (1.9) удерживалось соответственно 10 и 20 уравнений. Соответствующие результаты для ψ и Q при $\vartheta=1$ отличаются в третьей значащей цифре. При $\vartheta<1$ точность повышается.

Поступила 23 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Толкачев В. М.* Действие острых штампов на бесконечно длинную цилиндрическую оболочку. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
2. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* К решению контактной задачи для тонкой цилиндрической оболочки. В сб.: Теория оболочек и пластин. М., «Наука», 1973.
3. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* К решению задачи об упругом контакте цилиндрических оболочек. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 8.
4. *Максименко В. Н., Фильштинский Л. А.* Упругое поведение анизотропных оболочек под действием нагрузок, сосредоточенных на линиях. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 5.
5. *Попов Г. Я.* Об одном замечательном свойстве многочленов Якоби. Укр. матем. ж., 1968, т. 20, № 4.
6. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.