МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1977

УДК 539.3:534.1

СМЕШАННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ РАВНОВЕСИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Д. М. БЕНИАМИНОВ

(Москва)

После появления книги А. А. Гвоздева [1] смешанный метод строительной механики широко применяется для анализа деформаций механических конструкций, конфигурации которых описываются заданием конечного числа параметров. По сравнению с другими методами (перемещений и сил) применение смешанного метода в ряде случаев приводит к системам уравнений с меньшим числом неизвестных.

Это замечание относится и к механическим системам с распределенными параметрами. Хорошо известны уравнения смешанного метода, описывающие изгиб упругих пластин [2] и пологих оболочек [3], осесимметричные деформации оболочек вращения [4, 5] и продольный изгиб составных стержней [6, 7].

Предложенный в [8] алгоритм составления уравнений смешанного метода для дискретных систем легко переносится на системы с распределенными параметрами. Это связано с тем, что операторы уравнений равновесия и соотношений между деформациями и перемещениями не независимы: они по терминологии Э. Тонти [9], который рассматривал соотношения линейной теории упругости, формально сопряжены. Для геометрически линейных моделей более общего типа такого же рода двойственность в записи названных операторов отмечается в [10, 11].

Ниже рассматриваются геометрически нелинейные упругие консервативные системы. Сформулированы условия, при выполнении которых возможна запись уравнений смешанного метода, и дан способ их составления. Показывается, что уравнения смешанного метода совпадают с уравнениями Эйлера, составленными для некоторого функционала. Указываются также свойства, которыми должны обладать решения уравнений смешанного метода при устойчивом равновесии.

1. Пусть упругая система занимает в пространстве некоторую область Ω, в каждой точке которой определен вектор обобщенных перемещений $\mathbf{w}=(w_1, w_2, \dots, w_n)$ и вектор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{E}(\mathbf{w})$, где $\mathbf{E}=(E_1, E_2, \dots, E_m)$ — дифференциальный оператор. Компонентами вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ в частных случаях могут служить деформации сжатия, сдвига, изменения кривизн оболочек и т. д. Пусть также существует такой вектор $\mathbf{p}=(p_1, p_2, \dots, p_m)$, называемый вектором обобщенных внутренних усилий, что принцип возможных перемещений сводится к уравнению

$$\delta V=\int\limits_{\Omega} (\mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{E}(\mathbf{w})-\mathbf{q}\cdot\delta\mathbf{w})\,d\Omega-\int\limits_{\Gamma} \mathbf{Q}^\circ\cdot L\delta\mathbf{w}\,d\Gamma=0 \tag{1.1}$$

Здесь V — потенциальная энергия системы, Γ — граница области Ω, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{Q}^\circ$ — заданные векторы массовых и поверхностных обобщенных внешних сил, L — линейный дифференциальный оператор, определяемый по оператору $\mathbf{E}$. Усилия $\mathbf{p}$ связаны с деформациями $\boldsymbol{\varepsilon}$ формулой

$$\mathbf{p}=\partial W(\boldsymbol{\varepsilon})\,/\,\partial\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.2}$$

в которой $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ — потенциал напряжений, определяющий физические свойства матерала системы.

Задание функции $W(\varepsilon)$ и оператора $\mathbf{E}$ полностью определяет механическую систему.

Для записи уравнений введем понятие формально-сопряженных операторов. Два линейных дифференциальных оператора $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}^*$ называются формально-сопряженными, если при всех $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ они удовлетворяют равенству

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{Kx}\cdot\mathbf{y}\,d\Omega = \int\limits_{\Omega} \mathbf{K}^*\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}\,d\Omega + J$$

где через J обозначен интеграл по границе области Ω. Как и в [9], это понятие оказывается здесь полезным для анализа и формулировки соответствующих уравнений и вариационных принципов.

Из (1.1) имеем

$$\delta V = \int\limits_{\Omega} (\mathbf{E}_w{}^*\mathbf{p} - \mathbf{q})\cdot\delta\mathbf{w}\,d\Omega + \int\limits_{\Gamma} [\mathbf{Q}(\mathbf{p},\mathbf{w}) - \mathbf{Q}^\circ]\cdot\delta L\mathbf{w}\,d\Gamma = 0 \tag{1.3}$$

Здесь через $\mathbf{E}_w$ обозначен линейный оператор, являющийся производной Фреше оператора $\mathbf{E}(\mathbf{w})$. Если функции $\mathbf{w}$ определены на множестве функций, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям, то из (1.3) следуют естественные (статические) условия на Γ и уравнения равновесия

$$\mathbf{E}_w{}^*\mathbf{p} - \mathbf{q} = 0 \tag{1.4}$$

Подставляя в (1.4) усилия $\mathbf{p}$, выраженные через деформации по формулам (1.2), получим уравнения равновесия в перемещениях (по принятой в строительной механике терминологии, уравнения метода перемещений): $\mathbf{E}_w{}^*[\partial W(\mathbf{E}(\mathbf{w}))/\partial\varepsilon] = \mathbf{q}$.

Так же, как и для дискретных систем, уравнения смешанного метода для систем с распределенными параметрами составляются только при выполнении некоторых ограничений, накладываемых на вид соотношений между деформациями и перемещениями.

Пусть структура оператора $\mathbf{E}$ такова, что зависимость деформаций от перемещений имеет вид

$$\varepsilon_1 = \mathbf{E}_{11}(\mathbf{u}),\quad \varepsilon_2 = \mathbf{E}_{21}(\mathbf{u}) + \mathbf{E}_{22}(\mathbf{v}) \tag{1.5}$$
$$\varepsilon_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m_1}),\quad \varepsilon_2 = (\varepsilon_{m_1+1}, \varepsilon_{m_1+2}, \ldots, \varepsilon_m)$$
$$\mathbf{u} = (w_1, w_2, \ldots, w_{n_1}),\quad \mathbf{v} = (w_{n_1+1}, w_{n_1+2}, \ldots, w_n),\quad m - m_1 > n - n_1$$

где $\mathbf{E}_{11}$, $\mathbf{E}_{21}$, $\mathbf{E}_{22}$ — дифференциальные операторы, причем $\mathbf{E}_{22}$ — линейный оператор.

Уравнения равновесия (1.4) разбиваются на две группы

$$\overset{*}{\mathbf{E}}_{11u}\mathbf{p}_1 + \overset{*}{\mathbf{E}}_{21u}\mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_1,\qquad \mathbf{E}_{22}{}^*\mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_2 \tag{1.6}$$

где $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ — внутренние усилия, соответствующие деформациям ε_1 и ε_2, а $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$ — внешние нагрузки, соответствующие перемещениям $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

Оператору $\mathbf{E}_{22}$ сопоставим линейный дифференциальный оператор $\mathbf{D}$, удовлетворяющий равенству $\mathbf{DE}_{22}=0$. Из второго уравнения в (1.5) следует уравнение совместности

$$\mathbf{D}(\varepsilon_2 - \mathbf{E}_{21}(\mathbf{u})) = 0 \tag{1.7}$$

Так как $(\mathbf{DE}_{22})^* = \mathbf{E}_{22}{}^*\mathbf{D}^*$, то общее решение второго уравнения системы (1.6) будет иметь вид

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{D}^*\boldsymbol{\mu} + \mathbf{p}_2{}^\circ \tag{1.8}$$

где μ — некоторый достаточное число раз дифференцируемый вектор с k компонентами ($k=m-m_1-n+n_1$), а $\mathbf{p}_2^\circ$ — произвольное частное решение.

Введем также смешанный потенциал $S(\varepsilon_1, p_2)$, связанный с потенциалом напряжений $W(\varepsilon)$ преобразованием Лежандра

$$S(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathbf{p}_2)=W(\boldsymbol{\varepsilon})-\boldsymbol{\varepsilon}_2\cdot\mathbf{p}_2 \tag{1.9}$$

и обладающий свойствами

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathbf{p}_2)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1}=\mathbf{p}_1, \qquad \frac{\partial S(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathbf{p}_2)}{\partial \mathbf{p}_2}=-\boldsymbol{\varepsilon}_2 \tag{1.10}$$

На способ получения уравнения состояния в такой форме указано в [12].

Для составления уравнений смешанного метода достаточно присоединить формулы (1.9) к первому уравнению системы (1.6), уравнению (1.7) и соотношению (1.8). В результате будем иметь

$$\mathbf{E}^*_{11u}\frac{\partial S[\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{u}), \mathbf{p}_2(\boldsymbol{\mu})]}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1}+\mathbf{E}^*_{21u}\mathbf{p}_2(\boldsymbol{\mu})=\mathbf{q}_1, \qquad \mathbf{D}\left(\frac{\partial S[\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{u}), \mathbf{p}_2(\boldsymbol{\mu})]}{\partial \mathbf{p}_2}+\mathbf{E}_{21}(\mathbf{u})\right)=0 \tag{1.11}$$

При решении конкретной механической задачи к этим уравнениям добавляются краевые условия, записанные через функции $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\mu}$.

2. В качестве примера покажем соответствие уравнениям (1.11) известных уравнений смешанного метода в нелинейной задаче изгиба пластин

$$d\nabla^4 u=h\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\right)+q$$

$$\frac{1}{E}\nabla^4\Phi=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \tag{2.1}$$

где x, y — прямоугольные координаты в срединной плоскости пластины; u — поперечное перемещение; Φ — функция напряжений; h, E, d — соответственно толщина, модуль упругости и цилиндрическая жесткость пластины.

Пусть v_x и v_y — тангенциальные перемещения срединной поверхности; деформации с перемещениями связаны формулами

$$\chi_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \chi_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \quad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$\varepsilon_{xy}=\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.2}$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}_1=\{\chi_{xx}, \chi_{yy}, \chi_{xy}\}^T$ — кривизны изогнутой поверхности, $\boldsymbol{\varepsilon}_2=\{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}\}^T$ — цепные деформации срединной поверхности.

Смешанный потенциал для линейно-упругой пластинки имеет вид

$$S=d[\chi_{xx}^2+\chi_{yy}^2+2\nu\chi_{xx}\chi_{yy}+2(1-\nu)\chi_{xy}^2]/2-$$
$$-h[\sigma_{xx}^2+\sigma_{yy}^2-2\nu\sigma_{xx}\sigma_{yy}+2(1+\nu)\sigma_{xy}^2]/(2E) \tag{2.3}$$

где $\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}^T$ — цепные напряжения, ν — коэффициент Пуассона.

Соотношений (2.2) и (2.3) достаточно для записи уравнений смешанного метода.

Из (2.2) видно, что группа деформаций ε_1 в рассматриваемом случае зависит только от перемещения u, а другая группа связана с перемещениями v_x и v_y линейным оператором (таким образом, удовлетворены условия (1.5)).

Перепишем (2.2) в обозначениях формулы (1.5)

$$\varepsilon_1=\mathbf{E}_{11}(\mathbf{u})\equiv\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right\}^T,\qquad \varepsilon_2=\mathbf{E}_{21}(\mathbf{u})+\mathbf{E}_{22}(\mathbf{v})$$

$$\mathbf{E}_{21}(\mathbf{u})=\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right\}^T \tag{2.4}$$

$$\mathbf{E}_{22}(\mathbf{v})=\begin{vmatrix}\partial/\partial x & 0\\ 0 & \partial/\partial y\\ \partial/\partial y & \partial/\partial x\end{vmatrix}\begin{vmatrix}v_x\\ v_y\end{vmatrix}$$

Так как $\mathbf{E}_{11}$ — линейный оператор, то $\mathbf{E}_{11}(\mathbf{u})=\mathbf{E}_{11u}\mathbf{u}$. Производная Фреше от оператора $\mathbf{E}_{21}$ имеет вид

$$\mathbf{E}_{21u}=\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right\}^T \tag{2.5}$$

Оператор $\mathbf{D}$, удовлетворяющий условию $\mathbf{D}\mathbf{E}_{22}=0$, совпадает с оператором уравнений совместности плоской задачи теории упругости

$$\mathbf{D}=\left\{\frac{\partial^2}{\partial y^2},\frac{\partial^2}{\partial x^2},-\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\right\} \tag{2.6}$$

Сопряженные операторы $E_{11u}{}^*$, D^*, $E_{21u}{}^*$ определяются зависимостями

$$\mathbf{E}^*_{11u}=\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2},\frac{\partial^2}{\partial y^2},\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\right\},\qquad \mathbf{D}^*=\left\{\frac{\partial^2}{\partial y^2},\frac{\partial^2}{\partial x^2},-\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\right\}^T$$

$$\mathbf{E}^*_{21u}=\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\quad-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\quad-\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} \tag{2.7}$$

Подставляя (2.3)—(2.7) в (1.11), получим уравнения (2.1).

3. Рассмотрим функционал

$$T(\mathbf{u},\boldsymbol{\mu})=\int_{\Omega}\{S[\mathbf{E}_{11}(\mathbf{u}),\mathbf{p}_2(\boldsymbol{\mu})]+\mathbf{E}_{21}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{p}_2(\boldsymbol{\mu})-\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{u}\}\,d\Omega+t(\mathbf{u},\boldsymbol{\mu}) \tag{3.1}$$

в котором $S[\mathbf{E}_{11}(\mathbf{u}),\ \mathbf{p}_2(\boldsymbol{\mu})]$ — прежний потенциал (1.9), только ε_1 и $\mathbf{p}_2$ выражены через $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\mu}$ по формулам (1.5), (1.8); $t(\mathbf{u},\ \boldsymbol{\mu})$ — некоторый определенный на границе области Ω функционал, зависящий от функций $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\mu}$, а также от части заданных на границе усилий и перемещений. Если операторы $\mathbf{E}_{11}$, $\mathbf{E}_{21}$ или $\mathbf{D}$ содержат производные выше первого порядка и граница области негладкая, то функционал $t(\mathbf{u},\ \boldsymbol{\mu})$ включает в себя интегралы, вычисленные вдоль ребер. В двухмерной задаче интегралы по ребрам заменяются конечными слагаемыми в углах контура.

Пусть функция S дважды дифференцируема по переменным ε_1 и $\mathbf{p}_2$, а операторы $\mathbf{E}_{11}(\mathbf{u})$ и $\mathbf{E}_{21}(\mathbf{u})$ — по всем входящим в них производным. Тогда уравнения Эйлера, записанные для функционала $T(\mathbf{u},\ \boldsymbol{\mu})$, совпадают с уравнениями смешанного метода (1.11). Однако этого еще не достаточно для формулировки смешанного вариационного принципа, так как в континуальных задачах существенную роль играют условия на границе.

Выберем функционал $t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu})$ таким образом, чтобы после интегрирования по частям первая вариация функционала (3.1) приобрела вид (предполагается, что граница гладкая)

$$\delta T=\int\limits_{\Omega}\left\{\mathbf{E}^{*}_{11u}\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1}+\mathbf{E}^{*}_{21u}\cdot\mathbf{p}_2(\boldsymbol{\mu})-\mathbf{q}_1\right\}\cdot\delta\mathbf{u}\,d\Omega+\int\limits_{\Omega}\mathbf{D}\left\{\frac{\partial S}{\partial \mathbf{p}_2}+\mathbf{E}_{21}(\mathbf{u})\right\}\cdot\delta\boldsymbol{\mu}\,d\Omega+$$

$$+\int\limits_{\Gamma}[\mathbf{Q}(\mathbf{u},\boldsymbol{\mu})-\mathbf{Q}^{\circ}]\cdot\delta L\mathbf{u}\,d\Gamma+\int\limits_{\Gamma}[\mathbf{Y}(\mathbf{u},\boldsymbol{\mu})-\mathbf{Y}^{\circ}]\cdot\delta P\boldsymbol{\mu}\,d\Gamma \tag{3.2}$$

где $\mathbf{Q}$ и $P\boldsymbol{\mu}$ — некоторые векторы обобщенных усилий, $L\mathbf{u}$ и $\mathbf{Y}$ — соответствующие введенным усилиям обобщенные перемещения, L и P — линейные операторы (градусом обозначены заданные на границе величины).

Размерность векторов $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Y}$ связана с размерностями векторов $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\mu}$, а также с порядком производных в операторах $\mathbf{E}_{11}$, $\mathbf{E}_{21}$ и $\mathbf{D}$. Уравнения смешанного метода вытекают из условия стационарности функционала T (т. е. из условия $\delta T=0$) при обращении в нуль вычисляемых на границе интегралов в последней формуле. Это возможно только в том случае, когда для любой точки границы в каждом произведении $(Q_i-Q_i^{\circ})\delta L_i\mathbf{u}$, $(Y_i-Y_i^{\circ})\delta P_i\boldsymbol{\mu}$ равен нулю один из сомножителей.

Условия типа

$$Q_i|_{\Gamma}-Q_i^{\circ}=0,\qquad Y_i|_{\Gamma}-Y_i^{\circ}=0 \tag{3.3}$$

определяют естественные граничные условия вариационной задачи. Условия

$$L_i\mathbf{u}|_{\Gamma}=0,\qquad P_i\boldsymbol{\mu}|_{\Gamma}=0 \tag{3.4}$$

так же, как и (3.3), имеют и статический, и кинематический характер, но в отличие от естественных граничных условий они ограничивают класс функций, на котором отыскивается стационарное значение функционала.

Для того чтобы сформулировать смешанный вариационный принцип, необходимо все граничные условия задачи составить в виде (3.3) и (3.4). Такая возможность в общем случае здесь не доказана, поэтому каждая конкретная задача требует в этом отношении специального анализа. Для задачи изгиба пологих оболочек переменной толщины смешанный вариационный принцип получен в [13], а для задачи продольного изгиба составных стержней – в [7].

4. При исследовании устойчивости консервативных механических систем обычно прибегают к критерию Дирихле, согласно которому в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия системы имеет минимум по отношению к ее значениям в соседних положениях. Из формулировки критерия ясно, что он применим только при анализе системы методом перемещений. Имея в виду, что для расчета некоторых конструкций наиболее эффективно применение смешанного метода, необходимо выяснить свойства решений уравнений этого метода при устойчивом равновесии конструкции.

Локальные свойства квадратичных форм определяются ее индексом (максимальной размерностью подпространства переменных формы, над которым она отрицательно определена) и рангом. Введем аналогичные определения для квадратичных функционалов.

Пусть задан квадратичный функционал $I(\boldsymbol{\varphi})$ от n функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Вектор $\boldsymbol{\varphi}$ есть элемент некоторого линейного функционального пространства C, которое будем рассматривать как прямое произведение пространств C_i, где C_i – некоторое линейное функциональное пространство компоненты φ_i. Пусть также C° – некоторое множество из C. Образуем квадратичную форму I° относительно n действительных чисел f_{α} $(\alpha=1, 2, \ldots, n)$ подстановкой в $I(\boldsymbol{\varphi})$ вектора $\boldsymbol{\varphi}$ с компонентами $\varphi_{\alpha}=f_{\alpha}\varphi_{\alpha}^{\circ}$. Положим, что функционал $I(\boldsymbol{\varphi})$ имеет индекс ν и ранг r на множестве C°, если квадратичная форма $I^{\circ}(\mathbf{f})$ для всех $\varphi^{\circ}\in C^{\circ}$ имеет индекс ν и ранг r.

Справедливо следующее утверждение.

Пусть консервативная механическая система удовлетворяет следующим требованиям.

1. Деформации системы связаны с перемещениями формулами (1.5).

2. Сформулирован вариационный принцип, согласно которому из условия стационарности в пространстве $C_u^{n_1}\times C_\mu^k$ составленного по формуле (3.1) смешанного потенциала $T(\mathbf{u}, \mu)$ вытекают уравнения смешанного метода (1.11) и заданные на границе условия ($C_u^{n_1}$ и C_μ^k – некоторые функциональные пространства n_1 компонент вектора $\mathbf{u}$ и k компонент вектора μ, удовлетворяющих существенным граничным условиям).

3. Для материала системы при всех ε справедливо неравенство ($W(\varepsilon)$ – потенциал усилий)

$$\sum_{\alpha=m_1+1}^{m}\sum_{\beta=m_1+1}^{m}\frac{\partial^2 W(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_\alpha\,\partial\varepsilon_\beta}\,d\varepsilon_\alpha\,d\varepsilon_\beta>0 \tag{4.1}$$

Тогда, если в стационарной точке $(\mathbf{u}_*, \mu_*)\in C_u^{n_1}\times C_\mu^k$ вторая вариация функционала $T(\mathbf{u}, \mu)$ имеет индекс $\nu=k$ и ранг $r=n_1+k$ на множестве C°, состоящем из всех элементов пространства $C_u^{n_1}\times C_\mu^k$, за исключением тех, у которых хотя бы одна компонента $\delta\mu_i=0$, то равновесие системы устойчиво.

Доказательство этого утверждения будет дано ниже.

Из содержания утверждения и его доказательства вытекает, что пара $(\mathbf{u}_*, \mu_*)$, соответствующая устойчивому равновесию системы, удовлетворяет локальному условию $T(\mathbf{u}_*, \mu_*)=\min\limits_{u}\max\limits_{\mu} T(\mathbf{u}, \mu)$. Здесь операции min и max неперестановочны.

Процесс отыскания стационарных точек смешанного потенциала $T(\mathbf{u}, \mu)$ методом Ритца строится обычным образом. Из сформулированного утверждения следует, что на каждом этапе приложения процесса Ритца за решения, соответствующие устойчивому равновесию, должны приниматься (среди всех других решений) только те, для которых индекс квадратичной формы второго дифференциала смешанного потенциала как функции вариационных параметров равен числу параметров аппроксимации функций усилий μ_i, а ранг формы – общему числу вариационных параметров.

Функционал смешанного метода $T(\mathbf{u}, \mu)$ всегда неположителен; поэтому если процесс Ритца решения уравнений смешанного метода и отыскания критических значений параметра нагрузки сходится, то сходится немонотонно.

5. В последнее время для анализа конструкций типа пластин и оболочек применяются смешанные вариационные принципы, построенные по аналогии с известным принципом Э. Рейсснера [14, 15] в теории упругости. Функционалы, на которых основаны эти принципы, имеют вид

$$R(\mathbf{w}, \mathbf{p})=\int\limits_{\Omega}[\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{w})-B(\mathbf{p})-\mathbf{q}\cdot\mathbf{w}]\,d\Omega+\int\limits_{\Gamma}\mathbf{Q}^\circ\cdot L\mathbf{w}\,d\Gamma$$

где второй интеграл учитывает работу поверхностных сил и вычисляется по той части границы, на которой заданы статические условия; $B(\mathbf{p})$ – потенциал деформаций, характеризующий свойства материала конструкции ($\varepsilon(\mathbf{p})=\partial B(\mathbf{p})/\partial\mathbf{p}$); остальные обозначения те же, что и в формуле (1.1).

Пусть пара $(\mathbf{w}, \mathbf{p})\in C_w^n\times C_p^m$, где C_w^n и C_p^m – соответственно некоторые линейные функциональные пространства функций w_i ($i=1, 2, \ldots, n$) и p_j ($j=1, 2, \ldots, m$), причем элементы пространства C_w^n удовлетворяют кинематическим условиям на границе тела. Тогда условия стационарности функционала $R(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ в пространстве $C_w^n\times C_p^m$ эквивалентны заданной краевой задаче (уравнениям равновесия внутри объема и на границе тела и уравнениям, связывающим усилия и перемещения).

Функционал $R(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ является частным видом рассмотренных выше потенциалов смешанного метода $T(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu})$. В отличие от потенциала $T(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu})$, функционал $R(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ содержит все компоненты вектора перемещений $\mathbf{w}$, и он может быть построен при любой внутренней структуре оператора E.

Из утверждения п. 4 следует, что при устойчивом равновесии конструкции, изготовленной из материала с выпуклым потенциалом усилий, вторая вариация функционала $R(\mathbf{w}, \mathbf{p})$ имеет индекс $\nu=m$ и ранг $r=n+m$.

Аналогичное свойство функционала Э. Рейсснера нелинейной теории упругости иным способом показано в [16].

6. Для доказательства основного утверждения п. 4 достаточно показать, что из его условий вытекает положительная определенность второй вариации потенциальной энергии системы $V(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ в пространстве $C_u^{n_1}\times C_v^{n-n_1}$, где $C_u^{n_1}$ — уже введенное ранее пространство, а $C_v^{n-n_1}$ — некоторое линейное функциональное пространство функций v_i $(i=1, 2, \ldots, n-n_1)$, удовлетворяющих на границе поставленным относительно этих функций кинематическим условиям.

Из условий 1 и 3 утверждения следует, что при всех u и v

$$\sum_{i=1}^{n-n_1}\sum_{j=1}^{n-n_1} V_{v_i v_j}\,\delta v_i \delta v_j > 0 \tag{6.1}$$

где $V_{v_i v_j}$ — вторые производные Фреше функционала V; поэтому система уравнений

$$V_{v_i}\,\delta v_i = 0 \quad (i=1,2,\ldots,n-n_1) \tag{6.2}$$

имеет единственное решение при заданном $\mathbf{u}$ (см., например, [17]).

Если это решение подставить в потенциальную энергию $V(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, то полученный таким образом функционал будет представлять собой потенциальную энергию системы $V_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}(\mathbf{u}))$ над пространством функций, удовлетворяющих условиям равновесия системы в направлении перемещений v_i.

Из условия положительной определенности второй вариации функционала $V(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ следует и положительная определенность второй вариации функционала $V_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}(\mathbf{u}))$. Для рассматриваемых систем, свойства которых определяются условиями 1 и 3, справедливо и обратное утверждение. В самом деле, преобразовав вторую вариацию потенциальной энергии

$$\delta^2 V = \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} V_{u_i u_j}\,\delta u_i \delta u_j + 2\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n-n_1} V_{u_i v_j}\,\delta u_i \delta v_j + \sum_{i=1}^{n-n_1}\sum_{j=1}^{n-n_1} V_{v_i v_j}\,\delta v_i \delta v_j$$

при помощи формул

$$\delta u_i = \delta u_i, \qquad \delta z_j = \delta v_j - \sum_{i=1}^{n_1} v_{ju_i}\,\delta u_i \quad (i=1,2,\ldots,n_1;\ j=1,2,\ldots,n-n_1)$$

где v_{ju_i} — первые производные Фреше операторов $v_j(\mathbf{u})$, полученных в результате формального решения системы (6.2), придем к выражению

$$\delta^2 V = \delta^2 V_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}(\mathbf{u})) + \sum_{i=1}^{n-n_1}\sum_{l=1}^{n-n_1} V_{v_i v_l}\,\delta z_i \delta z_l$$

Отсюда и из равенства (6.1) следует, что требование положительной определенности второй вариации потенциальной энергии эквивалентно требованию $\delta^2 V_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}(\mathbf{u}))>0$.

Система вариационных уравнений

$$T_{\mu_i}\delta\mu_i=0 \quad (i=1,2,\ldots,k) \tag{6.3}$$

так же, как и система (6.2), имеет единственное решение при фиксированном u по той причине, что

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} T_{\mu_i \mu_j}\delta\mu_i\delta\mu_j<0 \tag{6.4}$$

при всех $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\mu}$. Последнее неравенство следует из формул (1.8), линейно связывающих усилия $\mathbf{p}_2$ с вектором $\boldsymbol{\mu}$, и из неравенства

$$\sum_{\alpha=m_1+1}^{m}\sum_{\beta=m_1+1}^{m}\frac{\partial^2 S(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathbf{p}_2)}{\partial p_\alpha\, \partial p_\beta}dp_\alpha\, dp_\beta<0$$

вытекающего, в свою очередь, из условия 3.

После подстановки решения системы (6.3) в функционал $T(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu})$ получим некоторый функционал $T_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}))$; причем

$$T_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}))=V_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}(\mathbf{u})) \tag{6.5}$$

так как оба функционала T и V описывают одну и ту же механическую систему.

Подставим далее вариации $\delta u_i=b_i u_i^\circ$, $\delta\mu_j=g_j\mu_j^\circ$, $(i=1, 2,\ldots, n_1;\ j=1, 2,\ldots, k)$ во вторую вариацию

$$\delta^2 T=\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} T_{u_i u_j}\delta u_i\delta u_j+$$

$$+2\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{k} T_{u_i \mu_j}\delta u_i\delta\mu_j+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} T_{\mu_i \mu_j}\delta\mu_i\delta\mu_j \tag{6.6}$$

где b_i и g_j — произвольные действительные числа, $u_i^\circ\in C_{u_i}$, $\mu_j^\circ\in C_{\mu_j}$, $\mu_j^\circ\neq0$.

Функционал $\delta^2 T$ превращается в квадратичную форму переменных b_i и g_j

$$T^\circ=(\mathbf{A}_1\mathbf{b}, \mathbf{b})+2(\mathbf{A}_2\mathbf{g}, \mathbf{b})+(\mathbf{A}_3\mathbf{g}, \mathbf{g}) \tag{6.7}$$

в которой $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ — некоторые матрицы с размерами $n_1\times n_1$, $n_1\times k$ и $k\times k$ соответственно, полученные в результате подстановки, а скобками обозначены скалярные произведения векторов.

В силу неравенства (6.4) и определения множества C° матрица $\mathbf{A}_3$ отрицательно определена, и существует ей обратная матрица A_3^{-1}.

Заменой переменных $\mathbf{b}$ и $\mathbf{g}$ по формулам $\mathbf{b}=\mathbf{b}$, $\mathbf{t}=\mathbf{g}-\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{A}_2^T\mathbf{b}$ квадратичная форма (6.7) приводится к виду

$$T^\circ=((\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{A}_2^T)\mathbf{b},\ \mathbf{b})+(\mathbf{A}_3\mathbf{t},\ \mathbf{t}) \tag{6.8}$$

Ввиду невырожденности преобразования переменных индексы и ранги форм (6.7) и (6.8) совпадают.

Так как матрица $\mathbf{A}_3$ отрицательно определена, то утверждение будет доказано, если показать, что из условия положительной определенности при любых $\mathbf{u}^\circ$, $\boldsymbol{\mu}^\circ$ из C° той части формы (6.8), которая зависит только от $\mathbf{b}$, следует положительная определенность потенциальной энергии системы.

Линейное преобразование переменных δu_i и $\delta\mu_j$ по формулам

$$\delta u_i=\delta u_i,\qquad \delta\psi_j=\delta\mu_j-\sum_{i=1}^{n_1}\mu_{ju_i}\delta u_i$$

где μ_{ju_i} — первые производные Фреше операторов $\mu_j(\mathbf{u})$, полученных при формальном решении системы (6.3), приводит вторую вариацию $\delta^2 T$ к виду

$$\delta^2T=\delta^2V_1(\mathbf{u},\boldsymbol{\mu}(\mathbf{u}))+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}T_{\mu_i\mu_j}\delta\psi_i\delta\psi_j \tag{6.9}$$

Если при вычислении δ^2T были приняты те же вариации δu_i и $\delta\mu_j$, что при получении квадратичной формы T°, то правые части в формулах (6.8) и (6.9) равны. Равенство справедливо при всех $\mathbf{t}$, в том числе и при $\mathbf{t}=0$. Согласно неравенству (6.4) двойная сумма в (6.9) отрицательна или равна нулю; поэтому при любых u_i°, μ° из C° справедливо неравенство

$$((\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3^{-1}\mathbf{A}_2^T)\mathbf{b},\ \mathbf{b})\leqslant\delta^2V_1(\mathbf{u},\ \mathbf{v}(\mathbf{u}))$$

что и доказывает утверждение.

Поступила 10 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гвоздев А. А.* Общий метод расчета сложных статически неопределимых систем. М., ОНТИ, 1927.
2. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. М., Гостехиздат, 1956.
3. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М., Гостехиздат, 1949.
4. *Meissner E.* Das Elastizitätsproblem für dünne Schalen von Ringflächen. Kugel — oder Kegelform, Phys. Zs., 1914, Bd 15, Nr 8, S. 343.
5. *Лурье А. И.* Статика тонкостенных упругих оболочек. М., Гостехиздат, 1947.
6. *Ржаницын А. Р.* Теория составных стержней строительных конструкций. М., Стройиздат, 1949.
7. *Бениаминов Д. М.* Вариационный принцип в задаче устойчивости равновесия составных стержней. Строительная механика и расчет сооружений, 1972, № 3.
8. *Бениаминов Д. М.* О смешанном методе строительной механики. Строительная механика и расчет сооружений, 1973, № 5.
9. *Tonti E.* Variational principles in elastostaties. Meccanica, 1967, vol. 2, No. 4. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1969, № 5.)
10. *Ржаницын А. Р.* Двойственность статических и геометрических уравнений строительной механики. Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1974, № 11.
11. *Чирас А. А., Боркаускас А. Э., Каркаускас Р. П.* Теория и методы оптимизации упругопластических систем. Л., Стройиздат, 1974.
12. *Гольденблат И. И.* Некоторые вопросы механики деформируемых сред. М., Гостехиздат, 1955.
13. *Кантор Б. Я.* К технической нелинейной теории тонких оболочек переменной толщины. Прикл. механ., 1965, т. 1, вып. 12.
14. *Reissner E.* On a variational theorem in elasticity. J. Math. and Phys., 1950, vol. 29, No. 2.
15. *Рейсснер Э.* О некоторых вариационных теоремах теории упругости. В сб.: Проблемы механики сплошной среды. М., Изд-во АН СССР, 1961.
16. *Бениаминов Д. М.* Об одном свойстве функционала Рейсснера теории упругости. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 6.
17. *Гельман И. В.* К задаче о минимуме нелинейного функционала. Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, 1958, т. 166.