

РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ЗАГРУЖЕННОЙ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ

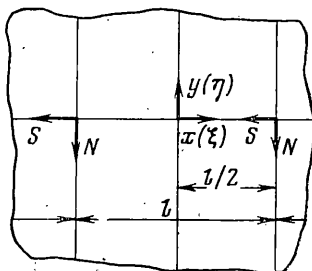
В. В. ВЛАСОВ

(Москва)

Суммированием соответствующих решений в одинарных тригонометрических рядах получены точные решения плоской задачи теории упругости в замкнутом виде для полуплоскости, нагруженной периодически приложенными сосредоточенными силами, одинаковыми по величине и направлению. Предполагается, что силы расположены внутри полуплоскости на одном и том же расстоянии от ее прямой границы. Результаты для перемещений и напряжений приводятся для двух видов сосредоточенных нагрузок: силы направлены по нормали к прямой границе полуплоскости, силы направлены по касательной к границе полуплоскости. Кроме того, в обоих случаях граница полуплоскости считается закрепленной от перемещений и свободной от закрепления.

При исследовании поведения этих решений в непосредственной окрестности сосредоточенного воздействия получаются более простые зависимости для перемещений и напряжений, которые отвечают точным решениям для полуплоскости, нагруженной одной силой в четырех выше указанных случаях. Решение от одной силы для полуплоскости со свободной от закрепления границей (получены только зависимости для напряжений) приводится в [1, 2].

1. Неограниченная плоскость, нагруженная периодически приложенными силами. Предварительно рассмотрим известные решения [3], отвечающие действию на плоскость периодически приложенных сосредоточенных сил N или S , одинаковых по величине и направлению (фиг. 1). Примем расстояние между силами равным l . Плоскость отнесем к



Фиг. 1

системе координат x, y , причем ось x выберем таким образом, чтобы она проходила через точки приложения сосредоточенных сил, а начало координат возьмем посередине между точками приложения двух соседних сил.

В безразмерных координатах $\xi = \pi x / l, \eta = \pi y / l$ зависимости для перемещений и напряжений в форме одинарных тригонометрических рядов от сил N имеют вид

$$Gu^{(1)} = -\frac{(1+\nu)N}{4\pi} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{n/2} \eta e^{-n\eta} \sin n\xi$$

$$Gv^{(1)} = \frac{N}{4\pi} \left\{ (1-\nu) \eta - \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{n/2} \frac{1}{n} [(1+\nu)n\eta + 3 - \nu] e^{-n\eta} \cos n\xi \right\}$$

$$\sigma_x^{(1)} = \frac{N}{2l} \left\{ \nu + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{n/2} [-(1+\nu)n\eta + 2\nu] e^{-n\eta} \cos n\xi \right\} \quad (1.1)$$

$$\sigma_y^{(1)} = \frac{N}{2l} \left\{ 1 + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{n/2} [(1+\nu)n\eta+2] e^{-n\eta} \cos n\xi \right\}$$

$$\tau_{xy}^{(1)} = \frac{N}{2l} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{n/2} [(1+\nu)n\eta+1-\nu] e^{-n\eta} \sin n\xi \quad (\eta > 0)$$

Приведенное выше решение соответствует симметричной периодической задаче. В этом случае распределение перемещений и напряжений в плоскости четно относительно любой прямой, параллельной оси y и проходящей посередине между двумя соседними силами N .

Ряды в формулах (1.1) суммируются, поэтому окончательные зависимости можно записать в замкнутой форме¹

$$Gu^{(1)} = \frac{(1+\nu)N}{4\pi} \eta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$$

$$Gv^{(1)} = \frac{N}{4\pi} \left\{ (1-\nu)\eta + \left[-3+\nu+(1+\nu)\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right] f \right\}$$

$$\sigma_x^{(1)} = \frac{N}{2l} \left\{ \nu - \left[2\nu+(1+\nu)\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \frac{\partial f}{\partial \eta} \right\}$$

$$\sigma_y^{(1)} = \frac{N}{2l} \left\{ 1 + \left[-2+(1+\nu)\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \frac{\partial f}{\partial \eta} \right\}$$

$$\tau_{xy}^{(1)} = \frac{N}{2l} \left[-(1-\nu) + (1+\nu)\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$$
(1.2)

$$\varphi(\xi, \eta) = \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{n/2} \frac{1}{n} e^{-n\eta} \sin n\xi =$$

$$= \begin{cases} 1/2 [\operatorname{arctg}(\operatorname{th} \eta \operatorname{tg} \xi) - \xi] & (0 \leq \xi < \pi/2) \\ 1/2 [\operatorname{arctg}(\operatorname{th} \eta \operatorname{tg} \xi) + \pi - \xi] & (\pi/2 < \xi \leq \pi) \end{cases}$$
(1.3)

$$f(\xi, \eta) = \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{n/2} \frac{1}{n} e^{-n\eta} \cos n\xi = \frac{1}{4} \{ 2\eta - \ln [2(\operatorname{ch} 2\eta + \cos 2\xi)] \}$$

($\eta \geq 0$)

Аналогичным образом при нагружении плоскости периодически приложенными силами S соответствующее решение определится по формулам

$$Gu^{(1)} = \frac{S}{2\pi} \left\{ \eta - \frac{1}{2} \left[3-\nu+(1+\nu)\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right] f \right\}$$

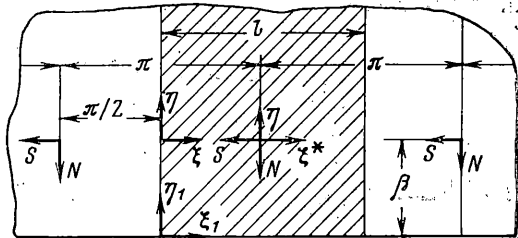
$$Gv^{(1)} = \frac{1+\nu}{4\pi} S \eta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$$

¹ В формулы (2.114) [3], эквивалентные зависимостям (1.2), для перемещения v и напряжения τ_{xy} внесены исправления.

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= -\frac{S}{2l} \left[3+\nu+(1+\nu)\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \sigma_y^{(1)} &= \frac{S}{2l} \left[1-\nu+(1+\nu)\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \tau_{xy}^{(1)} &= \frac{S}{2l} \left\{ 1 - \left[2+(1+\nu)\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \frac{\partial f}{\partial \eta} \right\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь функции $\varphi(\xi, \eta)$, $f(\xi, \eta)$ находятся согласно (1.3). Решение (1.4) отвечает обратно симметричной периодической задаче. В этом случае напряженное и деформированное состояние в полуплоскости нечетно относительно любой прямой, параллельной оси y и проходящей посередине между соседними силами S (фиг. 1).

Отметим также что приведенные здесь решения в рядах справедливы в полуплоскости $\eta > 0$. Зависимости же в замкнутом аналитическом виде, как легко убедиться, распространяются на всю плоскость.



Фиг. 2

2. Полуплоскость, нагруженная периодически силами, приложенными внутри полуплоскости нормально к ее прямой границе. Отнесем полуплоскость к безразмерным координатам ξ, η (см. фиг. 2). По-прежнему считаем, что ось ξ совпадает с прямой, проходящей через точки приложения сил, а ось η направлена внутрь полуплоскости. Начало координат примем посередине отрезка, соединяющего две соседние силы. Расстояние от границы полуплоскости до оси ξ обозначим через b или в безразмерной форме $\beta = \pi b / l$.

Остановимся вначале на построении решения от сил N в случае закрепления границы полуплоскости от перемещений

$$u|_{\eta=-\beta} = v|_{\eta=-\beta} = 0 \quad (2.1)$$

Для удобства ниже введем новые безразмерные координаты $\xi_1 = \pi x_1 / l$, $\eta_1 = \pi y_1 / l$, отсчитываемые от границы полуплоскости так, как показано на фиг. 2. При этом $\xi_1 = \xi$, $\eta_1 = \eta + \beta$.

Общее решение в одинарных тригонометрических рядах симметричной периодической задачи для неограниченной полуплоскости, невозрастающее по мере удаления от ее границы $\eta_1 = 0$, определяется формулами

$$\begin{aligned} Gu^{(2)} &= \frac{l}{2\pi} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n} \left[A_n + \left(n\eta_1 - \frac{2}{1+\nu} \right) B_n \right] e^{-n\eta_1} \sin n\xi_1 \\ Gu^{(2)} &= \\ &= \frac{l}{2\pi} \left\{ (1-\nu)\eta_1 A_0 + B_0 + \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n} \left[A_n + \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + n\eta_1 \right) B_n \right] e^{-n\eta_1} \cos n\xi_1 \right\} \\ \sigma_x^{(2)} &= \nu A_0 + \sum_{n=1,2,3,\dots} [A_n + (n\eta_1 - 2)B_n] e^{-n\eta_1} \cos n\xi_1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\sigma_y^{(2)} = A_0 - \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} (A_n + n\eta_1 B_n) e^{-n\eta_1} \cos n\xi_1$$

$$\tau_{xy}^{(2)} = - \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} [A_n + (n\eta_1 - 1)B_n] e^{-n\eta_1} \sin n\xi_1$$

Произвольные постоянные A_n и B_n ($n=0, 1, 2, \dots, \infty$) в этих зависимостях найдем из условия, чтобы для суммарного решения, получаемого суперпозицией решений (1.2), (2.2), по краю полуплоскости, $\eta_1=0$ ($\eta=-\beta$) выполнялись граничные условия (2.1).

Перемещения по линии $\eta=-\beta$, определяемые решением (1.2), принимают значения

$$Gu^{(1)}|_{\eta=-\beta} = \frac{(1+\nu)N}{4\pi} \beta \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{n/2} e^{-n\beta} \sin n\xi \quad (2.3)$$

$$Gv^{(1)}|_{\eta=-\beta} = \frac{N}{4\pi} \left\{ (1-\nu)\beta - \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{n/2} \frac{1}{n} [(1+\nu)n\beta + 3-\nu] e^{-n\beta} \cos n\xi \right\}$$

Принимая зависимости (2.3) с обратным знаком за граничные условия для решения (2.2), найдем произвольные постоянные

$$A_0 = -\frac{N}{2l}, \quad B_0 = -\frac{N}{2l}(1-\nu)\beta$$

$$A_n = (-1)^{n/2} \frac{N}{2l} \left[\frac{(1+\nu)^2}{3-\nu} n\beta + 2 \right] e^{-n\beta}$$

$$B_n = (-1)^{n/2} \frac{N}{2l} \left[\frac{2(1+\nu)^2}{3-\nu} n\beta + 1 + \nu \right] e^{-n\beta}$$

Принятое здесь значение постоянной A_0 соответствует затуханию нормальных напряжений при $\eta \rightarrow \infty$ для суммарного решения.

В итоге в соответствии с (2.2) получим искомые зависимости для второго решения

$$Gu^{(2)} = -\frac{(1+\nu)N}{4\pi} \left[\eta - \frac{2(1+\nu)}{3-\nu} \beta(\eta+\beta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \frac{\partial}{\partial \eta} \varphi^0(\xi, \eta+2\beta) \quad (2.4)$$

$$Gv^{(2)} = -\frac{N}{4\pi} \left\{ (1-\nu)(\eta+2\beta) - \left[3-\nu - (1+\nu)(\eta+2\beta) \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{2(1+\nu)^2}{3-\nu} \beta(\eta+\beta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] f^0 \right\}$$

$$\sigma_x^{(2)} = \frac{N}{2l} \left\{ \left[2\nu + (1+\nu) \left(\eta - \frac{4\nu}{3-\nu} \beta \right) \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{2(1+\nu)^2}{3-\nu} \beta(\eta+\beta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \frac{\partial f^0}{\partial \eta} - \nu \right\}$$

$$\sigma_y^{(2)} = \frac{N}{2l} \left\{ \left[2 - (1+\nu) \left(\eta + \frac{4}{3-\nu} \beta \right) \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{2(1+\nu)^2}{3-\nu} \beta(\eta+\beta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \frac{\partial f^0}{\partial \eta} - 1 \right\}$$

$$\tau_{xy}^{(2)} = \frac{N}{2l} \left\{ 1-\nu - (1+\nu) \left[\eta + \frac{2(1-\nu)}{3-\nu} \beta \right] \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{2(1+\nu)^2}{3-\nu} \beta (\eta+\beta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right\} \frac{\partial \varphi^0}{\partial \eta}$$

Здесь градус над функциями φ^0 и f^0 означает, что последние определяются по формулам (1.3) при замене аргумента η на $\eta+2\beta$.

Чтобы получить окончательные зависимости для перемещений и напряжений в замкнутом виде, отвечающие решению задачи для полуплоскости с закрепленной границей, следует сложить соотношения (1.2) с соответствующими выражениями (2.4).

Аналогичным образом определяется решение для полуплоскости, нагруженной силами N в случае свободной от закрепления ее границы $\eta=-\beta$. При этом постоянные A_n и B_n в решении (2.2) находятся из условия, что напряжения σ_y и τ_{xy} на границе $\eta_1=0$ должны равняться известным из решения (1.2) напряжениям на линии $\eta=-\beta$, взятым с обратным знаком. В результате получим

$$\begin{aligned} Gu^{(2)} &= \frac{N}{4\pi} \left[4 \frac{1-\nu}{1+\nu} + (3-\nu) \eta \frac{\partial}{\partial \eta} - 2(1+\nu) \beta (\eta+\beta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \varphi^0(\xi, \eta+2\beta) \\ Gu^{(2)} &= \frac{N}{4\pi} \left\{ (1-\nu) (\eta+\beta) - \left[\frac{5-2\nu+\nu^2}{1+\nu} - (3-\nu) (\eta+2\beta) \frac{\partial}{\partial \eta} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(1+\nu) \beta (\eta+\beta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] f^0(\xi, \eta+2\beta) \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\frac{2l}{N} \sigma_x^{(2)} = \nu - \left\{ 2(2-\nu) + [(3-\nu) \eta - 4\nu\beta] \frac{\partial}{\partial \eta} - 2(1+\nu) \beta (\eta+\beta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right\} \frac{\partial f^0}{\partial \eta}$$

$$\frac{2l}{N} \sigma_y^{(2)} = 1 - \left\{ 2 - [(3-\nu) \eta + 4\beta] \frac{\partial}{\partial \eta} + 2(1+\nu) \beta (\eta+\beta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right\} \frac{\partial f^0}{\partial \eta}$$

$$\frac{2l}{N} \tau_{xy}^{(2)} = \left\{ 1-\nu + [(3-\nu) \eta + 2(1-\nu) \beta] \frac{\partial}{\partial \eta} - 2(1+\nu) \beta (\eta+\beta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right\} \frac{\partial \varphi^0}{\partial \eta}$$

Искомые зависимости в замкнутом аналитическом виде для полуплоскости со свободной от закрепления границей найдем в результате сложения решений (1.2) и (2.5). Другой способ получения последнего решения приводится в [4, 5].

3. Полуплоскость, нагруженная периодическими силами, приложенными внутри полуплоскости по касательной к ее прямолинейной границе. Рассмотрим случай нагружения полуплоскости силами S , отстоящими от ее границы на расстояние β (фиг. 2).

При нахождении искомого решения будем исходить из зависимостей (1.4) для неограниченной плоскости, нагруженной силами S (фиг. 1). При удовлетворении граничных условий по краю $\eta=-\beta$ на это решение следует наложить общее решение обратной симметричной периодической задачи

$$Gu^{(2)} = \frac{l}{\pi} \left\{ A_0 \eta_1 + B_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n} \left[A_n + \left(n\eta_1 - \frac{2\beta}{1+\nu} \right) B_n \right] e^{-n\eta_1} \cos n\xi_1 \right\}$$

$$Gv^{(2)} = \frac{l}{2\pi} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n} \left[A_n + \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + n\eta_1 \right) B_n \right] e^{-n\eta_1} \sin n\xi_1$$

$$\sigma_x^{(2)} = - \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} [A_n + (n\eta_1 - 2)B_n] e^{-n\eta_1} \sin n\xi_1 \quad (3.1)$$

$$\sigma_y^{(2)} = \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} (A_n + n\eta_1 B_n) e^{-n\eta_1} \sin n\xi_1$$

$$\tau_{xy}^{(2)} = A_0 - \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} [A_n + (n\eta_1 - 1)B_n] e^{-n\eta_1} \cos n\xi_1$$

Определяя произвольные постоянные из соответствующих граничных условий аналогично тому, как это делалось выше, приходим к следующим зависимостям для перемещений и напряжений второго решения:

для случая границы, закрепленной от перемещений

$$\begin{aligned} Gu^{(2)} &= \frac{S}{4\pi} \left\{ -2(\eta+2\beta) + \left[3-\nu + (1+\nu)(\eta+2\beta) \frac{\partial}{\partial \eta} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2(1+\nu)^2}{3-\nu} \beta(\eta+\beta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] f^\circ(\xi, \eta+2\beta) \right\} \\ Gv^{(2)} &= -\frac{(1+\nu)S}{4\pi} \left[\eta + \frac{2(1+\nu)}{3-\nu} \beta(\eta+\beta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \frac{\partial}{\partial \eta} \varphi^\circ(\xi, \eta+2\beta) \\ \sigma_x^{(2)} &= \frac{S}{2l} \left[3+\nu + (1+\nu) \left(\eta + 2 \frac{3+\nu}{3-\nu} \beta \right) \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{2(1+\nu)^2}{3-\nu} \beta(\eta+\beta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \frac{\partial \varphi_1^\circ}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(2)} &= -\frac{S}{2l} \left[1-\nu + (1+\nu) \left(\eta + 2 \frac{1-\nu}{3+\nu} \beta \right) \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{2(1+\nu)^2}{3-\nu} \beta(\eta+\beta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial \eta} \\ \tau_{xy}^{(2)} &= \frac{S}{2l} \left\{ \left[2 + (1+\nu) \left(\eta + \frac{4}{3-\nu} \beta \right) \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{2(1+\nu)^2}{3-\nu} \beta(\eta+\beta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \frac{\partial f^\circ}{\partial \eta} - 1 \right\} \end{aligned}$$

для случая свободной от закрепления границы

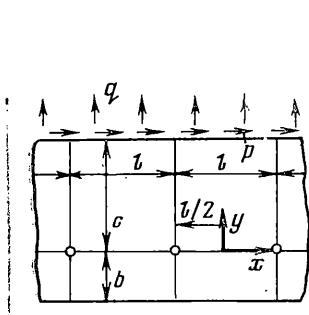
$$\begin{aligned} Gu^{(2)} &= \frac{S}{4\pi} \left\{ 2\eta - \left[\frac{5-2\nu+\nu^2}{1+\nu} + (3-\nu)(\eta+2\beta) \frac{\partial}{\partial \eta} + 2(1+\nu)\beta(\eta+\beta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] f^\circ \right\} \\ Gv^{(2)} &= -\frac{S}{4\pi} \left[\frac{4(1-\nu)}{1+\nu} - (3-\nu)\eta \frac{\partial}{\partial \eta} - 2(1+\nu)\beta(\eta+\beta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \varphi^\circ \\ \sigma_x^{(2)} &= -\frac{S}{2l} \left\{ 5-\nu + [(3-\nu)\eta + 2(3+\nu)\beta] \frac{\partial}{\partial \eta} + 2(1+\nu)\beta(\eta+\beta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right\} \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial \eta} \\ \sigma_y^{(2)} &= -\frac{S}{2l} \left\{ 1-\nu - [(3-\nu)\eta + 2(1-\nu)\beta] \frac{\partial}{\partial \eta} - 2(1+\nu)\beta(\eta+\beta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right\} \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\frac{2l}{S} \tau_{xy} = 1 - \left\{ 2 + [(3-\nu)\eta + 4\beta] \frac{\partial}{\partial \eta} + 2(1+\nu)\beta(\eta+\beta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right\} \frac{\partial f^\circ}{\partial \eta}$$

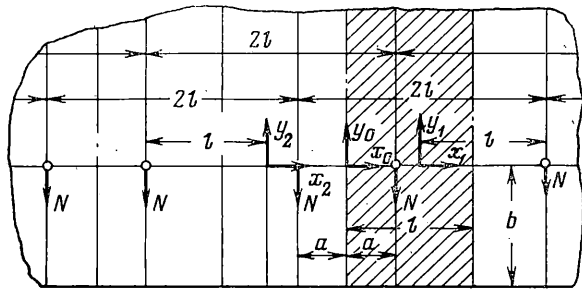
Искомые решения для полуплоскости, нагруженной силами S , найдем сложением зависимостей (1.4) и (3.2) (в случае закрепленной границы) или зависимостей (1.4) и (3.3) (в случае границы, свободной от закрепления).

Приведенным периодическим решениям можно дать иную интерпретацию. Рассмотрим неограниченную полосу ширины $h=b+c$, точно закрепленную в точках, расположенных на одинаковом расстоянии l одна от другой и на расстоянии b от ее края (фиг. 3). Будем считать, что к продольному краю полосы $y=c$, где $c \gg l$ (практически можно считать $c > l$) приложена равномерно распределенная нагрузка или нормальная (интенсивности q), или касательная (интенсивности p), а край пластины $y = -b$ свободен от закрепления. При этом перемещения и напряжения в пластине определяются формулами (1.2), (2.5) в случае нагружения пластины нагрузкой $q (N=ql)$ и формулами (1.4), (3.3) при нагружении пластины нагрузкой $p (S=pl)$.

Предположим далее, что край полосы $y = -b$ свободно поступательно смещается (при $y = -b$ и $u=v=const$). Последнее можно представить, если допустить, что



Фиг. 3



Фиг. 4

по этому краю расположено жесткое на растяжение и изгиб ребро. В такой точно закрепленной пластине напряженное и деформированное состояние может быть легко определено с использованием зависимостей (1.2), (2.4) при нагружении полосы по краю $y=c$ нормальной нагрузкой $q=const$ или посредством формул (1.4), (3.2) при нагружении касательной нагрузкой $p=const$.

Сделаем еще одно замечание. При рассмотренном периодическом нагружении полуплоскости, например силами N , последняя в силу симметрии задачи разбивается на полосы ширины l , в каждой из которых возникает одно и то же распределение перемещений и напряжений. Одна из них на фиг. 2 показана штриховкой. При этом сила N оказывается приложенной посредине полосы (в точке $\xi=\pi/2$, $\eta=0$).

Примем, что на полуплоскость по линии $\eta=0$ действует два ряда сил N , причем в каждом из них расстояние между силами равняется $2l$, и один ряд сил смещен по отношению к другому на произвольное расстояние $2a$ (фиг. 4). В этом случае в полосах шириной l каждая из-за симметрии задачи также возникает одно и то же напряженное и деформированное состояние. Одна из таких полос заштрихована на фиг. 4, причем сила N оказывается приложенной на расстоянии a от края полосы. Соответствующее решение получается суперпозицией решений от каждого из рядов сил. Отнесем их соответственно к системам координат x_1, y_1 и x_2, y_2 и введем систему координат x_0, y_0 , отсчитываемую от края заштрихованной полосы. Согласно фиг. 4 получим $x_1=x_0-l+a, x_2=x_0+l-a, y_1=y_2=y_0$. Умножая эти зависимости на множитель $\pi/2l$, представим их в безразмерной форме $\xi_1=\xi_0+\alpha-\pi/2, \xi_2=\xi_0-\alpha+\pi/2, \eta_1=\eta_2=\eta_0$.

Искомые зависимости для перемещений и напряжений в полуплоскости определяются сложением двух ранее приведенных периодических решений от сил N , взятых соответственно от аргументов $\xi_0+\alpha-\pi/2, \eta$ и $\xi_0-\alpha+\pi/2, \eta$. Рассматривая последнее решение как функцию влияния (функцию Грина) от координат α, β ,

¹ В данном случае в решениях (2.2), (3.1) следует соответственно принять $A_0=N/2l, A_0=S/2l$, что отвечает постоянному растяжению или сдвигу при $\eta \rightarrow \infty$ для суммарного решения. Остальные постоянные в указанных решениях не изменяются.

можно определить (в общем случае в квадратурах) напряженное и деформированное состояние полуплоскости, периодически нагруженной с интервалом l произвольными нагрузками, действующими в направлении η и распределенными по площади.

Аналогичные рассуждения можно провести и в отношении нагрузки по оси ξ .

4. Одна сосредоточенная сила внутри полуплоскости. Подобно тому, как это было сделано в [3], определим поведение полученных решений вблизи точки приложения сосредоточенного воздействия. Последняя является особой точкой, поскольку в ее окрестности перемещения и напряжения неограниченно возрастают.

Перенесем начало координат в особую точку (фиг. 2). В связи с этим в формулах (1.3) сделаем замену переменных $\xi = \xi^* + \pi/2$, $\eta = \eta^*$, где координаты ξ^* , η^* отсчитываются от особой точки. Разложим далее тригонометрические и гиперболические функции в зависимостях (1.3) в степенные ряды по ξ^* , η^* . При этом ограничимся в них лишь первыми членами разложений, поскольку вблизи особой точки $\xi^* \ll 1$, $\eta^* \ll 1$.

В результате выражения (1.3) упростятся и примут вид

$$f^* = f(\xi^*, \eta) = -1/4 \ln[4(\xi^{*2} + \eta^2)] \quad (4.1)$$

$$\varphi^* = \varphi(\xi^*, \eta) = \begin{cases} -1/2 [\operatorname{arctg}(\eta/\xi^*) - \pi/2] & (\xi^* > 0) \\ -1/2 [\operatorname{arctg}(\eta/\xi^*) + \pi/2] & (\xi^* < 0) \end{cases}$$

Здесь звездочка у координаты η опущена.

Аналогичным образом, принимая во внимание условие $\beta \ll 1$, также справедливое вблизи особой точки, придем к формулам для $f^* = f(\xi^*, \eta + 2\beta)$ и $\varphi^* = \varphi(\xi^*, \eta + 2\beta)$. Эти выражения отличаются от зависимостей (4.1) лишь заменой аргумента η в последних на $\eta + 2\beta$.

Внесем в приведенные выше решения периодических задач для полуплоскости вместо функций f , φ , f^0 , φ^0 соответственно функции f^* , φ^* , f^{*0} , φ^{*0} и опустим в решениях малые члены, не содержащие этих функций.

В итоге придем к более простым зависимостям, представляющим собой распределение перемещений и напряжений вблизи особой точки в четырех ранее рассмотренных случаях. Эти зависимости имеют самостоятельное значение. Они определяются точные решения плоской задачи теории упругости для полуплоскости, нагруженной одной силой, приложенной внутри нее и направленной по нормали (сила N) или по касательной (сила S) к границе полуплоскости. При этом граница $\eta = -\beta$ по-прежнему оказывается или полностью закрепленной от перемещений, или свободной от закрепления в соответствии с выбранным решением. Нетрудно убедиться, что решения, относящиеся к полуплоскости со свободной границей, в частном случае при $\beta = 0$ переходят в известные решения Фламана — Буссинеска от сосредоточенных сил, приложенных на ее границе.

В заключение для удобства использования найденных решений приведем формулы для производных по η от функций (1.3) и (4.1)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\sin 2\xi}{2(\operatorname{ch} 2\eta + \cos 2\xi)}, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\operatorname{sh} 2\eta}{\operatorname{ch} 2\eta + \cos 2\xi} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = \frac{\sin 2\xi \operatorname{sh} 2\eta}{(\operatorname{ch} 2\eta + \cos 2\xi)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \frac{1 + \cos 2\xi \operatorname{ch} 2\eta}{(\operatorname{ch} 2\eta + \cos 2\xi)^2}$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} = \frac{2 \sin 2\xi (\operatorname{ch}^2 2\eta - \operatorname{ch} 2\eta \cos 2\xi - 2)}{(\operatorname{ch} 2\eta + \cos 2\xi)^3}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} = \frac{2 \operatorname{sh} 2\eta (\cos 2\xi \operatorname{ch} 2\eta + \sin^2 2\xi + 1)}{(\operatorname{ch} 2\eta + \cos 2\xi)^3}$$

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial \eta} = -\frac{\xi^*}{2(\xi^{*2} + \eta^2)}, \quad \frac{\partial f^*}{\partial \eta} = -\frac{\eta}{2(\xi^{*2} + \eta^2)}, \quad \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial \eta^2} = \frac{\xi^* \eta}{(\xi^{*2} + \eta^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f^*}{\partial \eta^2} = \frac{\eta^2 - \xi^{*2}}{2(\xi^{*2} + \eta^2)^2}, \quad \frac{\partial^3 \varphi^*}{\partial \eta^3} = \frac{\xi^* (\xi^{*2} - 3\eta^2)}{(\xi^{*2} + \eta^2)^3}, \quad \frac{\partial^3 f^*}{\partial \eta^3} = \frac{\eta (3\xi^{*2} - \eta^2)}{(\xi^{*2} + \eta^2)^3}$$

Поступила 11 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E. Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im Innern beanspruchter Halbscheibe. Z. angew. Math. und Mech. 1932, Bd 12, H. 6.
2. Лурье А. И. Теория упругости. М., «Наука», 1970.
3. Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. М., Стройиздат, 1975.
4. Гутман С. Г. Расчет блоков бетонного массива под действием натяжения связующих их тяжей. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехники, Л., 1948, т. 37
5. Sadowsky M. Zweidimensionale Probleme der Elastizitätstheorie. Z. angew. Math und Mech., 1928, Bd 8, H. 2.