

КРУЧЕНИЕ ПОЛОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА,
СЦЕПЛЕННОГО С ДВУХСЛОЙНОЙ УПРУГОЙ СРЕДОЙ

Д. В. ГРИЛИЦКИЙ, А. П. ПОДДУБНЯК

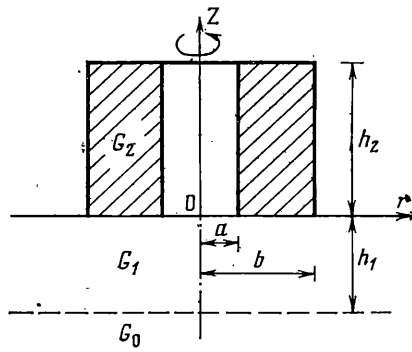
(Львов)

Задача о совместном кручении сплошного кругового цилиндра и полупространства впервые исследована в [1-3]. В дальнейшем эта задача была рассмотрена для случая неполного спая двух тел [4-6], для тел с переменными модулями сдвига [7, 8], а также для упругих систем, состоящих из цилиндра и слоя [9-11], цилиндра и многослойного основания [12].

Совместному кручению полого цилиндра и полупространства при полном сцеплении тел, а также при наличии в области сочленения двух щелей посвящены работы [13, 14].

Ниже исследуется упругое кручение полого кругового цилиндра, прикрепленного нижним торцом к двухслойной полубесконечной среде. С помощью интегрального преобразования Ханкеля, метода Фурье и разложений Дини задача сведена к бесконечной квазивполне регулярной системе алгебраических уравнений.

1. Пусть упругая среда, состоящая из слоя $(-h_1 \leq z \leq 0)$ и полупространства $(-\infty < z \leq -h_1)$, скручивается упругим полым круговым цилиндром



Фиг. 1

$(a \leq r \leq b, 0 \leq z \leq h_2)$ при условии, что материалы элементов изотропны и различны (фиг. 1).

Задача состоит в определении решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$u_\theta = u_\theta(r, z) = \begin{cases} u_0(r, z) & (-\infty < z \leq -h_1) \\ u_1(r, z) & (-h_1 \leq z \leq 0) \\ u_2(r, z) & (0 \leq z \leq h_2) \end{cases}$$

при следующих условиях:

$$\lim u_j(r, z) \rightarrow 0 \text{ при } \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty \quad (j=0, 1)$$

$$u_0 = u_1, \quad \tau_{\theta z}^{(0)} = \tau_{\theta z}^{(1)}, \quad z = -h_1 \quad (r \geq 0) \quad (1.2)$$

$$u_1 = u_2, \quad \tau_{\theta z}^{(1)} = \tau_{\theta z}^{(2)}, \quad z = 0 \quad (a \leq r \leq b) \quad (1.3)$$

$$\tau_{\theta z}^{(1)} = 0, \quad z = 0 \quad (0 \leq r < a, \quad b < r < \infty)$$

$$\tau_{r\theta}^{(2)} = G_2 f_1(z/b), \quad r = a; \quad \tau_{r\theta}^{(2)} = G_2 f_2(z/b), \quad r = b \quad (0 < z < h_2) \quad (1.4)$$

$$u_2 = bU(r/b), \quad z = h_2 \quad (a < r < b) \quad (1.5)$$

$$\tau_{\theta z}^{(2)} = G_2 T(r/b), \quad z = h_2 \quad (a < r < b) \quad (1.6)$$

Здесь u_j — тангенциальное смещение, $\tau_{\theta z}^{(j)}$, $\tau_{r\theta}^{(j)}$ — касательные напряжения, G_j — модуль сдвига

$$\tau_{\theta z}^{(j)} = G_j \frac{\partial u_j}{\partial z}, \quad \tau_{r\theta}^{(j)} = G_j r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_j}{r} \right) \quad (1.7)$$

Предполагается, что функции f_1, f_2, U, T удовлетворяют условиям Дирихле. Условие (1.5) соответствует задаче 1, а условие (1.6) — задаче 2.

Используя метод Фурье [15, 16] и интегральное преобразование Ханкеля [17, 18], общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2), запишем в виде

$$u_0 = b \int_0^{\infty} \eta^{-1} e^{\eta \xi_1} \psi(\eta) J_1(\eta \rho) d\eta, \quad \xi_1 = \xi + H_1 \quad (1.8)$$

$$u_1 = b \int_0^{\infty} \eta^{-1} \left(\frac{G_1 + G_0}{2G_1} e^{\eta \xi_1} + \frac{G_1 - G_0}{2G_1} e^{-\eta \xi_1} \right) \psi(\eta) J_1(\eta \rho) d\eta$$

$$u_2 = b \left\{ A_0 \rho \xi + B_0 \rho + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k I_1(\chi_k \rho) + B_k K_1(\chi_k \rho)] \times \right. \\ \left. \times \sin \chi_k (H_2 - \xi) + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \operatorname{ch} \lambda_k \xi + D_k \operatorname{sh} \lambda_k \xi) W_1(\lambda_k \rho) \right\}$$

где $\{\lambda_k\}$ — возрастающая последовательность положительных нулей функции $W_2(\lambda_k \varepsilon)$

$$W_n(\lambda_k x) = J_n(\lambda_k x) / J_2(\lambda_k) - N_n(\lambda_k x) / N_2(\lambda_k)$$

$$\rho = \frac{r}{b}, \quad \xi = \frac{z}{b}, \quad H_j = \frac{h_j}{b} \quad (j=1,2), \quad \varepsilon = \frac{a}{b}, \quad \chi_k = \frac{k\pi}{H_2} \quad (k=1,2,\dots)$$

$J_n(x)$, $N_n(x)$, $I_n(x)$, $K_n(x)$ — цилиндрические функции; коэффициенты $A_0, B_0, A_k, B_k, C_k, D_k$ и функция ψ подлежат определению.

2. Удовлетворяя граничным условиям (1.3) — (1.6), решение задачи о кручении полого цилиндра, спаянного с упругим основанием, для задач 1 и 2 представим соответственно в виде

$$u_2 = b \left\{ U_0 \rho \frac{\xi}{H_2} + \left(1 - \frac{\xi}{H_2} \right) \rho F_0^{(1)} + R(\rho, \xi) + \right. \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda_h H_2} \left[U_h \operatorname{sh} \lambda_h \xi + F_h^{(1)} \operatorname{sh} \lambda_h (H_2 - \xi) \right] W_1(\lambda_h \rho) \Big\} \\
u_2 = & b \left\{ \rho \xi \left[\frac{N_0^{(2)}}{H_2} - \int_0^{H_2} (H_2 - \xi) f_3(\xi) d\xi \right] + \rho F_0^{(2)} \right\} + R(\rho, \xi) + \\
& + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_h H_2} \left[T_h \operatorname{sh} \lambda_h \xi + F_h^{(2)} \operatorname{ch} \lambda_h (H_2 - \xi) - \right. \\
& \left. - \frac{\operatorname{sh} \lambda_h \xi}{\operatorname{sh} \lambda_h H_2} \int_0^{H_2} f_0(\xi) \operatorname{sh} \lambda_h \xi d\xi \right] W_1(\lambda_h \rho) \Big\} \\
R(\rho, \xi) = & \sum_{h=1}^{\infty} [d_{1,h} V_1(\rho, \varepsilon) - d_{2,h} V_1(\rho, 1)] \sin \chi_h (H_2 - \xi) \\
d_{j,h} = & \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{h+1}}{k V_2(1, \varepsilon)} \int_0^{H_2} f_j(\xi) \sin \chi_h \xi d\xi, \quad F_m^{(j)} = \Omega_m^{(j)} - (1 - \delta_{j2} \delta_{m0}) N_m^{(j)} \\
V_j(x, y) = & I_j(\chi_h x) K_2(\chi_h y) - K_j(\chi_h x) I_2(\chi_h y) \quad (j=1,2) \\
\Omega_0^{(1)} = & U_0 + H_2 \int_0^{H_2} (H_2 - \xi) f_3(\xi) d\xi, \quad \Omega_0^{(2)} = B_0 \\
\Omega_h^{(1)} = & \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_h H_2} \left[U_h + \int_0^{H_2} f_0(\xi) \operatorname{sh} \lambda_h (H_2 - \xi) d\xi \right] \\
\Omega_h^{(2)} = & \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda_h H_2} \left[T_h + \int_0^{H_2} f_0(\xi) \operatorname{ch} \lambda_h (H_2 - \xi) d\xi \right] \\
N_0^{(j)} = & H_2 Q_0 / \delta, \quad N_h^{(j)} = L_2^{(j)}(\lambda_h H_2) (Q_h / (\lambda_h \delta)) \quad (h=1,2,\dots) \\
L_2^{(1)}(x) = & \operatorname{th} x, \quad L_2^{(2)}(x) = \operatorname{cth} x \quad (x = \lambda_h H_2), \quad \delta = G_2 / G_1 \\
f_0(\xi) = & \frac{1}{\lambda_h \omega_h} [W_1(\lambda_h) f_1(\xi) - \varepsilon W_1(\lambda_h \varepsilon) f_2(\xi)], \quad f_3(\xi) = \frac{4}{(1 - \varepsilon^4) H_2} [f_1(\xi) - \varepsilon^4 f_2(\xi)] \\
\omega_h = & \frac{1}{2} \{ [W_1(\lambda_h)]^2 - [\varepsilon W_1(\lambda_h \varepsilon)]^2 \} \quad (m=0,1,2,\dots)
\end{aligned}$$

Здесь U_m, T_h, Q_m — коэффициенты разложений Дини [19] по $W_1(\lambda_h \rho)$ ($\varepsilon < \rho < 1$) соответственно функций $U(\rho), T(\rho)$ и $\tau(\rho)$; $\tau(\rho)$ — безразмерное касательное контактное напряжение, определяемое согласно формуле $(H(x) - \text{функция Хевисайда})$

$$\tau(\rho) = \frac{1}{G_1} \tau_{\theta z}^{(1)} \Big|_{z=0} = H(1-\rho) H(\rho-\varepsilon) \left[Q_0 \rho + \sum_{h=1}^{\infty} Q_h W_1(\lambda_h \rho) \right] = \quad (2.2)$$

$$=H(1-\rho)H(\rho-\varepsilon) \int_0^{\infty} \left[\frac{G_1+G_0}{2G_1} e^{\eta H_1} - \frac{G_1-G_0}{2G_1} e^{-\eta H_1} \right] \psi(\eta) J_1(\eta\rho) d\eta \quad (\rho \geq 0)$$

Удовлетворяя первому условию в (1.3), задачу сведем к интегральному уравнению первого рода относительно контактного напряжения

$$\int_0^1 \xi \tau(\xi) K(\xi, \rho) d\xi = F(\rho) \quad (\varepsilon < \rho < 1) \quad (2.3)$$

$$F(\rho) = F_0\rho + \sum_{k=1}^{\infty} F_k W_1(\lambda_k \rho), \quad F_m = \{F_m^{(j)}\} \quad (j=1,2; m=0,1,2,\dots)$$

$$K(\xi, \rho) = \int_0^{\infty} L(\eta H_1) J_1(\eta \xi) J_1(\eta \rho) d\eta$$

$$L(x) = (1 + \beta e^{-2x}) / (1 - \beta e^{-2x}) \quad (x = \eta H_1), \quad \beta = (G_1 - G_0) / (G_1 + G_0)$$

Поскольку правая часть в (2.3) представляется разложением Дини по функциям $W_1(\lambda_k \rho)$, то с помощью таких же разложений для $\tau(\rho)$ и $J_1(\eta \rho)$ интегральное уравнение (2.3) можно привести к следующей бесконечной системе алгебраических уравнений:

$$\alpha_k Q_k + \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{km} Q_m = \delta_k \quad (k=0,1,2,\dots) \quad (2.4)$$

$$\alpha_0 = (1 - \varepsilon^4) H_2 / (4\delta), \quad \alpha_m = \omega_m L_2(\lambda_m H_2) / (\lambda_m \delta)$$

$$\delta_0 = 1/4 (1 - \varepsilon^4) \Omega_0, \quad \delta_m = \omega_m \Omega_m \quad (m=1, 2, \dots)$$

$$\gamma_{00} = \int_{\varepsilon}^1 x^2 dx \int_{\varepsilon}^1 \xi^2 K(\xi, x) d\xi, \quad \gamma_{0m} = \gamma_{m0} = \int_{\varepsilon}^1 x W_1(\lambda_m x) dx \int_{\varepsilon}^1 \xi^2 K(\xi, x) d\xi$$

$$\gamma_{nm} = \int_{\varepsilon}^1 x W_1(\lambda_n x) dx \int_{\varepsilon}^1 \xi W_1(\lambda_m \xi) K(\xi, x) d\xi \quad (n=1,2,\dots)$$

$$L_2(y), \Omega_k = \{L_2^{(j)}(y); \Omega_k^{(j)}\}, \quad y = \lambda_m H_2 \quad (j=1,2)$$

В случае задачи 2 первое уравнение системы (2.4) служит для определения постоянной $F_0^{(2)} = \Omega_0^{(2)}$. При этом используется условие равновесия полого цилиндра

$$M + M_1 - M_2 - 1/2 \pi G_1 (1 - \varepsilon^4) b^3 Q_0 = 0$$

$$M = 2\pi b^3 \int_{\varepsilon}^1 \rho^2 \tau_{\theta z}^{(2)}|_{\xi=H_2} d\rho, \quad M_j = 2\pi b^3 c_j G_2 \int_0^{H_2} f_j(\xi) d\xi \quad (j=1,2), \quad c_1 = 1, \quad c_2 = \varepsilon^2$$

где M , M_1 и M_2 — величины крутящих моментов усилий, приложенных соответственно к свободному торцу, к внешней и внутренней поверхностям цилиндра.

Ядро интегрального уравнения (2.3), а затем и коэффициенты алгебраической системы (2.4) можно вычислить, применяя метод контурного интегрирования [19].

Выполнив необходимые преобразования, получим

$$\begin{aligned}
 \gamma_{00} &= \gamma_{00}^{\circ} + \Phi_1(1, 1) - 2\varepsilon^2 \Phi_1(\varepsilon, 1) + \varepsilon^4 \Phi_1(\varepsilon, \varepsilon) \\
 \gamma_{m0} &= \gamma_{0m} = \gamma_{m0}^{\circ} - W_1(\lambda_m) [\Phi_2(1, 1) - \varepsilon^2 \Phi_2(\varepsilon, 1)] + \\
 &\quad + \varepsilon W_1(\lambda_m \varepsilon) [\Phi_2(\varepsilon, 1) - \varepsilon^2 \Phi_2(\varepsilon, \varepsilon)] \\
 \gamma_{mn} &= \gamma_{nm}^{\circ} + W_1(\lambda_m) [W_1(\lambda_n) \Phi_3(1, 1) - \varepsilon W_1(\lambda_n \varepsilon) \Phi_3(\varepsilon, 1)] - \\
 &\quad - \varepsilon W_1(\lambda_m \varepsilon) [W_1(\lambda_n) \Phi_3(\varepsilon, 1) - \varepsilon W_1(\lambda_n \varepsilon) \Phi_3(\varepsilon, \varepsilon)] \\
 \gamma_{00}^{\circ} &= -\frac{1}{8H_1} \delta_{s1} \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \varepsilon^4 + \frac{7}{6} \varepsilon^6 \right) - \frac{1-\varepsilon^4}{H_1} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{-2} \cos 2\varphi_k + \\
 &\quad + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \eta^{-1} L_3(\eta H_1) \left[\frac{1-\varepsilon^4}{4\eta} - I_2(\eta) K_2(\eta) + \right. \\
 &\quad \left. + 2\varepsilon^2 I_2(\eta \varepsilon) K_2(\eta) - \varepsilon^4 I_2(\eta \varepsilon) K_2(\eta \varepsilon) \right] d\eta \\
 \gamma_{m0}^{\circ} &= -\frac{1-\varepsilon^4}{4H_1 \lambda_m^2} W_1(\lambda_m) \delta_{s1} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{L_3(\eta H_1)}{\eta^2 + \lambda_m^2} \times \\
 &\quad \times \{W_1(\lambda_m) K_2(\eta) [I_2(\eta) - \varepsilon^2 I_2(\varepsilon \eta)] - \varepsilon W_1(\lambda_m \varepsilon) I_2(\eta \varepsilon) [K_2(\eta) - \varepsilon^2 K_2(\eta \varepsilon)]\} d\eta \\
 \gamma_{nm}^{\circ} &= \delta_{nm} \Omega_n \left[\frac{L_2(\lambda_n H_2)}{\delta \lambda_n} + \frac{\delta_{s1}}{H_1 \lambda_n^2} + \frac{4}{H_1} \sum_{k=1}^{\infty} q_k^{-1} \cos \theta_k + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{L_3(\eta H_1) d\eta}{\eta^2 + \lambda_n^2} \right] - \\
 &\quad - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\eta^2 L_3(\eta H_1)}{(\eta^2 + \lambda_n^2)(\eta^2 + \lambda_m^2)} \{W_1(\lambda_m) K_2(\eta) [W_1(\lambda_n) I_2(\eta) - \varepsilon W_1(\lambda_n \varepsilon) I_2(\eta \varepsilon)] + \\
 &\quad + \varepsilon W_1(\lambda_m \varepsilon) I_2(\eta \varepsilon) [W_1(\lambda_n) K_2(\eta) - \varepsilon W_1(\lambda_n \varepsilon) K_2(\eta \varepsilon)]\} d\eta \\
 \Phi_1(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{-2} \Lambda(x, y, 2\varphi_k), \quad \Phi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k^{-1} \Lambda(x, y, \theta_k) \\
 \Phi_3(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k^{-1} \Lambda(x, y, \psi_k), \quad \rho_k e^{i\varphi_k} = w_k \\
 q_k e^{i\theta_k} &= \lambda_m^2 - w_k^2, \quad p_k e^{i\psi_k} = w_k^{-2} (\lambda_n^2 - w_k^2) (\lambda_m^2 - w_k^2) \\
 \Lambda(x, y, \varphi) &= 2\pi [s(x, y) \sin \varphi - c(x, y) \cos \varphi] / H_1 \\
 \left\| \begin{array}{l} s(x, y) \\ c(x, y) \end{array} \right\| &= \bar{u}_2(\rho_k x) \left\| \begin{array}{l} \bar{f}_2(\rho_k y) \\ \bar{g}_2(\rho_k y) \end{array} \right\| \mp \bar{v}_2(\rho_k x) \left\| \begin{array}{l} \bar{g}_2(\rho_k y) \\ \bar{f}_2(\rho_k y) \end{array} \right\| \\
 \bar{u}_n(\rho_k x) \pm i\bar{v}_n(\rho_k x) &= J_n(x \rho_k e^{\pm i\varphi_k}), \quad \bar{f}_n(\rho_k x) \pm i\bar{g}_n(\rho_k x) = H_n^{(1,2)}(x \rho_k e^{\pm i\varphi_k})
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

$$H_n^{(1,2)}(x) = J_n(x) \pm iN_n(x) \quad (k, m, n=1, 2, \dots)$$

$$L_3(\eta H_1) = G_0 G_1 [(G_0 \cos \eta H_1)^2 + (G_1 \sin \eta H_1)^2]^{-1}$$

В формулах (2.5) $\{w_k\}$ — последовательность полюсов функции $L(wH_1)$ в первом квадранте комплексной области $w = \eta + i\nu$ ($w_k = L\eta \beta / 2H_1$), δ_{s1} — символ Кронекера, причем $s=1$ для $\beta=1$ ($G_0=0$). Отметим, что при $|\beta|=1$ суммы в (2.5) необходимо умножить на $1/2$.

Исследование сходимости рядов и интегралов в (2.5) позволило выделить асимптотики для коэффициентов ν_{km} и свободных членов δ_k при $k \rightarrow \infty$ и установить квазивполне регулярность бесконечной алгебраической системы (2.4). Поэтому эту систему можно решать приближенными методами.

Определив Q_m , найдем $\tau(\rho)$, $N_m^{(j)}$, $F_m^{(j)}$ ($j=1, 2$; $m=0, 1, 2, \dots$). Смещения и напряжения в цилиндре выражаются по формулам (1.7) и (2.1). С другой стороны, применяя теорему обращения преобразования Ханкеля [17], из соотношения (2.2) найдем $\psi(\eta)$, а по формулам (1.8) определим напряженно-деформированное состояние двухслойной упругой среды. Так, например, для смещений будем иметь выражение

$$u_j = b \int_{\varepsilon}^1 \xi \tau(\xi) \int_0^{\infty} L_j(\eta, \xi) J_1(\eta \xi) J_1(\eta \rho) d\eta d\xi \quad (j=0, 1)$$

$$L_0(\eta, \xi) = \frac{2\beta_1 e^{\eta \xi}}{1 - \beta e^{-2\eta H_1}}, \quad L_1(\eta, \xi) = e^{\eta \xi} L(\xi + H_1), \quad \beta_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_0}$$

Интегралы, входящие в u_j , вычисляются тем же способом, что и коэффициенты γ_{km} ($k, m=0, 1, 2, \dots$). Окончательные выражения для u_j , $\tau_{\theta z}^{(j)}$, $\tau_{r\theta}^{(j)}$ ($j=0, 1$) здесь не выписаны ввиду их громоздкости. Отметим, что эти выражения будут содержать быстросходящиеся бесконечные ряды и несобственные интегралы. Слабая сходимость отмечается лишь на краях области контакта при $\xi=0$, $\rho=1$ и $\rho=\varepsilon$; в частности, $\tau_{\theta z}(a, 0) = \tau_{\theta z}(b, 0) = \infty$, т. е. контактное напряжение $\tau(\rho)$ при стремлении $\rho \rightarrow 1$ или $\rho \rightarrow \varepsilon$ имеет особенности.

3. Вопрос о характере поведения касательного напряжения $\tau(\rho)$ при подходе к угловым линиям площадки контакта цилиндра с основанием можно рассматривать на основании сингулярных задач теории упругости [20-23] или же используя некоторые сведения из теорий сингулярных уравнений [24, 25].

Остановимся на втором способе. Интегральное уравнение (2.3) запишем в виде

$$\int_{\varepsilon}^1 \xi \tau(\xi) M(\xi, \rho) d\xi = \Omega(\rho) \quad (\varepsilon < \rho < 1) \quad (3.4)$$

$$M(\xi, \rho) = K(\xi, \rho) + \delta^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \omega_k)^{-1} L_2(\lambda_k H_2) W_1(\lambda_k \xi) W_1(\lambda_k \rho)$$

$$\Omega(\rho) = \Omega_0^0 \rho + \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k W_1(\lambda_k \rho)$$

где $\Omega_0^0 = \Omega_0^{(1)} - \delta^{-1} H_2 Q_0$ в случае задачи 1 и $\Omega_0^0 = \Omega_0^{(2)}$ в случае задачи 2.

Преобразуем ряд для $M(\xi, \rho)$, используя метод контурного интегрирования [19] и некоторые результаты из [26]

$$M(\xi, \rho) = \int_0^{\infty} [L(\eta H_1) + \delta^{-1} L_2(\eta H_2)] J_1(\eta \xi) J_1(\eta \rho) d\eta + \\ + 2(\delta H_2)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \{ I_2(\nu_n \varepsilon) K_1(\nu_n \xi) [I_2(\nu_n) K_1(\nu_n \rho) + K_2(\nu_n) I_1(\nu_n \rho)] + \\ + K_2(\nu_n) I_1(\nu_n \xi) [I_2(\nu_n \varepsilon) K_1(\nu_n \rho) + \\ + K_2(\nu_n \varepsilon) I_1(\nu_n \rho)] \} [I_2(\nu_n) K_2(\nu_n \varepsilon) - K_2(\nu_n) I_2(\nu_n \varepsilon)]^{-1}$$

где для задачи 1 и 2 будем иметь соответственно $\nu_n = (n-1/2)\pi/H_2$, $\nu_n = n\pi/H_2$.

Исследовав свойства ядра $M(\xi, \rho)$ при всех $H_1, H_2 \in (0, \infty)$ и выполнив некоторые преобразования, интегральное уравнение (3.1) после дифференцирования по ρ приведем к виду

$$(1+\delta) \int_{\varepsilon}^1 \frac{\tau(\xi) d\xi}{\xi-\rho} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{\tau(\xi) d\xi}{2-\xi-\rho} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{\tau(\xi) d\xi}{2\varepsilon-\xi-\rho} + \\ + \int_{\varepsilon}^1 \tau(\xi) k(\xi, \rho) d\xi = \delta \pi \Omega'(\rho) \quad (\varepsilon < \rho < 1) \quad (3.2)$$

где $k(\xi, \rho)$ — ядро Фредгольма.

Предположим, что функция τ имеет интегрируемые особенности при $\rho=1$ и $\rho=\varepsilon$ и определяется формулой

$$\tau(\rho) = (1-\rho)^{-p} (\rho-\varepsilon)^{-q} \tau_0(\rho) \quad (\varepsilon < \rho < 1, 0 \leq p, q < 1) \quad (3.3)$$

где $\tau_0(\rho)$ удовлетворяет условию Гельдера на $[\varepsilon, 1]$, а $(1-\rho)^p (\rho-\varepsilon)^q$ — любая определенно выбранная ветвь, непрерывно изменяющаяся на интервале $(\varepsilon, 1)$.

Рассмотрим кусочно-голоморфную функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon}^1 \frac{\tau(t) dt}{t-z} = \frac{e^{\pi i p}}{2\pi i} \int_{\varepsilon}^1 \frac{\tau_0(t) dt}{(t-1)^p (t-\varepsilon)^q (t-z)}, \quad z = \rho + iy$$

Изучив поведение этой функции в окрестностях точек $z=\varepsilon$ и $z=1$, в том числе и на оси $z=\rho$ [24], приведем соотношение (3.2) к функциональному уравнению

$$(1+\delta) \left[\frac{\tau_0(\varepsilon) \operatorname{ctg} \pi q}{(1-\varepsilon)^p (\rho-\varepsilon)^q} - \frac{\tau_0(1) \operatorname{ctg} \pi p}{(1-\varepsilon)^q (1-\rho)^p} \right] + \\ + \left[\frac{\tau_0(1)}{(1-\varepsilon)^q (1-\rho)^p \sin \pi p} - \frac{\tau_0(\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^p (\rho-\varepsilon)^q \sin \pi q} \right] = \Omega^{\circ}(\rho) \quad (\varepsilon < \rho < 1)$$

где $\Omega^{\circ}(\rho)$ — регулярная функция при $\rho \in [\varepsilon, 1]$.

Переходя последовательно к пределам при $\rho \rightarrow 1$ и $\rho \rightarrow \varepsilon$, получим

$$p=q = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{1+\delta} \quad \left(0 \leq p \leq \frac{1}{2} \right) \quad (3.4)$$

Следовательно, касательное напряжение $\tau(\rho)$ можно представить в виде формулы с явно выделенными особенностями

$$\tau(\rho) = [(1-\rho^2)(\rho^2-\varepsilon^2)]^{-p} \tau_1(\rho) \quad (3.5)$$

причем регулярную часть $\tau_1(\rho)$ можно выразить через решение алгебраической системы (2.4). Для этого представим функцию $\tau_1(\rho)$ в виде разложения по полиномам Гегенбауэра

$$\tau_1(\rho) = \rho \sum_{n=0}^{\infty} b_n C_n^{1/2-p} \left(\frac{2\rho^2-1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \right) \quad (\varepsilon \leq \rho \leq 1) \quad (3.6)$$

и подставим (3.5), (3.6) в (2.2). Из условия ортогональности многочленов $C_n^{1/2-p}(x)$ на интервале $|x| \leq 1$ [27] получим

$$b_n = \alpha_n \circ \sum_{k=0}^{\infty} Q_k I_{nk} \quad (n=0,1,2,\dots), \quad \alpha_n \circ = \frac{2(2n+1-2p)n! \Gamma(1-2p)}{\Gamma(n+1-p) \Gamma(1-p) (1-\varepsilon^2)^{1-2p}}$$

$$I_{n0} = [1+(-1)^n] \frac{(1-\varepsilon^2) \Gamma(n+1-p)}{2(n-2p)(n+1)! \Gamma(-p)} \quad (3.7)$$

$$I_{nk} = \frac{\Gamma(n+1-p)}{\Gamma(n+1-2p)} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{m+1} 2^m \Gamma(n+m+1-2p)}{(1-\varepsilon^2)^m \lambda_k^{m+1} (n-m)! \Gamma(m+1-p)} \times$$

$$\times [W_m(\lambda_k) - (-1)^{n+m} \varepsilon^m W_m(\lambda_k \varepsilon)] \quad (k=1,2,\dots)$$

Если ввести коэффициенты интенсивности контактных напряжений $\tau(\rho)$ в угловых линиях области сочленения цилиндра и основания

$$K^1 = \lim_{\rho \rightarrow 1} \{ [2\pi(1-\rho)]^p \tau(\rho) \}, \quad K^\varepsilon = \lim_{\rho \rightarrow \varepsilon} \{ [2\pi(\rho-\varepsilon)]^p \tau(\rho) \} \quad (3.8)$$

то согласно (3.5) — (3.7) для них найдем соотношения

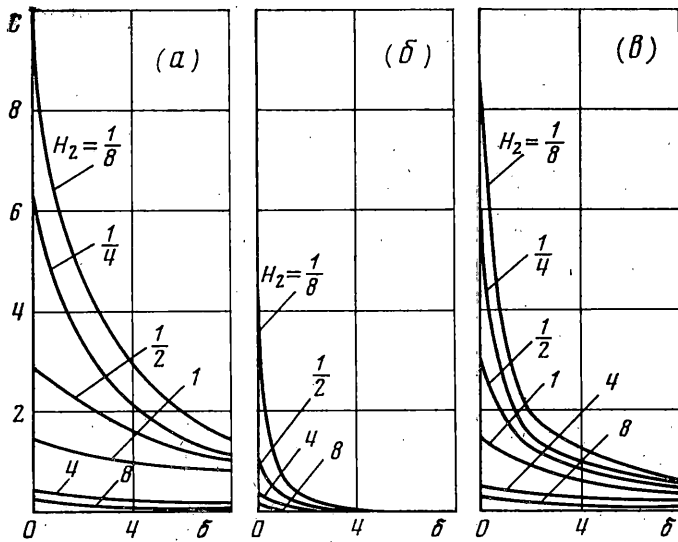
$$K^1 = \left(\frac{\pi}{1-\varepsilon^2} \right)^p \sum_{n=0}^{\infty} b_n C_n^{1/2-p}(1), \quad K^\varepsilon = \left[\frac{\pi}{(1-\varepsilon^2)\varepsilon} \right]^p \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n C_n^{1/2-p}(1)$$

$$C_n^{1/2-p}(1) = \Gamma(n+1-2p) [n! \Gamma(1-2p)]^{-1} \quad (3.9)$$

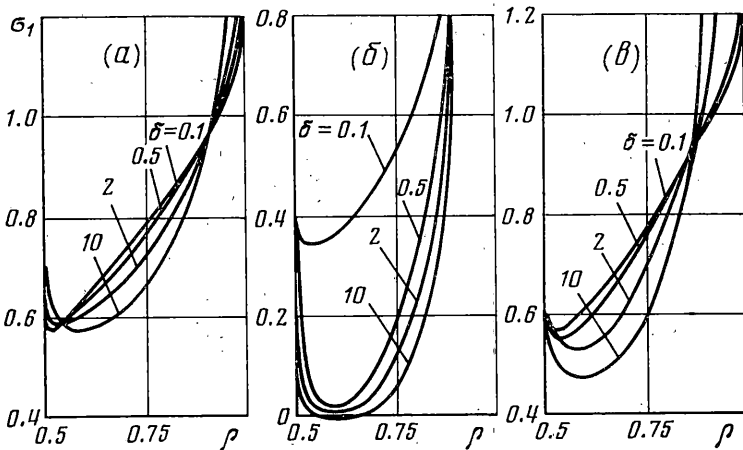
Числовые ряды в (3.9) сходящиеся.

Заметим, что, если параметры H_1, H_2 близки к нулю, то уравнение (3.1) можно значительно упростить. Получающиеся при этом вырожденные решения не имеют требуемой особенности вида (3.4), (3.5). Подобное несоответствие встречается при решении других контактных задач теории упругости, например в задачах о давлении жесткого или упругого штампа на слой или двухслойное полупространство [28, 29]. Однако на основании результатов исследований [28, 29] и численного анализа можно убедиться, что вырожденные решения остаются практически точными внутри промежутка $(\varepsilon, 1)$ и дают правильные значения искомого характеристик упругой системы.

4. Численные расчеты проводились для случая, когда полый цилиндр скреплен с упругим слоем, нижняя поверхность которого жестко закреплена ($G_0 = \infty$) или свободна от внешних усилий ($G_0 = 0$). Боковые поверхности цилиндра предполагаются свободными от напряжений $f_1(\xi) = f_2(\xi) = 0$. Исследовалась задача 1, когда верхний торец цилиндра поворачивается как жесткое целое: $U(\rho) = U_{0\rho}$ ($U_k = 0$).



Фиг. 2

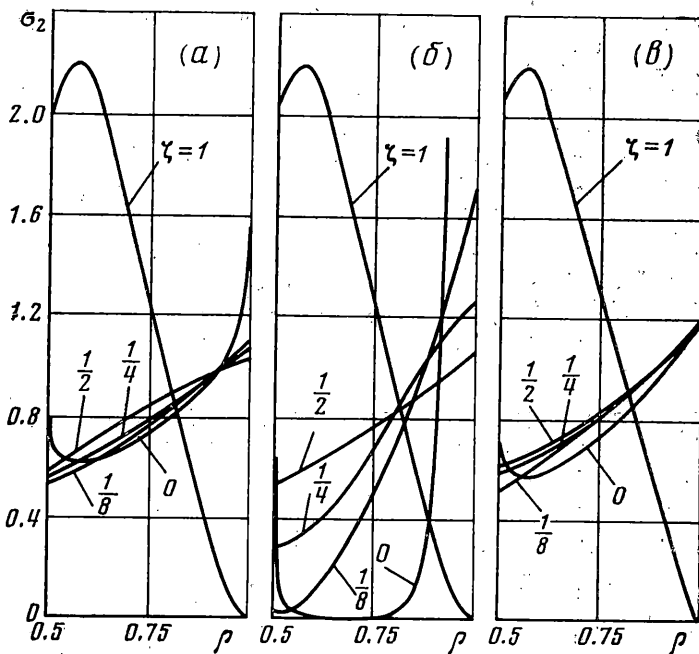


Фиг. 3

Анализ численных результатов дает возможность сделать следующие выводы, касающиеся напряженно-деформированного состояния системы.

1. Относительная жесткость на кручение $C = M / (U_0 b^3 G_2)$ увеличивается с уменьшением длины цилиндра и отношения $\delta = G_2 / G_1$, а также при $\varepsilon \rightarrow 0$. При $H_1 > 4$ жесткость C упругой системы практически не зависит от толщины слоя, т. е. слой можно заменить полупространством (возникающая при этом погрешность не превышает 1%). На фиг. 2 представлены графики зависимости величины C от параметров H_1 , H_2 , δ и от граничных условий на нижнем основании слоя: случай a соответствует $H_1 = 1/8$, $G_0 = \infty$; b соответствует $H_1 = 1/8$, $G_0 = 0$; v соответствует $H_1 = 8$, $G_0 = 0$ или $G_0 = \infty$.

2. Толщина слоя не влияет на качественный характер распределения смещений и напряжений в полом цилиндре, а сказывается лишь на их величине. При $H_1 > 4$ с точностью до 1% напряжения и смещения в области контакта цилиндра с основанием и в разных сечениях цилиндра можно считать независимыми от H_1 . На фиг. 3 приведены графики для $\sigma_1 = \rho b^3 \tau_{\theta z}^{(2)} / (2M)$ при $\xi = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $H_2 = 1$ (параметры H_1 и G_0 имеют прежние значения, как и на фиг. 2, $a - v$).



Фиг. 4

3. Если отношение модуля сдвига цилиндра к модулю сдвига слоя $\delta = G_2/G_1 > 4$ или, наоборот, $\delta < 1/4$, то при определении смещений и напряжений в менее жестком теле другое тело можно считать абсолютно жестким (погрешность не превышает 5%).

Изучался также случай задачи 2, когда на верхнем торце цилиндра заданы напряжения вида

$$T(\rho) = T_0 [\rho - W_1(\lambda_1 \rho) / W_1(\lambda_1)], \quad T_0 = \text{const}$$

На фиг. 4 приведены кривые изменения касательных напряжений $\sigma_2 = \tau_{\rho z}^{(2)} / (G_2 T_0)$ при $\varepsilon = 0.5$, $\delta = 1$, $H_2 = 1$ в разных сечениях цилиндра: (а) соответствует $H_1 = 1/8$, $G_0 = \infty$; (б) соответствует $H_1 = 1/8$, $G_0 = 0$; (в) соответствует $H_1 = 8$, $G_0 = 0$ или $G_0 = \infty$.

Из графиков следует, что по мере удаления от торцов к внутренним сечениям цилиндра ($\zeta \rightarrow 1/2$, $H_2 = 1$) решение задачи приближается к кулоновскому.

Поступила 12 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Грилицкий Д. В., Кизыма Я. М. Совместное кручение стержня и полупространства. Прикл. механ., 1967, т. 3, вып. 2.
2. Грилицкий Д. В., Кизыма Я. М. Сумісне кручення круглого циліндричного стержня і півпростору для частинного випадку анізотропії. Вісн. Львівськ. ун-ту. Сер. механ., матем., 1967, вип. 3.
3. Freeman N. J., Keer L. M. Torsion of a cylindrical rod welded to an elastic half-space. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., vol. 34, No. 3. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е, 1967, т. 34, № 3.)
4. Keer L. M., Freeman N. J. Torsion of a finite elastic cylindrical rod partially bonded to an elastic half space. Quart. Appl. Math., 1969, vol. 26, No. 4.
5. Keer L. M., Freeman N. J. Load transfer problem for an embedded shaft in torsion. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1970, vol. 37, No. 4. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е, 1970, т. 37, № 4.)
6. Колюбизин Ю. Д. Контактная задача о кручении полупространства упругой шайбой. Прикл. механ., 1971, т. 7, вып. 12.

7. Кизыма Я. М., Окренкий Б. С. Совместное кручение упругого цилиндра и полупространства с переменными модулями сдвига. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 8.
8. Кизыма Я. М. Напряженно-деформированное состояние цилиндра и полупространства с переменными модулями сдвига при совместном кручении. Прикл. механ., 1975, т. 11, вып. 5.
9. Kizuma Ya., Rudnickii V. B. Stress-strain of an elastic cylinder and a layer in joint torsion. Arch. mech. stosowanej, 1973, vol. 25, No. 3.
10. Хассан А. З. Х. О кручении цилиндрического стержня, сцепленного с бесконечным упругим слоем. В сб.: Исследования по упругости и пластичности, вып. 9. Изд-во ЛГУ, 1972.
11. Златин А. Н., Уфлянд Я. С. О совместном кручении цилиндра и слоя. Прикл. механ., 1975, т. 11, вып. 4.
12. Даниленко И. Г., Ковура А. Б., Петришин В. И. Совместное кручение цилиндра и многослойного основания. В сб.: Теорет. и эксперим. исслед. прочности, устойчивости и динамики машин. Днепропетровск, Изд-во Днепропетровск. ун-та, 1973.
13. Грилицкий Д. В., Поддубняк А. П. Совместное кручение полого кругового цилиндра и полупространства. Прикл. механ., 1975, т. 11, вып. 11.
14. Піддубняк О. П., Грилицкий Д. В. Сумісне кручення круглого порожнистого циліндра та півпростору при неповному контакті. Вісн. Львівськ. ун-ту. Сер. механ., матем., 1975, вип. 10.
15. Соляник - Красса К. В. Кручение валов переменного сечения. М., Гостехиздат, 1949.
16. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
17. Снеддон И. Преобразования Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
18. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
19. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
20. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
21. Zak A. R. Stresses in the vicinity of boundary discontinuities in bodies of revolution. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1964, vol. 31, No. 1. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. Е, 1964, т. 31, № 1.)
22. Zak A. R. Elastic analysis of cylindrical configurations with stress singularities. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1972, vol. 39, No. 2. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. Е, 1972, т. 39, № 2.)
23. Westmann R. A. Discussion on the paper: «Torsion of a cylindrical rod welded to an elastic half-space» by N. J. Freeman and L. M. Keer. Authors' clouse. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, vol. 35, No. 1. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е, 1968, т. 35, № 1.)
24. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
25. Erdogan F., Gupta G. D. The torsion problem of a disk bonded to a dissimilar shaft. Internat. J. Solids and Struct., 1972, vol. 8, No. 1.
26. Srivastav R. P. A pair of dual integral equations involving Bessel functions of the first and the second kind. Proc. Edinburgh Math. Soc., Ser. 2, 1964, vol. 14, No. 2.
27. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М., «Наука», 1974.
28. Александров В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
29. Александрова Г. П. Контактные задачи изгиба плит, лежащих на упругом основании. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 1.