

**ОПТИМАЛЬНАЯ АМОРТИЗАЦИЯ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ**

**Н. Н. БОЛОТНИК**

(Москва)

В ряде работ [1-8] рассматривались задачи оптимальной амортизации систем, совершающих поступательное движение. В данной статье решается задача оптимизации параметров системы, совершающей крутильные колебания. Оптимальность понимается в смысле минимизации квадрата полного ускорения при ограниченном угле поворота. Исследуются некоторые модели амортизационных устройств с типичными характеристиками.

1. Рассматривается механическая система, представляющая собой твердое тело, установленное на амортизирующем устройстве таким образом, что оно может совершать крутильные колебания вокруг неподвижной оси. Амортизирующее устройство состоит из пружины и вязкого демпфера со степенными характеристиками. Предполагается, что в начальный момент времени колеблющемуся телу в результате удара была сообщена конечная угловая скорость. Движение такой системы описывается дифференциальным уравнением

$$\varphi'' + k|\varphi'|^r \operatorname{sign} \varphi' + c|\varphi|^m \operatorname{sign} \varphi = 0 \quad (1.1)$$

и начальными условиями  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(0) = \beta$ . Здесь  $\varphi$  — угол поворота тела вокруг оси,  $c \geq 0$ ,  $k \geq 0$  — коэффициенты жесткости и демпфирования соответственно,  $r$  и  $m$  — положительные числа,  $\beta$  — начальная скорость, точка в позиции штриха означает производную по времени  $t$ .

Ставится задача выбора параметров системы (1.1), обеспечивающих минимум максимума квадрата полного ускорения, т. е. перегрузки, испытываемой амортизируемым телом, при ограниченном угле поворота. Квадрат полного ускорения точки тела, находящейся на расстоянии  $\rho$  от оси вращения, равен  $\rho^2 w^2(t, k, c)$ , где  $w^2(t, k, c) = \varphi''^2(t, k, c) + \varphi'^4(t, k, c)$ , и через  $\varphi(t, k, c)$  обозначено решение уравнения (1.1) с начальными условиями  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(0) = \beta$ . Так как полное ускорение отличается от  $w(t, k, c)$  лишь постоянным множителем, то максимум (по  $t$ ) функции  $w^2(t, k, c)$  можно принять за критерий качества амортизации и сформулировать задачу оптимизации следующим образом.

Найти такие неотрицательные параметры  $k_0, c_0$ , чтобы

$$\max_{t \in [0, \infty)} w^2(t, k_0, c_0) = \min_{k, c} \max_{t \in [0, \infty)} w^2(t, k, c) \quad (1.2)$$

при условии

$$\max_{t \in [0, \infty)} |\varphi(t, k, c)| \leq D \quad (1.3)$$

где  $D$  — заданное положительное число. На параметры системы могут быть наложены дополнительные ограничения вида

$$(k, c) \in \Omega = \{k, c: 0 \leq a_1 \leq k \leq a_2, 0 \leq b_1 \leq c \leq b_2\} \quad (1.4)$$

где  $a_1, a_2, b_1, b_2$  — заданные числа. Подобные задачи возникают при проектировании оптимальных амортизаторов технических устройств, на работе которых вредно сказываются большие перегрузки.

Ниже приводится решение поставленной задачи для некоторых типичных моделей амортизационных устройств. Предполагается, что  $\beta=1$ . Это не ограничивает общности, поскольку всегда можно выбрать единицу измерения времени таким образом, чтобы начальная скорость равнялась единице.

2. В случае консервативной системы ( $k=0$ ) удобно решать поставленную задачу методом фазовой плоскости. Фазовые траектории системы (1.1) при  $k=0$  симметричны относительно обеих координатных осей фазовой плоскости  $\varphi, \dot{\varphi}$  и можно ограничиться рассмотрением части траектории, лежащей в первом квадранте ( $\varphi \geq 0, \dot{\varphi} \geq 0$ ). В силу консервативности системы выполняется равенство  $\dot{\varphi}^2 = 1 - 2c\varphi^{m+1} / (m+1)$ , откуда вытекает, что

$$\max_t |\dot{\varphi}| = \left( \frac{m+1}{2c} \right)^{1/(m+1)} \quad (2.1)$$

Функция  $w^2$  на фазовой траектории имеет вид

$$w^2 = 1 + 4c^2 \frac{\varphi^{2m+2}}{(m+1)^2} - 4c \frac{\varphi^{m+1}}{m+1} + c^2 \varphi^{2m}$$

Рассмотрим случай, когда  $m \geq 1$ . Исследование функции  $w^2$  на экстремум на отрезке

$$I = \left[ 0, \left( \frac{m+1}{2c} \right)^{1/(m+1)} \right]$$

при помощи известных методов анализа показывает, что эта функция имеет не более одной внутренней стационарной точки, и эта стационарная точка соответствует локальному минимуму (в этой точке  $(d^2 w^2 / d\varphi^2) > 0$ ). Следовательно, максимум достигается в одной из граничных точек отрезка  $I$  и

(2.2)

$$\max w^2 = \max \left\{ 1, \left( \frac{m+1}{2} \right)^{2m/(m+1)} c^{2/(m+1)} \right\} = 1 \quad \text{при } c \leq \left( \frac{2}{m+1} \right)^m$$

$$\begin{aligned} \max w^2 &= \max \left\{ 1, \left( \frac{m+1}{2} \right)^{2m/(m+1)} c^{2/(m+1)} \right\} = \\ &= \left( \frac{m+1}{2} \right)^{2m/(m+1)} c^{2/(m+1)} \quad \text{при } c > \left( \frac{2}{m+1} \right)^m \end{aligned}$$

Из (1.3) и (2.1) следует, что допустимые значения параметра  $c$  должны удовлетворять ограничению  $c \geq (m+1) / (2D^{m+1})$ . Функция (2.2) является монотонно неубывающей функцией параметра  $c$ . Отсюда вытекает исчерпывающее решение задачи (1.1) — (1.3), состоящее в следующем:

$$\text{если } D < \frac{m+1}{2}, \text{ то } c_0 = c_* = \frac{m+1}{2D^{m+1}}, \quad \max w^2 = \frac{(m+1)^2}{4D^2} \quad (2.3)$$

$$\text{если } D \geq \frac{m+1}{2}, \text{ то } \{c_0\} = \left[ \frac{m+1}{2D^{m+1}}, \left( \frac{2}{m+1} \right)^m \right], \quad \max w^2 = 1$$

Через  $\{c_0\}$  обозначено множество оптимальных параметров. Из (2.3) вытекает, что для любого значения  $D$  функция  $\max w^2$  является неубывающей функцией параметра  $m$  и, следовательно, линейный амортизатор

( $m=1$ ) обеспечивает наименьшее значение максимума квадрата полного ускорения.

Если имеются дополнительные ограничения (1.4) на допустимые значения параметра, то решение задачи оптимизации консервативной системы следующее:

$$D \leq 1/2(m+1)$$

$$\text{если } b_1 > c_*, \text{ то } c_0 = b_1, \max w^2 = [1/2(m+1)]^{2m/(m+1)} b_1^{2/(m+1)}$$

$$\text{если } b_1 \leq c_* \leq b_2, \text{ то } c_0 = c_*, \max w^2 = 1/4(m+1)^2 D^{-2}$$

если  $b_2 < c_*$ , то задача решения не имеет, так как не выполняется неравенство (1.3);

$$D > 1/2(m+1)$$

$$\text{если } b_1 \geq [2/(m+1)]^m, \text{ то } c_0 = b_1, \max w^2 = [1/2(m+1)]^{2m/(m+1)} b_1^{2/(m+1)}$$

$$\text{если } \omega = \left[ \frac{m+1}{2D^{m+1}}, \left( \frac{2}{m+1} \right)^m \right] \cap [b_1, b_2] \neq \emptyset, \text{ то } \{c_0\} = \omega, \max w^2 = 1$$

если  $b_2 < 1/2(m+1)D^{-(m+1)}$ , то задача решения не имеет, так как не выполняется неравенство (1.3).

Отметим, что если заранее равенство  $k=0$  не предполагается, то в случае  $D \geq 1/2(m+1)$  оптимальные параметры для задачи (1.1) — (1.3) имеют следующие значения:

$$k_0 = 0, \quad \{c_0\} = \left[ \frac{m+1}{2D^{m+1}}, \left( \frac{2}{m+1} \right)^m \right] \quad (2.4)$$

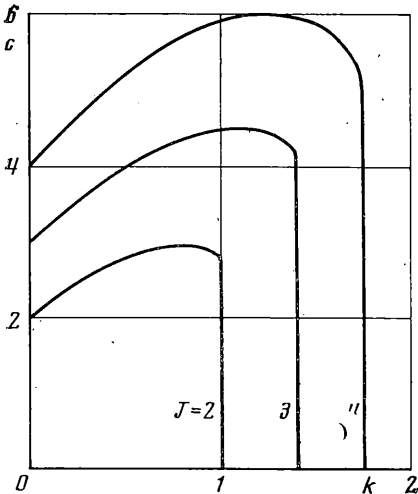
Это вытекает из (2.3) и того, что если  $k > 0$ , то  $w^2(0, k, c) = k^2 + 1$  и, следовательно

$$\max_t w^2(t, k, c) > \max_t w^2(t, 0, c_0) = 1$$

При  $0 < m < 1$  функция  $w^2$  может иметь внутреннюю точку локального максимума на отрезке  $I$ , и задача не допускает такого простого аналитического решения, как в рассмотренном выше случае.

3. Жесткий элемент многих реальных амортизаторов удовлетворительно моделируется линейной зависимостью момента упругой силы от угла поворота, а демпфер — линейной ( $r=1$ ) или квадратичной ( $r=2$ ) зависимостью момента силы трения от угловой скорости. Ниже излагается алгоритм поиска оптимальных параметров таких амортизаторов.

На фиг. 1 изображены линии уровней функции  $J(k, c) = \max_t w^2(t, k, c)$  для линейного амортизатора, построенные по результатам численных расчетов на ЭВМ. Качественно картина сохраняется и для амортизатора с квадратичным трением. Эти линии уровней представляют собой выпуклые кривые, и функция  $J(k, c)$  монотонно возрастает



Фиг. 1

при удалении от начала координат по любому направлению в первом квадранте плоскости параметров ( $k \geq 0, c \geq 0$ ). Отсюда следует, что функция  $J(k, c)$  не имеет внутренних точек экстремумов и, следовательно, оп-

тимальные параметры лежат на границе области допустимых значений, т. е. либо на одной из сторон прямоугольника  $\Omega$ , либо на кривой  $\gamma = \{k, c: \max_t |\varphi(t, k, c)| = D\}$ . Отметим некоторые свойства этой кривой. Для системы с линейным амортизатором максимум модуля отклонения равен [5]:

$$\begin{aligned} \max_t |\varphi(t, k, c)| &= \frac{1}{\sqrt{c}} \left( \frac{k - \sqrt{k^2 - 4c}}{k + \sqrt{k^2 - 4c}} \right)^{k/2\sqrt{k^2 - 4c}} \quad \text{при } k^2 - 4c > 0 \\ \max_t |\varphi(t, k, c)| &= \frac{2}{k} e^{-1} \quad \text{при } k^2 - 4c = 0 \\ \max_t |\varphi(t, k, c)| &= (1/\sqrt{c}) \exp[-(k/\sqrt{4c - k^2}) \times \\ &\quad \times \arctg(\sqrt{4c - k^2}/k)] \quad \text{при } k^2 - 4c < 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

В [5] показано, что частные производные функции (3.1) по параметрам  $k$  и  $c$  отрицательны и, следовательно, отрицательна производная  $dc/dk$ , вычисленная по правилу дифференцирования неявных функций согласно (3.1). Это означает, что кривая  $\gamma$  является графиком монотонно убывающей функции  $c(k)$ . Сделав несложные предельные переходы в (3.1), можно показать, что  $c(0) = 1/D^2$ ,  $c(1/D) = 0$ .

Рассмотрим теперь систему с квадратичным трением. Переходя в (4.1) к переменным  $\varphi, \dot{\varphi}$ , можно получить уравнение фазовой кривой в первом квадранте фазовой плоскости

$$\varphi^2 = (1 - 1/2 ck^{-2}) \exp(-2k\varphi) + 1/2 ck^{-2} - ck^{-1}\dot{\varphi} \tag{3.2}$$

В силу диссипативности системы (4.1) максимум модуля отклонения достигается в момент  $t_*$  достижения первого локального экстремума функции  $\varphi(t, k, c)$ . Следовательно, разрешив уравнение (3.2) относительно  $\dot{\varphi}$  при  $\dot{\varphi} = 0$ , можно получить значение  $\max_t |\varphi(t, k, c)|$ , а поскольку на кривой  $\gamma$  максимальное отклонение равно  $D$ , то уравнение этой кривой имеет вид

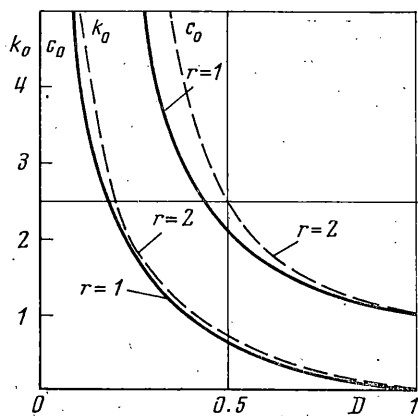
$$c = \frac{2k^2 \exp(-2kD)}{2kD - 1 + \exp(-2kD)} \tag{3.3}$$

Продифференцировав (3.3) по  $k$ , можно убедиться, что  $(dc/dk) < 0$ , и, следовательно, кривая  $\gamma$  является графиком монотонно убывающей функции  $c(k)$ . При помощи предельного перехода в (3.3) показывается, что  $c(k) \rightarrow D^{-2}$  при  $k \rightarrow 0$ . Построение кривых  $\gamma$  по результатам численных расчетов для систем с линейным и квадратичным трением показало, что эти кривые выпуклые. Из свойств кривой  $\gamma$  и линий уровня функции  $J(k, c)$  следует единственность точки минимума функции  $J(k, c)$  на  $\gamma$ . Задача поиска этого минимума сводилась к поиску экстремума функции одной переменной и решалась численно на ЭВМ. На фиг. 2 представлены графики зависимостей оптимальных параметров от  $D$  на отрезке  $0 \leq D \leq 1$ , а на фиг. 3 — графики зависимостей функционала  $J$  от  $D$  для линейного амортизатора ( $r=1$ , сплошные линии) и амортизатора с квадратичным трением ( $r=2$ , штриховые линии). Эти кривые дают, по существу, исчерпывающее решение задачи (4.1) — (4.3). Если  $D > 1$ , то оптимальные параметры определяются соотношениями (2.4), где следует положить  $m=1$ . Из графиков, изображенных на фиг. 3, следует, что если  $0 < D < 0.38$ , то оптимальный амортизатор с квадратичным трением приводит к меньшему значению функционала по сравнению с линейным амортизатором, а если  $0.38 < D < 1$ ,

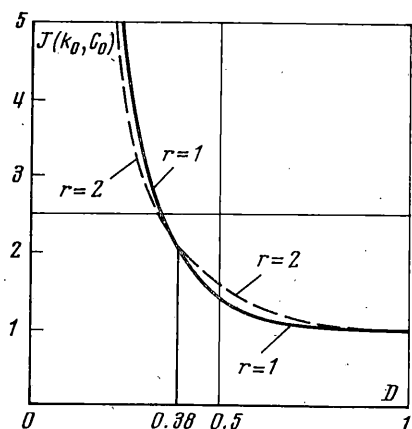
то, наоборот, линейный амортизатор обеспечивает меньшее значение функционала.

По результатам численных расчетов построены следующие кривые на плоскости  $k, c$ : 1 — множество точек минимумов функции  $J(k, c)$  на кривых семейства  $\max_t |\varphi(t, k, c)| = d$  ( $d$  — параметр семейства), 2 — множество точек минимумов функции  $J(k, c)$  на прямых семейства  $c = \text{const.}$

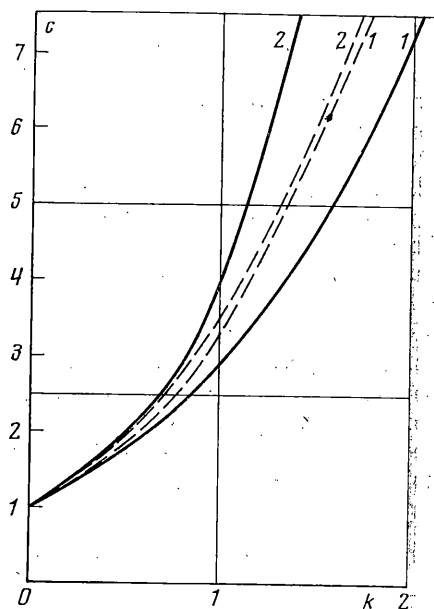
В силу отмеченной выше выпуклости линий уровней функции  $J(k, c)$ , эта функция имеет единственный минимум на каждой кривой (прямой) указанных семейств. На фиг. 4 изображены кривые 1 и 2 для линейного амортизатора



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

тизатора (сплошные линии) и для амортизатора с квадратичным трением (штриховые линии). Эти кривые исходят из точки  $(0, 1)$  и являются графиками монотонно возрастающих выпуклых зависимостей  $c$  от  $k$ . Из свойств линий уровней функции  $J(k, c)$ , кривых 1 и 2 и кривых семейства  $\max_t |\varphi(t, k, c)| = d$  следует алгоритм решения задачи (1.1) — (1.4), состоящий в следующем.

Введем обозначения:  $a(X)$  и  $or(X)$  — функции, ставящие в соответствующие точке  $X$  в плоскости параметров ее абсциссу и ординату соответственно,  $R$  — точка пересечения кривой  $\gamma$  с кривой 1,  $S$  — точка пересечения кривой 2 с прямой  $c = b_1$ ,  $P$  и  $Q$  — точки пересечения прямоугольника  $\Omega$  с кривой  $\gamma$ , причем  $a(P) < a(Q)$ . Если точка  $R$  или  $S$  отсутствует, то будем писать  $R = \emptyset$  или  $S = \emptyset$  соответственно. Полное решение задачи (1.1) — (1.4) исчерпывается тремя случаями взаимного расположения кривой  $\gamma$  и прямоугольника  $\Omega$  на плоскости параметров  $k, c$ .

*Случай 1.* Кривая  $\gamma$  пересекает прямоугольник  $\Omega$ .  
Если  $D \geq 1$  (при этом  $R = \emptyset$ ,  $S = \emptyset$ ), то:

$$k_0 = a_1, c_0 = or(P) \text{ при } or(P) < b_2$$

$$k_0 = a(P), c_0 = b_2 \text{ при } or(P) = b_2$$

Если  $D < 1$ , то:

$$k_0 = a(P), c_0 = or(P) \text{ при } a(R) < a(P)$$

$$k_0 = a(R), c_0 = or(R) \text{ при } a(P) \leq a(R) \leq a(Q)$$

$$k_0 = a(Q), c_0 = b_1 \text{ при } or(Q) = b_1, a(R) \geq a(Q), a(S) \leq a(Q)$$

$$k_0 = a(S), c_0 = b_1 \text{ при } or(Q) = b_1, a(Q) < a(S) < a_2$$

$$k_0 = a_2, c_0 = b_1 \text{ при } or(Q) = b_1, a(S) > a_2$$

$$k_0 = a_2, c_0 = or(Q) \text{ при } or(Q) > b_1, a(R) > a(Q)$$

*Случай 2.* Кривая  $\gamma$  лежит ниже прямоугольника  $\Omega$ .

$$k_0 = a_1, c_0 = b_1 \text{ при } S = \emptyset \text{ или } a(S) < a_1$$

$$k_0 = a(S), c_0 = b_1 \text{ при } a_1 \leq a(S) \leq a_2$$

$$k_0 = a_2, c_0 = b_1 \text{ при } a(S) > a_2$$

*Случай 3.* Кривая  $\gamma$  лежит выше прямоугольника  $\Omega$ . В этом случае задача решения не имеет, поскольку ни в одной точке прямоугольника  $\Omega$  не выполняется неравенство (1.3).

Автор благодарит Ф. Л. Черноушко за полезное обсуждение результатов и А. Г. Мишину за помощь в проведении численных расчетов на ЭВМ.

Поступила 20 IV 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гурецкий В. В. Об одной задаче оптимального управления. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 1.
2. Троицкий В. А. О синтезе оптимальных амортизаторов. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
3. Карпоров Д. С., Трикина А. К. Comparative study of optimization techniques for shock and vibration isolation. J. Engng Industry, 1969, vol. 91, No. 4.
4. Гурецкий В. В., Коловский М. З., Мазин Л. С. О предельных возможностях противоударной амортизации. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 6.
5. Болотник Н. Н. Оптимизация параметров некоторых механических колебательных систем. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 5.
6. Большаевцев Э. М., Жиянов Н. И., Лавровский Э. К. Оптимизация параметров колебательной системы при импульсных возмущениях. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1975, № 6.