

## АВТОКОЛЕБАНИЯ РОТОРОВ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Э. Л. ПОЗНЯК

(Москва)

Известно, что в высокооборотных машинах при действии специфических для роторных систем неконсервативных сил (внутреннее трение в материале, аэрогидродинамические силы в уплотнениях и подшипниках скольжения, электромагнитные силы в зазорах электрических машин и т. п.) нередко возникают автоколебания [1]. В случаях, когда скорость вращения ротора превышает не только первую, но и высшие критические скорости, существует принципиальная возможность возникновения одночастотных автоколебаний с различными формами или даже многочастотных автоколебаний. Впервые эта задача была поставлена М. Я. Кушелем в работе [2]. В дальнейшем эта задача развивалась и конкретизировалась в работах [3-5]. Задачи о многочастотных автоколебаниях в сложных системах представляют интерес и являются актуальными для многих областей техники [6-8].

В данной работе излагается метод определения амплитуд автоколебаний и анализ устойчивости решений для систем со многими степенями свободы. На примерах простой роторной схемы обсуждаются основные особенности задачи при действии двух характерных видов неконсервативных сил — сил внутреннего трения в материале и сил, возникающих в уплотнениях и подшипниках скольжения.

1. На примере системы, в которой возможно возникновение автоколебаний, в том числе и двухчастотных, изложим один из возможных методов нахождения решений и анализа их устойчивости

$$\begin{aligned} L_1 &= M_{11} \ddot{x}_1 + M_{12} \ddot{x}_2 + \Delta L_1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t) = 0 \\ L_2 &= M_{21} \ddot{x}_1 + M_{22} \ddot{x}_2 + \Delta L_2(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t) = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Стационарное решение системы (1.1) в первом гармоническом приближении, когда частоты  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  достаточно удалены одна от другой, ищется в виде

$$\begin{aligned} x_{01} &= A_{11} \cos \lambda_1 t + B_{11} \sin \lambda_1 t + A_{12} \cos \lambda_2 t + B_{12} \sin \lambda_2 t \\ x_{02} &= A_{21} \cos \lambda_1 t + B_{21} \sin \lambda_1 t + A_{22} \cos \lambda_2 t + B_{22} \sin \lambda_2 t \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — известные частоты при вынужденных колебаниях или известные при автоколебаниях.

Для определения амплитуд  $A_{11}, \dots, B_{22}$  подставим решения (1.2) в левые части уравнений (1.1) и потребуем, чтобы результаты подстановки  $L_1^0$  и  $L_2^0$  были бы ортогональны «в среднем» к базисным функциям  $\cos \lambda_1 t, \dots, \sin \lambda_2 t$ . В результате получим систему интегро-алгебраических уравнений [9]:

$$Q_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t L_i^0 \cos \lambda_j t dt = 0, \quad S_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t L_i^0 \sin \lambda_j t dt = 0 \quad (i, j=1, 2) \quad (1.3)$$

Для анализа устойчивости стационарных решений изложим метод, являющийся развитием метода, описанного в работе [10] для систем с одной степенью свободы при одночастотных колебаниях.

Составим уравнения в вариациях для системы (1.1)

$$\begin{aligned} \delta L_1 &= \frac{\partial L_1}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial L_1}{\partial x_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial L_1}{\partial x_1} z_1'' + \frac{\partial L_1}{\partial x_2} z_2 + \frac{\partial L_1}{\partial x_2} \dot{z}_2 + \frac{\partial L_1}{\partial x_2} z_2'' = 0 \\ \delta L_2 &= \frac{\partial L_2}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial L_2}{\partial x_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial L_2}{\partial x_1} z_1'' + \frac{\partial L_2}{\partial x_2} z_2 + \frac{\partial L_2}{\partial x_2} \dot{z}_2 + \frac{\partial L_2}{\partial x_2} z_2'' = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

причем вариации  $z_1$  и  $z_2$  имеют вид

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - x_{01} = \xi_{11} \cos \lambda_1 t + \eta_{11} \sin \lambda_1 t + \xi_{12} \cos \lambda_2 t + \eta_{12} \sin \lambda_2 t \\ z_2 &= x_2 - x_{02} = \xi_{21} \cos \lambda_1 t + \eta_{21} \sin \lambda_1 t + \xi_{22} \cos \lambda_2 t + \eta_{22} \sin \lambda_2 t \end{aligned} \quad (1.5)$$

Из выражений (1.5) видно, что возмущаются лишь амплитуды при неизменных частотах  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Разложим каждое из уравнений (1.4) в «осредненные» ряды

$$\begin{aligned} \delta L_1 &= a_{11} \cos \lambda_1 t + b_{11} \sin \lambda_1 t + a_{12} \cos \lambda_2 t + b_{12} \sin \lambda_2 t + \dots \\ \delta L_2 &= a_{12} \cos \lambda_1 t + b_{12} \sin \lambda_1 t + a_{22} \cos \lambda_2 t + b_{22} \sin \lambda_2 t + \dots \end{aligned} \quad (1.6)$$

в которых коэффициенты разложения определены равенствами

$$a_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \delta L_i \cos \lambda_j t dt, \quad b_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \delta L_i \sin \lambda_j t dt \quad (i, j=1, 2) \quad (1.7)$$

Удерживая в разложениях (1.6) первые гармоники, получим уравнения для вариаций  $\xi_{11}, \dots, \eta_{22}$  из условий равенства нулю амплитуд при первых гармониках

$$a_{ij} = b_{ij} = 0 \quad (i, j=1, 2) \quad (1.8)$$

В выражениях (1.7) при выполнении интегрирования величины  $\delta L_1$  и  $\delta L_2$  заменяются выражениями (1.4), в которые подставляются производные от величин  $z_1$  и  $z_2$ , определяемых выражениями (1.5). При вычислении этих производных делается предположение, что вблизи границы устойчивости параметры движения изменяются достаточно медленно, что позволяет в выражениях для производных пренебречь рядом членов, малых по сравнению с остальными. Далее при выполнении преобразований используются соотношения вида

$$\frac{\partial Q_{11}}{\partial A_{11}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left( \frac{\partial L_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial A_{11}} + \frac{\partial L_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial A_{11}} + \frac{\partial L_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial A_{11}} \right) \cos \lambda_1 t dt$$

$$\frac{\partial S_{22}}{\partial B_{22}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left( \frac{\partial L_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial B_{22}} + \frac{\partial L_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial B_{22}} + \frac{\partial L_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial B_{22}} \right) \sin \lambda_2 t dt$$

получаемые при дифференцировании выражений (1.3) по параметру под знаком интеграла.

В результате преобразований условия (1.8) окончательно приводят к системе уравнений в вариациях, записанной в матричной форме

$$Qz + Mz' = 0 \quad (1.10)$$

Здесь вектор  $z$  и квадратные матрицы восьмого порядка  $Q$  и  $M$  имеют следующие значения:

$$z = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \eta_{11} \\ \xi_{12} \\ \eta_{12} \\ \xi_{21} \\ \eta_{21} \\ \xi_{22} \\ \eta_{22} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & M_{11}\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -M_{11}\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{12}\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_{12}\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{21}\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -M_{21}\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{22}\lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M_{22}\lambda_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \left\| \frac{\partial(Q_{11}, \dots, S_{22})}{\partial(A_{11}, \dots, B_{22})} \right\|$$

Линейная система (4.10) может быть проанализирована при помощи какого-либо критерия, например при помощи критерия Раussa — Гурвица.

Необходимым условием устойчивости решений является положительность свободного члена характеристического уравнения системы (4.10), который представляет собой функциональный определитель или якобиан системы (1.3), т. е. условие

$$\det \left\| \frac{\partial(Q_{11}, \dots, S_{22})}{\partial(A_{11}, \dots, B_{22})} \right\| > 0 \quad (4.11)$$

В работах [2-5] стационарные решения находились из канонических уравнений, получаемых при помощи метода осреднения Крылова — Богомолова. Устойчивость решений анализировалась при помощи уравнений в вариациях, получаемых путем возмущения канонических уравнений.

2. Рассматривается идеально уравновешенный ротор с распределенными параметрами на изотропных опорах. Уравнения движения с учетом сил внешнего и внутреннего трений, но без учета гироскопических моментов и поперечных сил имеют вид

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[ EI \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + k \left( \frac{\partial^3 x}{\partial t \partial s^2} + \omega \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \right) \right] + d \frac{\partial x}{\partial t} + f_x &= 0 \\ m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[ EI \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + k \left( \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial s^2} - \omega \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) \right] + d \frac{\partial y}{\partial t} + f_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $s$  — продольная координата,  $d$  и  $k$  — коэффициенты линейных сил соответственно внешнего и внутреннего трений,  $f_x$  и  $f_y$  — функции, характеризующие нелинейное внешнее трение, остальные обозначения — обычные. Ниже задача рассматривается для нелинейностей, имеющих вид ( $r$  — коэффициент)

$$f_x = r(x^2 + y^2) \frac{\partial x}{\partial t}, \quad f_y = r(x^2 + y^2) \frac{\partial y}{\partial t} \quad (2.2)$$

Решение системы (2.1) ищется в виде разложения в ряды по формам собственных колебаний соответствующей консервативной задачи

$$x(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \varphi_i(s), \quad y(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \varphi_i(s) \quad (2.3)$$

где  $\varphi_i(s)$  — собственные функции, а  $x_i(t)$  и  $y_i(t)$  — неизвестные функции времени.

Для нахождения функций  $x_i(t)$  и  $y_i(t)$  используется метод Галеркина, для чего решения (2.3) подставляются в систему (2.1) и накладываются требования, чтобы результаты подстановки были бы ортогональны всем функциям  $\varphi_i(s)$ .

Ограничимся в решении (2.3) двумя членами ряда, предполагая также, что рассматриваемая механическая система является симметричной

$$x(s, t) = x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2, \quad y(s, t) = y_1\varphi_1 + y_2\varphi_2 \quad (2.4)$$

После преобразований получается система уравнений для неизвестных  $x_1, y_1, x_2, y_2$

$$\begin{aligned} L_1 &= M_1 \ddot{x}_1 + C_1 x_1 + K_1 (x_1 + \omega y_1) + D_1 \dot{x}_1 + F_1 x_1 + F_0 x_2 = 0 \\ L_2 &= M_2 \ddot{x}_2 + C_2 x_2 + K_2 (x_2 + \omega y_2) + D_2 \dot{x}_2 + F_2 x_2 + F_0 x_1 = 0 \\ L_3 &= M_1 \ddot{y}_1 + C_1 y_1 + K_1 (y_1 - \omega x_1) + D_1 \dot{y}_1 + F_1 y_1 + F_0 y_2 = 0 \\ L_4 &= M_2 \ddot{y}_2 + C_2 y_2 + K_2 (y_2 - \omega x_2) + D_2 \dot{y}_2 + F_2 y_2 + F_0 y_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^l m \varphi_1^2 ds, & M_2 &= \int_0^l m \varphi_2^2 ds, & C_1 &= M_1 \Omega_1^2, & C_2 &= M_2 \Omega_2^2 \\ D_1 &= \int_0^l d \varphi_1^2 ds, & D_2 &= \int_0^l d \varphi_2^2 ds, & K_1 &= \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( k \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial s^2} \right) \varphi_1 ds \\ & & & & K_2 &= \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( k \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial s^2} \right) \varphi_2 ds \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$F_0 = 2R_0(x_1 x_2 + y_1 y_2), \quad F_1 = R_1(x_1^2 + y_1^2) + R_0(x_2^2 + y_2^2), \quad F_2 = R_2(x_2^2 + y_2^2) + R_0(x_1^2 + y_1^2)$$

$$R_1 = \int_0^l r \varphi_1^4 ds, \quad R_2 = \int_0^l r \varphi_2^4 ds, \quad R_0 = \int_0^l r \varphi_1^2 \varphi_2^2 ds$$

В выражениях (2.6) величины  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  представляют собой частоты собственных колебаний по первой и второй формам.

Анализ соответствующей уравнениям (2.5) линейной системы показывает, что при скорости  $\omega > \Omega_1(1 + D_1/K_1)$  возможна потеря устойчивости по первой форме, а при скорости  $\omega > \Omega_2(1 + D_2/K_2)$  — по второй. Однако суждение о том, каковы будут автоколебания после потери устойчивости, может быть получено лишь после решения нелинейной задачи и анализа устойчивости.

Следуя работам [2-4], решение системы (2.5) будем искать в виде

$$x_1 = A_{11} \cos \lambda_1 t, \quad x_2 = A_{22} \cos \lambda_2 t, \quad y_1 = A_{11} \sin \lambda_1 t, \quad y_2 = A_{22} \sin \lambda_2 t \quad (2.7)$$

где  $A_{11}, \lambda_1$  и  $A_{22}, \lambda_2$  — неизвестные амплитуды и частоты автоколебаний по первой и второй формам. Отметим, что при отыскании решения в виде (2.7) делается предположение, что траектории движения по каждой форме колебаний являются круговыми и что каждой форме соответствует своя частота.

Из вида системы (2.5) следует, что для нахождения решения достаточно рассмотреть всего лишь два из четырех уравнений — два первых или два последних. Это существенно облегчает решение и позволяет сразу воспользоваться результатами, полученными в п. 1.

Для нахождения неизвестных из системы (1.3) после преобразований получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= A_{11}(C_1 - M_1 \lambda_1^2) = 0, & Q_{22} &= A_{22}(C - M_2 \lambda_2^2) = 0 & (2.8) \\ S_{11} &= A_{11}[-K_1 \lambda_1 + K_1 \omega - D_1 \lambda - (R_1 A_{11}^2 + R_0 A_{22}^2) \lambda_1 - R_0 A_{22}^2 \lambda_2] = 0 \\ S_{22} &= A_{22}[-K_2 \lambda_2 + K_2 \omega - D_2 \lambda_2 - (R_2 A_{22}^2 + R_0 A_{11}^2) \lambda_2 - R_0 A_{11}^2 \lambda_1] = 0 \end{aligned}$$

Кроме тривиального  $A_{11} = A_{22} = 0$ , система (2.8) допускает две группы решений.

Первая группа соответствует одночастотным колебаниям, когда в системе возникают автоколебания или только по первой или только по второй форме

$$A_{11} \neq 0, \quad A_{22} = 0, \quad \lambda_1^2 = C_1/M_1 = \Omega_1^2 \quad \text{либо} \quad A_{22} \neq 0, \quad A_{11} = 0, \quad \lambda_2^2 = C_2/M_2 = \Omega_2^2$$

Вторая группа решений соответствует двухчастотным колебаниям, когда амплитуды  $A_{11} \neq 0, A_{22} \neq 0$  определяются из совместного решения третьего и четвертого уравнений системы (2.8), а частоты по-прежнему — из первого и второго уравнений этой системы.

Для анализа устойчивости решений воспользуемся системой (1.10). При сделанных предположениях о характере решения общая система (1.10) существенно упростится и будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{11}}{\partial A_{11}} \xi_{11} - M_1 \lambda_1 \xi_{11} + \frac{\partial S_{11}}{\partial A_{22}} \xi_{22} &= 0 \\ \frac{\partial S_{22}}{\partial A_{11}} \xi_{11} + \frac{\partial S_{22}}{\partial A_{22}} \xi_{22} - M_2 \lambda_2 \xi_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из системы (2.9) находятся два условия устойчивости

$$\lambda_1 \frac{\partial S_{22}}{\partial A_{22}} + \lambda_2 \frac{\partial S_{11}}{\partial A_{11}} < 0, \quad \frac{\partial S_{11}}{\partial A_{11}} \frac{\partial S_{22}}{\partial A_{22}} - \frac{\partial S_{22}}{\partial A_{11}} \frac{\partial S_{11}}{\partial A_{22}} > 0 \quad (2.10)$$

В рассматриваемых ниже примерах первое из условий (2.10) всегда выполняется при соблюдении второго. Заметим здесь, что постановка вопроса об устойчивости решений имеет смысл лишь при вещественности амплитуд, т. е.  $A_{11}^2 > 0$  и  $A_{22}^2 > 0$ .

Переходя к рассмотрению конкретных примеров, введем в рассмотрение безразмерные величины

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\omega}{\Omega_1}, \quad \delta_1 = \frac{D_1}{\sqrt{C_1 M_1}}, \quad \delta_2 = \frac{D_2}{\sqrt{C_2 M_2}}, \quad \alpha_1 = \frac{K_1}{\sqrt{C_1 M_1}}, \quad \alpha_2 = \frac{K_2}{\sqrt{C_2 M_2}}, \quad \rho_1 = \frac{R_1 l^2}{\sqrt{C_1 M_1}}, \\ \rho_2 &= \frac{R_2 l^2}{\sqrt{C_2 M_2}}, \quad \rho_0 = \frac{R_0 l^2}{\sqrt{C_1 M_1}}, \quad a_1^2 = \frac{\rho_1}{\alpha_1} \left( \frac{A_{11}}{l} \right)^2, \quad a_2^2 = \frac{\rho_1}{\alpha_1} \left( \frac{A_{22}}{l} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

где  $l$  — постоянная, имеющая размерность длины, например длина ротора.

Из системы (2.8) с учетом обозначений (2.11) получим:

для одночастотных режимов

$$1) \quad a_2 = 0, \quad \lambda_1 = \Omega_1, \quad a_1^2 = \beta - 1 - \delta_1 / \alpha_1 \quad (2.12)$$

$$2) \quad a_1 = 0, \quad \lambda_2 = \Omega_2, \quad a_2^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left[ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \beta \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right) - \frac{\delta_2}{\alpha_1} \right]$$

для двухчастотного режима

$$a_{*1}^2 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( \beta - 1 - \frac{\delta_1}{\alpha_1} \right) - \frac{\rho_0}{\rho_1} \left[ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \beta \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right) - \frac{\delta_2}{\alpha_1} \right] \left( 1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \right\} \quad \lambda_1 = \Omega_1$$

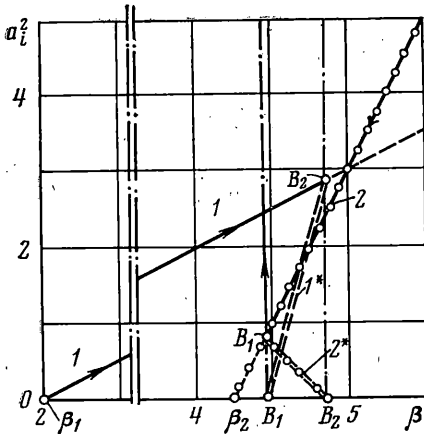
$$a_{*2}^2 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \beta \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right) - \frac{\delta_2}{\alpha_1} - \frac{\rho_0}{\rho_1} \left( \beta - 1 - \frac{\delta_1}{\alpha_1} \right) \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \right\}, \quad \lambda_2 = \Omega_2 \quad (2.13)$$

$$\Delta = \frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\rho_0^2}{\rho_1^2} \left( 1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)$$

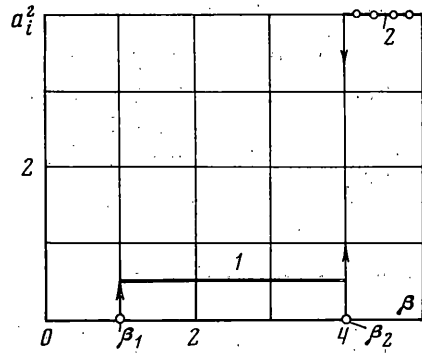
Устойчивость решений (2.12) и (2.13) устанавливается при помощи второго из условий (2.10), которое в безразмерном виде запишется так:

$$\left[ \beta - 1 - \frac{\delta_1}{\alpha_1} - 3a_1^2 - \left( 1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{\rho_0}{\rho_1} a_2^2 \right] \left[ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( \beta \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right) - \frac{\delta_2}{\alpha_1} - 3 \frac{\rho_2}{\rho_1} a_2^2 - \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \frac{\rho_0}{\rho_1} a_1^2 \right] - 4 \frac{\rho_0^2}{\rho_1^2} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left( 1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 a_1^2 a_2^2 > 0 \quad (2.14)$$

Приведем результаты вычислений для ротора постоянного сечения на двух шарнирных опорах с равномерно распределенными по длине силами внешнего и внутреннего трений. Будем предполагать, что линейные силы



Фиг. 1



Фиг. 2

внутреннего трения подчиняются гипотезе Фойгта [11], т. е. величины  $K_1$  и  $K_2$  не зависят от частоты.

Для указанного ротора  $\varphi_1 = \sin \pi s/l$ ,  $\varphi_2 = \sin 2\pi s/l$  и расчет по формулам (2.6) с учетом обозначений (2.11) дает

$$\alpha_2/\alpha_1=16, \quad \lambda_2/\lambda_1=4, \quad \rho_2/\rho_1=1, \quad \rho_0/\rho_1=2/3, \quad \delta_1/\delta_2=1$$

На фиг. 1 построены амплитудные зависимости при значениях  $\delta_1/\alpha_1=1$ ,  $\delta_2/\alpha_1=1$ . На фиг. 1 и на всех последующих использованы обозначения: 1 и 2 — квадраты амплитуд одночастотных режимов соответственно с частотами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ; 1\* и 2\* — то же самое для двухчастотного режима. Величины  $\beta_1$  и  $\beta_2$  обозначают границы потери устойчивости соответственно по первой и второй формам (для линейной задачи). Величины  $B_1$  и  $B_2$  определяют диапазон скоростей, в пределах которого возможны решения для двухчастотного режима. Устойчивость всех решений устанавливалась при помощи условия (2.14). Устойчивые режимы показаны сплошными линиями, неустойчивые — пунктирными.

Анализ показал, что решения для двухчастотного режима в диапазоне  $B_1 \div B_2$  хотя и существуют математически, однако являются неустойчивыми.

ми. В диапазоне  $\beta_1 \div V_1$  существуют и являются устойчивыми одночастотные автоколебания с частотой  $\lambda_1$ , а при скоростях  $\beta > V_2$  — колебания с частотой  $\lambda_2$ . Диапазон  $V_1 \div V_2$  для одночастотных колебаний является переходным в том смысле, что здесь возможно существование устойчивых колебаний с частотой  $\lambda_1$  или  $\lambda_2$ . Реализация колебаний с той или другой частотой будет определяться начальными условиями. При плавном изменении скорости  $\beta$  смена режима с частотой  $\lambda_1$  на режим с частотой  $\lambda_2$  и обратно в диапазоне  $V_1 \div V_2$  происходит скачкообразно и здесь возможно «затягивание» колебаний.

Получим решение в предположении, что силы внутреннего трения подчиняются гипотезе Бока, согласно которой относительное рассеивание энергии в материале  $\psi$  не зависит от частоты колебаний [14]. Именно при таком характере сил внутреннего трения рассмотрена задача в работе [2], стр. 104–107<sup>4</sup>, а также решены задачи об автоколебаниях неуравновешенных роторов в работах [4, 5].

Для реализации гипотезы Бока необходимо в исходных уравнениях (2.1) и выражениях (2.6) положить  $k = EI\psi/2\pi\nu$ , где  $\nu$  — частота возможных колебаний. Полагая далее, что относительные рассеяния энергии по различным формам независимы, и учитывая, что частота при колебаниях по первой форме равна  $\nu = |\omega - \lambda_1|$ , а по второй  $\nu = |\omega - \lambda_2|$ , представим величины  $K_1$  и  $K_2$  в форме  $K_1 = H_1/|\omega - \lambda_1|$ ,  $K_2 = H_2/|\omega - \lambda_2|$ .

Введем обозначение

$$\Psi_1 = \psi/2\pi = H_1/C_1, \quad \Psi_2 = H_2/C_2, \quad a_i^2 = \rho_i \Psi^{-1} (A_i/l)^2 \quad (i=1, 2)$$

Анализ соответствующей линейной задачи показывает, что при  $\Psi_1 > \delta_1$  и  $\omega > \Omega_1$  возможна потеря устойчивости по первой форме, а при  $\Psi_2 > \delta_2 \lambda_2 \lambda_1^{-1}$  и  $\omega > \Omega_2$  также и по второй форме.

Приведем окончательные результаты:  
для одночастотных режимов

$$1) \quad a_2 = 0, \quad \lambda_1 = \Omega_1, \quad a_1^2 = \frac{\beta - 1}{|\beta - 1|} - \frac{\delta_1}{\Psi_1}$$

$$2) \quad a_1 = 0, \quad \lambda_2 = \Omega_2, \quad a_2^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left[ \frac{\lambda_1 \Psi_2 (\beta - \lambda_2 \lambda_1^{-1})}{\lambda_2 \Psi_1 |\beta - \lambda_2 \lambda_1^{-1}|} - \frac{\delta_2}{\Psi_1} \right]$$

для двухчастотного режима

$$a_{*1}^2 = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( \frac{\beta - 1}{|\beta - 1|} - \frac{\delta_1}{\Psi_1} \right) - \frac{\rho_0}{\rho_1} \left( \frac{\Psi_2 \lambda_1}{\Psi_1 \lambda_2} \frac{\beta - \lambda_2 \lambda_1^{-1}}{|\beta - \lambda_2 \lambda_1^{-1}|} - \frac{\delta_2}{\Psi_1} \right) \left( 1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \right]$$

$$\lambda_1 = \Omega_1$$

$$a_{*2}^2 = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{\Psi_2 \lambda_1}{\Psi_1 \lambda_2} \frac{\beta - \lambda_2 \lambda_1^{-1}}{|\beta - \lambda_2 \lambda_1^{-1}|} - \frac{\delta_2}{\Psi_1} - \frac{\rho_0}{\rho_1} \left( \frac{\beta - 1}{|\beta - 1|} - \frac{\delta_1}{\Psi_1} \right) \left( 1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \right], \quad \lambda_2 = \Omega_2$$

$$\Delta = \rho_2 \rho_1^{-1} - \rho_0^2 \rho_1^{-2} (1 + \lambda_2 \lambda_1^{-1}) (1 + \lambda_1 \lambda_2^{-1})$$

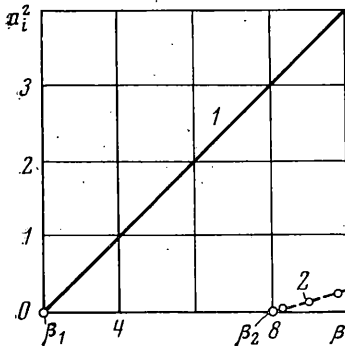
Условие устойчивости решений

$$\left[ \frac{\beta - 1}{|\beta - 1|} - \frac{\delta_1}{\Psi_1} - 3a_1^2 + \left( 1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{\rho_0}{\rho_1} a_2^2 \right] \left[ \frac{\Psi_2 \lambda_1 (\beta - \lambda_2 \lambda_1^{-1})}{\Psi_1 \lambda_2 |\beta - \lambda_2 \lambda_1^{-1}|} - \frac{\delta_2}{\Psi_1} - 3 \frac{\rho_2}{\rho_1} a_2^2 - \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \frac{\rho_0}{\rho_1} a_1^2 \right] - 4 \frac{\rho_0^2}{\rho_1^2} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left( 1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 a_1^2 a_2^2 > 0$$

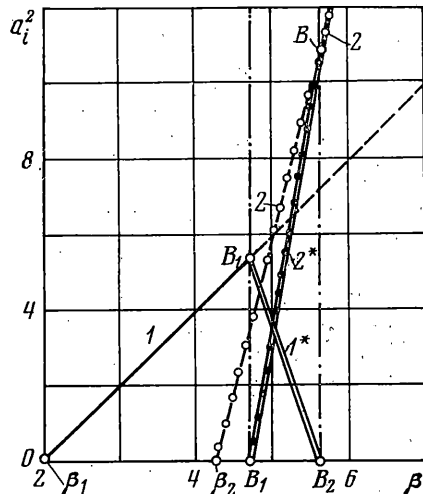
<sup>4</sup> В работе [2] характер сил внутреннего трения строго не оговорен.

Для ротора постоянного сечения на шарнирных опорах дополнительно имеем  $\Psi_2/\Psi_1=16$ . Расчеты показали, что режим двухчастотных колебаний здесь также не существует ( $a_{*1}^2 > 0$ ,  $a_{*2}^2 < 0$ ) и возможны, как и для рассмотренного выше случая сил внутреннего трения по Фойгту, только одночастотные режимы: с частотой  $\lambda_1$  в диапазоне скоростей  $\beta_1 \div \beta_2$  и с частотой  $\lambda_2$  при скоростях  $\beta > \beta_2$ . Однако в отличие от рассмотренного выше случая здесь переходный диапазон скоростей отсутствует и при скорости  $\beta = \beta_2$  автоколебания с одной частотой скачкообразно, без затягиваний переходят в автоколебания с другой частотой. Эти результаты совпадают с качественными выводами работы [2] и должны, видимо, совпадать с результатами работ [4, 5], если в последних исключить влияющие неуравновешенности на автоколебания. На фиг. 2 приведены результаты расчетов при  $\delta_1/\Psi_1=1/2$ ,  $\delta_2/\Psi_1=1/2$ .

В рассмотренных примерах автоколебания высшего порядка с ростом скорости подавляли автоколебания низшего порядка. Это вызывалось тем, что интенсивность сил внутреннего трения, связанных с изгибной деформацией вала, резко растет с ростом порядка колебаний при неизменной ин-



Фиг. 3



Фиг. 4

тенсивности сил внешнего трения. Для неконсервативных сил иного происхождения возможен другой характер взаимодействия между автоколебаниями различных порядков.

Рассмотрим колебания ротора, вращающегося с небольшим зазором в жидкости или газе. Предполагая, что ротор в зазоре занимает центральное положение и что действующие здесь силы аналогичны гидродинамическим силам в подшипниках скольжения или в уплотнениях, уравнения движения ротора запишем в виде

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( EI \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) + k \left( \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{1}{2} \omega y \right) + f_x = 0$$

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \right) + k \left( \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{1}{2} \omega x \right) + f_y = 0 \quad (2.15)$$

где  $k$  — распределенный коэффициент неконсервативных сил гидродинамического происхождения, зависящий от свойств жидкости, размеров подшипника или уплотнения и других факторов.



Для системы (2.15) изложенный метод решения приводит к системе уравнений, аналогичной (2.5) с такими отличиями: величины  $D_1=D_2=0$ ; перед величиной  $\omega$  появляется коэффициент  $1/2$ , и в отличие от (2.6) величины  $K_1$  и  $K_2$  равны

$$K_1 = \int_0^l k\varphi_1^2 ds, \quad K_2 = \int_0^l k\varphi_2^2 ds \quad (2.16)$$

Анализ соответствующей линейной системы здесь показывает, что при  $\omega > 2\Omega_1$  возможна потеря устойчивости по первой форме, а при  $\omega > 2\Omega_2$  — также и по второй форме собственных колебаний.

Вычисления амплитуд автоколебаний и соответствующий анализ устойчивости производятся здесь при помощи формул, аналогичных выписанным выше с соответствующими изменениями.

В качестве примера рассмотрим тот же ротор постоянного сечения на шарнирных опорах с равномерно распределенными по длине гидродинамическими силами. Для такого ротора в соответствии с формулами (2.6) и (2.16) имеем

$$\lambda_2/\lambda_1=4, \quad \alpha_2/\alpha_1=1, \quad \rho_2/\rho_1=1, \quad \rho_0/\rho_1=2/3$$

Расчеты показали (фиг. 3), что здесь режима двухчастотных колебаний не существует. В диапазоне скоростей  $\beta > \beta_1$  существуют решения только для одночастотных режимов, причем устойчивыми будут только автоколебания с частотой  $\lambda_1$ . Таким образом, в рассматриваемом случае автоколебания низшего порядка будут подавлять автоколебания высшего порядка.

Из приведенных расчетов следует, что для рассмотренного ротора не существует режима двухчастотных автоколебаний, что можно объяснить сильным взаимодействием между формами колебаний (большие величины  $\rho_0/\rho_1$  и  $\rho_0/\rho_2$ ). На фиг. 4 представлена построенная по формулам (2.12) и (2.13) амплитудная зависимость для некоторого гипотетического ротора с меньшим взаимодействием между формами ( $\rho_0/\rho_1 = \rho_0/\rho_2 = 2/15$ ), для которого существует устойчивый режим двухчастотных автоколебаний. На фиг. 4 видно, что в этом случае решения одночастотного режима непрерывно, без скачков переходят в режим двухчастотных автоколебаний и наоборот.

Таким образом, в роторных системах со многими степенями свободы режим автоколебаний может зависеть, в частности, от вида рассматриваемой системы, характера действующих сил, а в некоторых случаях и от начальных условий.

Использованный выше метод решения и анализа устойчивости содержит ряд предположений и допущений. Поэтому некоторые результаты аналитических расчетов были сопоставлены с «точными» решениями, которые получались путем численного интегрирования исходной системы (2.5) методом Рунге — Кутты и Адамса на ЭВМ. Расчеты выполнялись при некоторых произвольно задаваемых начальных условиях и производились до установления стационарных автоколебаний. Сравнивались величины амплитуд и частоты при одно- и двухчастотных режимах, расположение границ смены режимов и их устойчивость, а также зависимость режимов от начальных условий. Сравнение показало, что по амплитудам, частотам и устойчивости аналитические решения как при одночастотных, так и двухчастотных режимах, практически совпадают с численными, полученными при изменении параметров задачи в широком диапазоне, в том числе и при немалых значениях параметров  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $\rho$  (порядка единицы). Это указывает на то, что изложенный метод решения дает достоверные результаты.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Бологин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
2. *Кушуль М. Я.* Автоколебания роторов. М., Изд-во АН СССР, 1963.
3. *Бондаренко Н. И., Голоскоков Е. Г.* Об автоколебаниях соосных роторов. В сб.: Динамика и прочность машин, вып. 4. Изд-во Харьковск. ун-та, 1966.
4. *Овчарова Д. К., Голоскоков Е. Г.* Автоколебания ротора с двумя дисками. В сб.: Динамика и прочность машин, вып. 12. Изд-во Харьковск. ун-та, 1971.
5. *Аникеев Г. И., Модлина П. В.* Исследование автоколебаний ротора за второй критической скоростью. В сб.: Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем. М., «Наука», 1975.
6. *Майер А. Г.* К теории связанных колебаний двух самовозбуждающихся генераторов. Уч. зап. Горьковск. ун-та, 1935, т. 2, № 3.
7. *Мапешин Н. К., Хохлов Р. В.* Взаимная синхронизация двух молекулярных генераторов при малой связи. Научн. докл. высш. школы. Радиотехника и электроника, 1958, № 3.
8. *Ланда П. С., Ларионцев Е. Г.* Режимы биений и синхронизации встречных волн во вращающемся кольцевом лазере. Радиотехника и электроника, 1970, т. 15, вып. 6.
9. *Позняк Э. Л.* Нелинейные колебания роторов на подшипниках скольжения. В сб.: Динамика гибких роторов. М., «Наука», 1972.
10. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. М., «Мир», 1963.
11. *Пановко Я. Г.* Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М., Физматгиз, 1963.