

О СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЯХ
МАЯТНИКОВЫХ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
ПРИ ЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОСНОВАНИЯ

В. С. ЕВГЕНЬЕВ, М. А. ПАВЛОВСКИЙ

(Киев)

При исследовании систематических ошибок маятниковых чувствительных элементов в условиях линейных вибраций часто применяют метод последовательных приближений Пикара — Пеано [1-4] или, что практически равноценно, формальные разложения решения в ряд по степеням малого параметра [5]. При этом обычно ограничиваются небольшим числом приближений, не затрагивая вопроса о сходимости рядов, в виде которых ищется решение [6, 7]. Введение малого параметра в уравнения движения маятниковых устройств позволяет говорить об асимптотической сходимости рядов, однако в этом случае накладываются ограничения либо на параметры вибрации (амплитуду, частоту), либо на параметры маятника (приведенную длину, частоту собственных колебаний) [4, 5, 7].

В данной работе на основе метода гармонического баланса найдены условия, при которых ряд, построенный по методу последовательных приближений, будет сходящимся. Получены формулы, позволяющие рассчитать систематическую погрешность маятникового чувствительного элемента при интенсивной вибрации основания в широком частотном диапазоне.

1. Рассмотрим линеаризованное дифференциальное уравнение движения маятникового чувствительного элемента, установленного на поступательно вибрирующем основании

$$\theta'' + 2h\theta' + [\omega_0^2 + \mu \sin(\omega t + \varphi_2)]\theta = \lambda \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (1.1)$$

Здесь θ — угол отклонения маятника от вертикали; h — коэффициент демпфирования; ω_0 — частота собственных незатухающих колебаний маятника; μ , λ — параметры вибрации; $\mu = \omega_0^2 n_y$; $\lambda = \omega_0^2 n_x$; $n_y = W_y / g$, $n_x = W_x / g$ — вибрационные перегрузки по вертикальной и горизонтальной осям соответственно; ω — частота вибрации.

Не накладывая в дальнейшем ограничений на частотный диапазон линейных вибраций, исследуем устойчивость решений уравнения (1.1), определяемую характером решения однородного уравнения

$$\theta'' + 2h\theta' + f(\omega t)\theta = 0 \quad (1.2)$$

где $h > 0$, $\omega > 0$, $f(\omega t)$ — периодическая интегрируемая непрерывная функция с периодом $T = 2\pi / \omega$.

Для неограниченной устойчивости [8] рассматриваемой динамической системы, описываемой уравнением (1.2), в соответствии с теоремой В. А. Якубовича [9], необходимо и достаточно, чтобы было выполнено неравенство

$$h^2 > \frac{1}{8} [\omega_0^2 + \mu - \omega_0 (\omega_0^2 + 2\mu)^{1/2}] \quad (1.3)$$

Ниже приведены минимальные значения коэффициента затухания $\zeta^* = h\omega_0^{-1}$, обеспечивающего неограниченную устойчивость решений урав-

нения (1.2) при заданном отношении μ к ω_0 :

$\frac{\mu}{\omega_0}$	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6
ζ^*	0.11	0.18	0.25	0.31	0.41	0.50	0.58	0.65

Отсюда следует, что для большинства типов маятниковых устройств, применяемых на практике, рассматриваемое условие устойчивости выполняется в достаточно широком диапазоне виброперегрузок.

Нетрудно убедиться, что соблюдение условий теоремы Якубовича гарантирует существование, единственность и устойчивость частного T -периодического решения неоднородного уравнения (1.1), которое может быть представлено в форме ряда Фурье

$$\theta = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t) \quad (1.4)$$

Подставив выражение (1.4) в уравнение (1.1) и приравняв коэффициенты при одинаковых гармониках, получим бесконечную систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов ряда Фурье

$$\omega_0^2 a_0 = -1/2 \mu (a_1 \cos \varphi_2 + b_1 \sin \varphi_2) \quad (1.5)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) a_1 - 2h\omega b_1 = \lambda \cos \varphi_1 - \mu a_0 \cos \varphi_2 - 1/2 \mu (a_2 \sin \varphi_2 - b_2 \cos \varphi_2)$$

$$2h\omega a_1 + (\omega_0^2 - \omega^2) b_1 = \lambda \sin \varphi_1 - \mu a_0 \sin \varphi_2 - 1/2 \mu (a_2 \cos \varphi_2 + b_2 \sin \varphi_2)$$

$$(\omega_0^2 - k^2 \omega^2) a_k - 2hk\omega b_k = -1/2 \mu \sin \varphi_2 (a_{k-1} + a_{k+1}) - 1/2 \mu \cos \varphi_2 (b_{k-1} - b_{k+1})$$

$$2hk\omega a_k + (\omega_0^2 - k^2 \omega^2) b_k = 1/2 \mu \cos \varphi_2 (a_{k-1} - a_{k+1}) + 1/2 \mu \sin \varphi_2 (b_{k-1} + b_{k+1})$$

Для оценки эффективности метода гармонического баланса при определении систематических погрешностей маятниковых чувствительных элементов в условиях линейных колебаний основания и сравнения его с другими приближенными методами представим коэффициенты ряда Фурье в виде бесконечных убывающих степенных рядов

$$a_i = a_i^{(1)} + a_i^{(2)} + \dots \quad (i=0,1,2,\dots), \quad b_j = b_j^{(1)} + b_j^{(2)} + \dots \quad (j=1,2,\dots) \quad (1.6)$$

Если потребовать, чтобы коэффициенты $a_i^{(1)}$, $b_j^{(1)}$, $a_i^{(2)}$, $b_j^{(2)}$, ... удовлетворяли следующим уравнениям, полученным из системы (1.5):

$$(\omega_0^2 - \omega^2) a_1^{(1)} - 2h\omega b_1^{(1)} = \lambda \cos \varphi_1, \quad 2h\omega a_1^{(1)} + (\omega_0^2 - \omega^2) b_1^{(1)} = \lambda \sin \varphi_1$$

$$\omega_0^2 a_0^{(1)} = -1/2 \mu (a_1^{(1)} \cos \varphi_2 + b_1^{(1)} \sin \varphi_2), \quad (\omega_0^2 - 4\omega^2) a_2^{(1)} - 4h\omega b_2^{(1)} =$$

$$= -1/2 \mu (a_1^{(1)} \sin \varphi_2 + b_1^{(1)} \cos \varphi_2)$$

$$4h\omega a_2^{(1)} + (\omega_0^2 - 4\omega^2) b_2^{(1)} = 1/2 \mu (a_1^{(1)} \cos \varphi_2 - b_1^{(1)} \sin \varphi_2)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) a_1^{(2)} - 2h\omega b_1^{(2)} = -\mu a_0^{(1)} \cos \varphi_2 - 1/2 \mu (a_2^{(1)} \sin \varphi_2 - b_2^{(1)} \cos \varphi_2)$$

$$2h\omega a_1^{(2)} + (\omega_0^2 - \omega^2) b_1^{(2)} = -\mu a_0^{(1)} \sin \varphi_2 - 1/2 \mu (a_2^{(1)} \cos \varphi_2 + b_2^{(1)} \sin \varphi_2)$$

$$(\omega_0^2 - 4\omega^2) a_2^{(2)} - 4h\omega b_2^{(2)} = -1/2 \mu (a_1^{(2)} \sin \varphi_2 + b_1^{(2)} \cos \varphi_2)$$

$$4h\omega a_2^{(2)} + (\omega_0^2 - 4\omega^2) b_2^{(2)} = 1/2 \mu (a_1^{(2)} \cos \varphi_2 - b_1^{(2)} \sin \varphi_2) \quad (1.7)$$

$$(\omega_0^2 - 9\omega^2) \omega_3^{(1)} - 6h\omega b_3^{(1)} = -1/2 \mu (a_2^{(1)} \sin \varphi_2 + b_2^{(1)} \cos \varphi_2)$$

$$6h\omega a_3^{(1)} + (\omega_0^2 - 9\omega^2) b_3^{(1)} = 1/2 \mu (a_2^{(1)} \cos \varphi_2 - b_2^{(1)} \sin \varphi_2)$$

$$(\omega_0^2 - k^2 \omega^2) a_k^{(n)} - 2hk\omega b_k^{(n)} = -1/2 \mu (a_{k-1}^{(n)} \sin \varphi_2 + b_{k-1}^{(n)} \cos \varphi_2)$$

$$2hk\omega a_k^{(n)} + (\omega_0^2 - k^2 \omega^2) b_k^{(n)} = 1/2 \mu (a_{k-1}^{(n)} \cos \varphi_2 - b_{k-1}^{(n)} \sin \varphi_2)$$

то легко убедиться, что система рекуррентных соотношений (1.7) представляет собой схему построения решения уравнения (1.1) методом последовательных приближений.

Таким образом, сходимость ряда, найденного методом последовательных приближений, определяется сходимостью ряда Фурье.

Отметим, что совместное решение первых трех уравнений системы (1.7) позволяет получить соответствующие результаты, найденные, например, в работах [1, 2, 4, 7].

Если в решениях (1.4) ограничиться только первой гармоникой ($k=1$), то сравнение первых трех уравнений систем (1.5) и (1.7) показывает, что при нахождении систематического отклонения маятникового чувствительного элемента от вертикали методом последовательных приближений не учитывается взаимная связь между амплитудой основной гармоники вынужденных колебаний и постоянной составляющей сигнала маятников при линейных вибрациях. Очевидно, указанной взаимосвязью можно пренебречь, если $\mu \ll \lambda$, что обычно и предполагается при решении уравнения (1.1) методом последовательных приближений. Поэтому результаты, найденные методом гармонического баланса с удержанием в решении (1.4) двух первых гармоник ряда, могут быть получены методом последовательных приближений в том случае, если найти не менее четырех приближений [10].

В последующем, при решении уравнения (1.1) методом гармонического баланса, указанного жесткого ограничения на параметр вибрации μ накладывать не будем.

2. Рассмотрим вопросы сходимости рядов (1.4), учитывая введенные разложения (1.6).

Применительно к рассматриваемой задаче имеет место теорема Бернштейна об абсолютной сходимости рядов Фурье, так как условие Липшица выполняется вследствие дифференцируемости функции $\theta(t)$.

Абсолютная сходимость ряда (1.4) в силу известных теорем о двойных и повторных рядах влечет за собой, учитывая (1.6), сходимость двойных и повторных рядов

$$\sum_{i,n=1}^{\infty} a_i^{(n)}, \quad \sum_{j,n=1}^{\infty} b_j^{(n)}; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_i^{(n)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(n)}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_j^{(n)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_j^{(n)}$$

и равенство соответствующих сумм.

Решение системы уравнений (1.8) запишем в форме Крамера

$$a_0 = \Delta a_0 / \Delta, \quad a_i = \Delta a_i / \Delta, \quad b_j = \Delta b_j / \Delta, \dots$$

где Δ — блочный бесконечный определитель Хилла

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \beta_1 & A_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \beta_2 & A_2 & \alpha_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \beta_3 & A_3 & \alpha_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Здесь α_0 — матрица-строка; $\alpha_0 = (1/2\mu\omega_0^{-2} \cos \varphi_2, 1/2\mu\omega_0^{-2} \sin \varphi_2)$; β_1 — матрица-столбец $\beta_1^T = (\mu \cos \varphi_2, \mu \sin \varphi_2)$; остальные блоки представляют собой квадратные матрицы вида

$$A_k = \begin{vmatrix} p_k & -q_k \\ q_k & p_k \end{vmatrix}, \alpha_k = 1/2\mu \begin{vmatrix} \sin \varphi_2 & -\cos \varphi_2 \\ \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \end{vmatrix}, \beta_{k+1} = 1/2\mu \begin{vmatrix} \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \\ -\cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \end{vmatrix}$$

$$p_k = \omega_0^2 - k^2 \omega^2, \quad q_k = 2hk\omega \quad (k=1, 2, \dots)$$

Определители Δa_i , Δb_i получают из главного определителя Δ заменой соответствующих его столбцов столбцом ρ_λ

$$\rho_\lambda^T = (0, \lambda \cos \varphi_1, \lambda \sin \varphi_1, 0, 0, \dots)$$

Нетрудно показать (см., например, [11]), что рассматриваемые определители относятся к известному классу сходящихся определителей — к нормальным определителям.

Для оценки характера движения маятника при вибрации и возможности удержания в решении (1.4) конечного (небольшого) числа членов ряда Фурье было проведено решение дифференциального уравнения (1.1) на аналоговой и цифровой вычислительных машинах. При решении задачи на аналоговой машине особое внимание обращалось на характер решения уравнения (1.1) при различных соотношениях собственных частот маятника и частот колебаний основания, а также при различных коэффициентах демпфирования маятника и величинах вертикальной перегрузки n_y . Анализ результатов моделирования показал, что при $0.3 \leq \xi \leq 0.6$ и $0.5 \leq n_y \leq 10$ решение имеет периодический характер. При этом субгармонический резонанс отсутствует. Поэтому для численного решения (1.1) на ЦВМ был выбран метод гармонического баланса с удержанием в решении десяти первых гармоник ряда Фурье. Результаты расчета показали, что в широком частотном диапазоне ряд Фурье сходится достаточно быстро (особенно при $\omega^2 \gg \omega_0^2$), амплитуда каждой последующей гармоники $c_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}$ во всех случаях меньше предыдущей.

В табл. 1 приведены отношения амплитуд гармоник c_{k+1} (при $k=1, 2, \dots, 9$) к первой гармонике c_1 для различных соотношений частот ω и ω_0 , а также величин вертикальной перегрузки n_y .

Из приведенных в табл. 1 числовых данных следует, что при $\omega^2 \gg \omega_0^2$ во многих практически важных случаях в решении (1.4) можно ограничиться одной гармоникой ряда Фурье. В случае $\omega^2 \ll \omega_0^2$ сходимость ряда (1.4) ухудшается, так что в решении необходимо удерживать большее число гармоник. Для оценки влияния числа гармоник ряда Фурье на постоянную составляющую ошибки маятникового чувствительного элемента были вычислены значения a_0 при $k=10$ и $k=2$, сведенные в табл. 2. Из этой таблицы видно, что при численном расчете систематических погрешностей маятниковых устройств в условиях интенсивных поступательных колебаний основания в решении (1.4) достаточно ограничиться двумя первыми гармониками ряда Фурье.

Таблица 1

$n_y = 1$	$n_y = 2$	$n_y = 4$	$n_y = 6$
$\omega = 3\omega_0$			
$1.42 \cdot 10^{-2}$	$2.80 \cdot 10^{-2}$	$5.75 \cdot 10^{-2}$	$8.41 \cdot 10^{-2}$
$8.80 \cdot 10^{-5}$	$3.47 \cdot 10^{-4}$	$1.38 \cdot 10^{-3}$	$3.12 \cdot 10^{-3}$
$3.00 \cdot 10^{-7}$	$2.43 \cdot 10^{-6}$	$1.95 \cdot 10^{-5}$	$6.55 \cdot 10^{-5}$
$5.60 \cdot 10^{-10}$	$1.09 \cdot 10^{-8}$	$1.77 \cdot 10^{-7}$	$8.85 \cdot 10^{-7}$
$9.50 \cdot 10^{-13}$	$3.17 \cdot 10^{-11}$	$1.08 \cdot 10^{-9}$	$1.16 \cdot 10^{-8}$
$1.44 \cdot 10^{-15}$	$7.29 \cdot 10^{-14}$	$4.88 \cdot 10^{-12}$	$7.89 \cdot 10^{-11}$
$9.60 \cdot 10^{-19}$	$1.29 \cdot 10^{-17}$	$1.81 \cdot 10^{-14}$	$4.02 \cdot 10^{-13}$
$8.80 \cdot 10^{-22}$	$1.57 \cdot 10^{-19}$	$4.70 \cdot 10^{-17}$	$1.69 \cdot 10^{-15}$
$3.90 \cdot 10^{-25}$	$1.73 \cdot 10^{-22}$	$5.31 \cdot 10^{-20}$	$2.04 \cdot 10^{-18}$
$n_y = 1$	$n_y = 2, 2$	$n_y = 4, 4$	$n_y = 9$
$\omega_0 = 3\omega$			
0.44	0.71	0.85	0.93
0.17	0.44	0.68	0.83
$4.58 \cdot 10^{-2}$	0.24	0.49	0.70
$8.57 \cdot 10^{-3}$	$0.98 \cdot 10^{-1}$	0.34	0.58
$1.12 \cdot 10^{-3}$	$2.90 \cdot 10^{-2}$	0.20	0.45
$1.07 \cdot 10^{-4}$	$0.62 \cdot 10^{-2}$	0.09	0.35
$7.77 \cdot 10^{-6}$	$0.10 \cdot 10^{-2}$	0.03	0.25
$4.44 \cdot 10^{-7}$	$1.10 \cdot 10^{-3}$	$0.79 \cdot 10^{-2}$	$1.47 \cdot 10^{-1}$
$1.30 \cdot 10^{-8}$	$0.16 \cdot 10^{-4}$	$0.16 \cdot 10^{-2}$	$0.60 \cdot 10^{-1}$

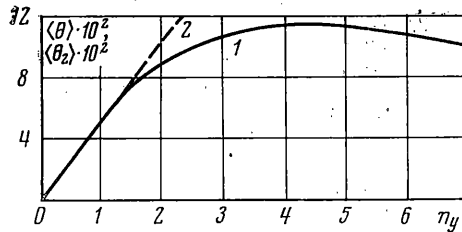
Таблица 2

n_y	$k = 10$	$k = 2$
$\omega = 3\omega_0$		
1	$0.4942758 \cdot 10^{-1}$	$0.4942758 \cdot 10^{-1}$
2	$0.8618271 \cdot 10^{-1}$	$0.8618271 \cdot 10^{-1}$
4	0.1139374	0.1139372
6	0.1092014	0.1092009
8	$0.9670716 \cdot 10^{-1}$	$0.9670624 \cdot 10^{-1}$
$\omega_0 = 3\omega$		
0.22	0.1306364	0.1306446
0.67	0.3792867	0.3786526
0.78	0.2471378	0.2470435
1	0.1530121	0.1536098
1.1	0.1302779	0.1312824

3. Исследуем постоянную составляющую погрешности физических маятников для различных частных случаев соотношений частот ω и ω_0 , принимая для простоты $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Используя метод гармонического баланса с удержанием двух первых гармоник ряда Фурье, а также метод последовательных приближений для решения уравнения (1.1), выпишем формулы систематических ошибок маятникового чувствительного элемента $\langle \theta \rangle$ и $\langle \theta_2 \rangle$, полученные методами гармонического баланса и последовательных приближений (во втором приближении) соответственно для различных значений $m = \omega / \omega_0$:

m	$\langle \theta \rangle$	$\langle \theta_2 \rangle$
$m^2 \ll 1$	$^{1/2} n_x n_y [1 - ^{3/4} n_y^2 + 4 \zeta^2 m^2 (1 + ^{1/4} n_y^2)]^{-1}$	$^{1/2} n_x n_y (1 + 4 \zeta^2 m^2)^{-1}$
$m=2$	$\frac{3}{2} \frac{n_x n_y \omega_0^2}{9 \omega_0^2 + 16 h^2 - ^{1/2} n_y^2}$	$\frac{3}{2} \frac{n_x n_y \omega_0^2}{9 \omega_0^2 + 16 h^2}$
$m=1$	$\frac{3}{8} \frac{n_x n_y^3}{84 \zeta^4 + 4(9 + n_y^2) \zeta^2 - ^{5/16} n_y^4}$	0
$m = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{8} \frac{n_x n_y \zeta^2}{\zeta^4 + ^{1/16} \zeta^2 (9 - 2 n_y^2) + ^{1/64} n_y^4}$	$\frac{3}{8} \frac{n_x n_y}{\zeta^2 + ^{9/16}}$
$m^2 \ll 1$	$\frac{n_x n_y \omega_0^2}{2(\omega^2 + 4 h^2 + ^{1/2} n_y^2 \omega_0^2)}$	$\frac{n_x n_y \omega_0^2}{2(\omega^2 + 4 h^2)}$

Из сравнения соответствующих формул следует, что при $n_y^2 \ll 1$ они совпадают. Отметим, что формула для определения $\langle \theta \rangle$ в случае $m^2 \gg 1$ найдена при учете только первой гармоники ряда Фурье. В соответствии с этой формулой построен график зависимости погрешности $\langle \theta \rangle$ от вер-



тикальной перегрузки n_y (при $n_x = \text{const} = 1$, $\zeta = 0.6$, $m = 3$, $k = 1$), представленной на фигуре (кривая 1), из которого следует, что систематическое отклонение маятника от вертикали с ростом n_y вначале возрастает, а затем, начиная с некоторого значения, уменьшается. На этой же фигуре приведен график зависимости $\langle \theta_2 \rangle$ от перегрузки n_y , имеющий линейный характер (кривая 2).

Нелинейный характер зависимости погрешности $\langle \theta \rangle$ от вертикальной перегрузки можно объяснить, используя, например, результаты работы [12], в которой методом малого параметра Пуанкаре решено нелинейное уравнение движения маятника с вибрирующей точкой подвеса. Из [12] следует, что маятник, подверженный влиянию одноосной вибрации, устанавливается по направлению вектора вибрации. В случае двухосной вибрации при возрастании вертикальной перегрузки n_y и постоянстве горизонтальной n_x результирующий вектор мгновенного ускорения W приближается к вертикали, что обуславливает уменьшение систематической ошибки маятника. Указанное изменение погрешности $\langle \theta \rangle$ и отражено на фигуре. Заметим, что этот вывод подтверждается результатами численного решения соответствующего уравнения на ЦВМ.

4. Определим методом гармонического баланса постоянную составляющую погрешности физического маятника, решая нелинейное уравнение вида

$$\theta'' + 2h\theta' + \omega_0^2 [1 + n_y \sin(\omega t + \varphi_2)] \sin \theta = \omega_0^2 n_x \sin(\omega t + \varphi_1) \cos \theta \quad (4.1)$$

при условии, что $\langle \theta \rangle = a_0 \ll 1$ и $a_1, b_1 \ll a_0$, и принимая

$$\begin{aligned} \sin \theta &\approx \sin a_0 + (a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t) \cos a_0 \\ \cos \theta &\approx \cos a_0 - (a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t) \sin a_0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Подставив (4.2) в уравнение (4.1), найдем

$$\begin{aligned} \langle \theta \rangle &= \frac{1}{2} n_x n_y (1 - m^2) (\cos \sigma + 2h\omega^{-1} \sin \sigma) [(1 - m^2)^2 + \\ &+ 4m^2 \zeta^2 + \frac{1}{2}(1 - m^2)(n_y^2 - n_x^2)]^{-1} \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\sigma = \varphi_2 - \varphi_1$ — сдвиг фаз между колебаниями.

Если в формуле (4.3) положить $\zeta \ll 1$ и $m^2 \gg 1$, то из нее как частный случай можно получить формулу, найденную в [10] при решении уравнения (4.1) методом усреднения.

В заключение рассмотрим систематическую погрешность маятника при косо́й вибрации основания, направленной под углом χ к вертикали, приняв $n_x = a\omega^2 g^{-1} \sin \chi$, $n_y = a\omega^2 g^{-1} \cos \chi$. Подставив выражения для n_x и n_y в формулу (4.3) и разложив ее знаменатель в биномиальный ряд, найдем выражение для искомой ошибки

$$\langle \theta \rangle = \frac{a^2 \omega^4 \sin 2\chi}{4g^2(m^2 + 4\zeta^2)} \left[1 - \frac{a^2 \omega^4 \cos 2\chi}{2g^2(m^2 + 4\zeta^2)} \right] \quad (4.4)$$

Из выражения (4.4) как частный случай следует формула, найденная в [13] методом последовательных приближений при учете величин третьего порядка малости.

Авторы благодарят Д. М. Климова за участие в обсуждении результатов работы.

Поступила 22 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. ЖЭТФ, 1951, т. 21, вып. 5.
2. Синельников А. Е. Уводы маятника на вибрирующем основании в случае действия эллиптической вибрации. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 6.
3. Сансон Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
4. Вольфсон Г. Б., Ривкин С. С., Тиль А. В. Влияние демпфирования физического маятника на уменьшение его систематических погрешностей при качке корабля. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 3.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.
6. Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г. Правдоподобность и доказательность в прикладной математике. Инж. ж. МТТ, 1967, № 2.
7. Луц Я. Л. Ошибки гироскопических приборов. Л., «Судостроение», 1968.
8. Айзерман М. А. Достаточное условие устойчивости одного класса динамических систем с переменными параметрами. ПММ, 1951, т. 15, вып. 3.
9. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., «Наука», 1972.
10. Павловский М. А. О постоянной составляющей сигнала маятников при вибрации. Прикл. механ., 1971, т. 7, вып. 4.
11. Вологин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956.
12. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
13. Арутюнов С. С. О демпфированном маятнике с вибрирующей точкой подвеса. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1959, вып. 45.