МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1977

УДК 531.383

ОБ УГЛОВЫХ ПОГРЕШНОСТЯХ СИСТЕМЫ ИНДИКАТОРНОЙ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

И. В. НОВОЖИЛОВ

(Москва)

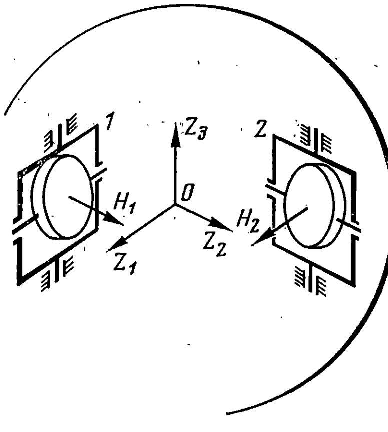
Для пространственной стабилизации ряда объектов (космический аппарат, приборная платформа навигационной системы и т. п.) часто используются индикаторные системы гироскопической стабилизации. При этом на стабилизируемый объект (см. фиг. 1) устанавливаются два трехстепенных гироскопа *1* и *2*. Гироскопы прецессируют в пространстве под действием моментов, развиваемых датчиками моментов по осям подвесов гироскопов. Положение гироскопов определяет требуемую ориентацию объекта, которая предписывается ему в силу назначения системы в целом. Объект отслеживает положение гироскопов по рассогласованиям, измеряемым в осях подвесов гироскопов.

Возмущения, действующие на объект и гироскоп, технические несовершенства изготовления и т. п. приводят к тому, что фактическая ориентация объекта не совпадает с предписанной.

Аналитическая оценка этих погрешностей ориентации осложняется тем, что объект и гироскоп образуют единую замкнутую систему, которая описывается нелинейными уравнениями высоких порядков; внешние воздействия, приложенные к системе, имеют широкий частотный спектр от «медленных», программных воздействий, определяющих предписанное движение объекта, до высокочастотных вибраций порядка нутационной частоты; аналитические оценки должны быть правомочными на «больших» интервалах времени, определяемых временем работы системы в целом; точность оценок должна отвечать высоким требованиям, предъявляемым к точности систем индикаторной стабилизации.

Построению оценок такого рода посвящена обширная литература (см., например, [1, 2]). Однако перечисленные трудности приводят к тому, что задача обычно решается в тех или иных упрощающих допущениях: не учитывается взаимное влияние гироскопов и объекта, рассматривается частный тип возмущений: либо «быстрые», либо «медленные», оценки строятся на «малом» интервале времени.

В данной работе погрешности ориентации оцениваются без этих упрощающих предположений.



Фиг. 1

1. Обозначим через $Oz_1z_2z_3$ правый ортогональный трехгранник, связанный со стабилизируемым объектом. Обозначим через $Ox_1x_2x_3$ положение трехгранника $Oz_1z_2z_3$, предписанное идеальным алгоритмом работы системы. Трехгранник $Ox_1x_2x_3$ может совпадать с сопровождающим траекторным трехгранником в навигационной задаче, с программным положением осей космического аппарата и т. п. Ориентацию трехгранника $Ox_1x_2x_3$ в абсолютном пространстве и его угловую скорость будем считать заданными функциями времени.

Угловое рассогласование трехгранников $z_1z_2z_3$ и $x_1x_2x_3$ — это искомая погрешность ориентации.

Компоновку i-го гироскопа ($i=1, 2$) относительно объекта зададим трехгранником $O_iz_{i1}z_{i2}z_{i3}$, жестко связанным с объектом. Точку O_i поместим в точку пересечения осей подвеса гироскопа, оси трехгранников $O_iz_{i1}z_{i2}z_{i3}$ параллельны осям трехгранника $Oz_1z_2z_3$. В невозмущенном положении гироскопа и при отсутствии технологических несовершенств изготовления ось его наружного кольца совпадает с осью z_{i1}, ось внутреннего кольца — с осью z_{i2}, ось собственного вращения — с z_{i3}.

Предположим, что все элементы конструкции гироскопов абсолютно жесткие, и обозначим через $O_ix_{i1}x_{i2}x_{i3}$, $O_iy_{i1}y_{i2}y_{i3}$ трехгранники, связанные с наружным и внутренним кольцами его подвеса. Положение $x_{i1}x_{i2}x_{i3}$ относительно $z_{i1}z_{i2}z_{i3}$ зададим тремя поворотами A_{i2}, A_{i3}, A_{i1} вокруг последовательных положений осей со вторыми индексами *2*, *3*, *1* (см. фиг. 2). Углы A_{i2}, A_{i3} — это погрешности установки оси наружного кольца относительно объекта, A_{i1} — угол поворота наружного кольца в своей оси. Положение трехгранника $y_{i1}y_{i2}y_{i3}$ зададим аналогично: углами B_{i1}, B_{i3} — погрешностями установки оси внутреннего кольца и углом B_{i2} — поворота внутреннего кольца в своей оси. Положение оси собственного вращения гироскопа относительно внутреннего кольца зададим двумя углами Γ_{i1}, Γ_{i2} — погрешностями установки этой оси.

Уравнения гироскопа составим в форме уравнений кинетических моментов относительно осей x_{i1} и y_{i2} для механических систем, участвующих во вращениях относительно этих осей. Примем собственный кинетический момент гироскопа постоянным. Предположим, что оси введенных трехгранников совпадают с главными центральными осями инерции элементов, с которыми они связаны. (Экваториальные моменты инерции ротора присоединяются к внутреннему кольцу.)

По ходу вычислений будем разлагать аналитические функции в ряды по своим аргументам и выписывать в явном виде лишь линейные и квадратичные члены разложений. Проделав выкладки, получим

$$(I_{x_{i1}}+I_{y_{i1}})\frac{d}{dT}(\mathrm{A}_{i1}{}^{\boldsymbol{\cdot}}+\Omega_{z_{i1}})+H_i(\mathrm{B}_{i2}{}^{\boldsymbol{\cdot}}+\Omega_{z_{i2}})+N_{i1}\mathrm{A}_{i1}{}^{\boldsymbol{\cdot}}=$$

$$=L_{x_{i1}}+H_i(\mathrm{A}_{i3}\Omega_{z_{i1}}-(\mathrm{A}_{i1}+\mathrm{B}_{i1}+\Gamma_{i1})\Omega_{z_{i3}})+(I_{x_{i2}}-I_{x_{i3}}-I_{y_{i3}})\Omega_{z_{i2}}\Omega_{z_{i3}}+$$

$$+I_{y_{i2}}(\mathrm{B}_{i2}{}^{\boldsymbol{\cdot}}+\Omega_{z_{i2}})\Omega_{z_{i3}}+\frac{d}{dT}\{(I_{y_{i1}}-I_{y_{i3}})\Omega_{z_{i3}}\mathrm{B}_{i2}-I_{y_{i1}}\Omega_{z_{i2}}(\mathrm{A}_{i3}+\mathrm{B}_{i3})-$$

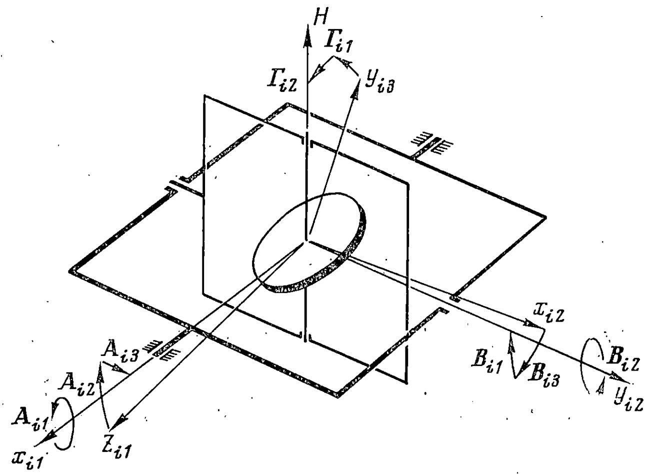
$$-I_{x_{i1}}\Omega_{z_{i2}}\mathrm{A}_{i3}+(I_{x_{i1}}+I_{y_{i1}})\Omega_{z_{i3}}\mathrm{A}_{i2}+I_{y_{i2}}(\mathrm{B}_{i2}{}^{\boldsymbol{\cdot}}+\Omega_{z_{i2}})\mathrm{B}_{i3}-H_i\Gamma_{i1}\mathrm{B}_{i3}\}$$

$$I_{y_{i2}}\frac{d}{dT}(\mathrm{B}_{i2}{}^{\boldsymbol{\cdot}}+\Omega_{z_{i2}})-H_i(\mathrm{A}_{i1}{}^{\boldsymbol{\cdot}}+\Omega_{z_{i1}})+N_{i2}\mathrm{B}_{i2}{}^{\boldsymbol{\cdot}}=$$

$$=L_{y_{i2}}+H_i((\mathrm{A}_{i3}+\mathrm{B}_{i3})\Omega_{z_{i2}}-(\mathrm{A}_{i2}+\mathrm{B}_{i2}+\Gamma_{i2})\Omega_{z_{i3}})+(I_{y_{i3}}-I_{y_{i1}})\times$$

$$\times(\mathrm{A}_{i1}{}^{\boldsymbol{\cdot}}+\Omega_{z_{i1}})\Omega_{z_{i3}}-I_{y_{i2}}\frac{d}{dT}\{-(\mathrm{A}_{i3}+\mathrm{B}_{i3})\Omega_{z_{i1}}+(\mathrm{A}_{i1}+\mathrm{B}_{i1})\Omega_{z_{i3}}-A_{i1}{}^{\boldsymbol{\cdot}}\mathrm{B}_{i3}\}$$

Здесь T — время, точкой обозначено дифференцирование по T; Ω_{z_1}, Ω_{z_2}, Ω_{z_3} — проекции вектора абсолютной угловой скорости трехгранника $z_1z_2z_3$ на его оси; H_i — кинетический момент гироскопа; $I_{x_{i1}}, \ldots$ — моменты инерции элементов конструкции относительно соответствующих осей связанных с ними трехгранников; $L_{x_{i_1}}$ $L_{y_{i_2}}$ — моменты внешних сил (помимо сил вязкого трения) относительно осей подвеса; N_{i1}, N_{i2} — коэффициенты сил вязкого трения в этих осях.



Фиг. 2

Будем далее считать гироскопы одинаковыми по своим массовым и динамическим характеристикам. При этом в обозначениях $I_{x_{i1}}, \ldots, H_i, N_{i1}, \ldots$ можно опустить индекс i:

$$I_{x_{i1}} = I_{x_1}, \ldots, H_i = H, \quad N_{i1} = N_1, \ldots .$$

Приведем уравнения (1.1) к безразмерной форме, проделав нормализацию величин, входящих в (1.1)

$$t = \frac{T}{T_*}, \quad \alpha_{i1} = \frac{\mathrm{A}_{i1}}{\mathrm{A}_*}, \quad \beta_{i1} = \frac{\mathrm{B}_{i1}}{\mathrm{B}_*}, \ldots, \quad \omega_{z_{i1}} = \frac{\Omega_{z_{1i}}}{\Omega_*}, \ldots$$

$$l_{y_{i1}} = \frac{L_{y_{i1}}}{L_*}, \ldots, i_{x_1} = \frac{I_{x_1}}{I_*}, \ldots$$

Здесь T_*, $\mathrm{A}_*, \ldots, I_*$ — характерные значения соответствующих величин. Выберем их так, чтобы $\alpha_{i1}, \ldots, i_{x_1}, \ldots$ не превосходили значений порядка единицы, а за время порядка T_* величины $\mathrm{A}_{i1}, \ldots$ изменялись на величину порядка своих характерных значений.

Угловые переменные A_{i1}, $\mathrm{B}_{i1}, \ldots$ не превосходят значений порядка единиц или долей угловой минуты, что определяется высокими требованиями по точности, предъявляемыми к системе. Поэтому выберем $\mathrm{A}_* = \mathrm{B}_* = \Gamma_* = \varepsilon$, где $\varepsilon \sim 10^{-3} \div 10^{-4}$. За характерную угловую скорость примем скорость колебаний объекта с амплитудой порядка ε, с периодами порядка характерного времени T_* этих колебаний. Тогда $\Omega_* = \varepsilon / T_*$. Величина T_* определяется частотой возмущающих сил, которыми вызваны колебания. «Худшими», с точки зрения погрешностей системы, являются высокочастотные возмущения, близкие к резонансным упругим частотам конструкции объекта и нутационным частотам гироскопов. Эти частоты обычно имеют одинаковый порядок величин — десятки, сотни герц. Возьмем T_* равным характерному времени нутационных колебаний гироскопа $T_* = (I_{x_1} + I_{y_1})^{1/2} I_{y_2}^{1/2} / H$. За характерный момент инерции удобно принять $I_* = (I_{x_1} + I_{y_1})^{1/2} I_{y_2}^{1/2}$. Подставим выбранные значения T_*, $A_*, \ldots$ в (1.1), (1.2) и поделим каждое уравнение на множитель $H\Omega_*$. При слагаемых $l_{x_{i1}}$, $l_{y_{i2}}$ появляется коэффициент $L_*/H\Omega_*$. Его сомножитель L_*/H имеет величину порядка угловой скорости прецессии гироскопа под действием момента управления. Будем рассматривать системы стабилизации, для которых скорости этих прецессионных движений L_*/H являются величинами такого же порядка, что и скорости Ω_* высокочастотных составляющих движения. Выберем $L_*=H\Omega_*$, тогда коэффициент при $l_{x_{i1}}$, $l_{y_{i2}}$ становится равным единице.

Система (1.1) примет вид

$$(i_{x_1}+i_{y_1})\frac{d}{dt}(\omega_{z_{i1}}+\alpha_{i1}')+(\omega_{z_{i2}}+\beta_{i2}')+\varkappa_1\alpha_{i1}'=$$

$$=l_{x_{i1}}+\varepsilon\Big\{(\alpha_{i3}\omega_{z_{i1}}-(\alpha_{i1}+\beta_{i1}+\gamma_{i1})\omega_{z_{i3}})+(i_{x_2}-i_{x_3}-i_{y_3})\omega_{z_{i2}}\omega_{z_{i3}}+$$

$$+i_{y_2}(\omega_{z_{i2}}+\beta_{i2}')\omega_{z_{i3}}+\frac{d}{dt}((i_{y_1}-i_{y_3})\omega_{z_{i3}}\beta_{i2}+(i_{x_1}+i_{y_1})\omega_{z_{i3}}\alpha_{i2}-$$

$$-(i_{x_1}+i_{y_1})\omega_{z_{i2}}\alpha_{i3}-i_{y_1}\omega_{z_{i2}}\beta_{i3}+i_{y_2}(\omega_{z_{i2}}+\beta_{i2}')\beta_{i3})\Big\} \tag{1.3}$$

$$i_{y_2}\frac{d}{dt}(\omega_{z_{i2}}+\beta_{i2}')+(\omega_{z_{i1}}+\alpha_{i1}')+\varkappa_2\beta_{i2}'=$$

$$=l_{y_{i2}}+\varepsilon\Big\{(\alpha_{i3}+\beta_{i3})\omega_{z_{i2}}-(\alpha_{i2}+\beta_{i2}+\gamma_{i2})\omega_{z_{i3}}+(i_{y_3}-i_{y_1})(\omega_{z_{i1}}+\alpha_{i1}')\omega_{z_{i3}}-$$

$$-i_{y_2}\frac{d}{dt}(-(\alpha_{i3}+\beta_{i3})\omega_{z_{i1}}+(\alpha_{i1}+\beta_{i1})\omega_{z_{i3}}-\alpha_{i1}'\beta_{i3})\Big\}$$

Здесь $\varkappa_1=N_1/H$, $\varkappa_2=N_2/H$, штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному времени t.

Рассмотрим для определенности компоновочную схему расположения гироскопов на объекте, показанную на фиг. 1. Уравнения для первого и второго гироскопов получаются тогда, если в (1.3) заданы выражения $\omega_{z_{i1}},\ldots, l_{x_{i1}}, l_{y_{i2}}$ отвечающие такой компоновке.

Для первого гироскопа в (1.3) положим

$$\begin{gathered} i=1, \quad \omega_{z_{11}}=\omega_{z_3}, \quad \omega_{z_{12}}=\omega_{z_1}, \quad \omega_{z_{13}}=\omega_{z_2} \\ l_{x_{11}}=\omega_{x_1}(\mu t)+\varepsilon(\Delta\omega_{z_1}+\nu_1), \quad l_{y_{12}}=-\omega_{x_3}(\mu t)-\varepsilon(\Delta\omega_{z_3}+\nu_3) \end{gathered} \tag{1.4}$$

Для второго гироскопа

$$\begin{gathered} i=2, \quad \omega_{z_{21}}=\omega_{z_3}, \quad \omega_{z_{22}}=-\omega_{z_2}, \quad \omega_{z_{23}}=\omega_{z_1} \\ l_{x_{21}}=-\omega_{x_2}(\mu t)-\varepsilon(\Delta\omega_{z_2}+\nu_2), \quad l_{y_{22}}=-m(\alpha_{11}-\alpha_{21})-\varepsilon\nu_4 \end{gathered} \tag{1.5}$$

В (1.4), (1.5) выделены главные части моментов управления, отвечающие «программным» угловым скоростям ω_{x_1}, ω_{x_2}, ω_{x_3}. Величины $\omega_{x_1},\ldots$ считаем функциями «медленного» времени μt. Здесь $\mu=T_*/T_1\ll 1$, где T_1 — характерное время изменения программных скоростей $\omega_{x_1},\ldots$, т. е. время работы системы в целом. Величины $\Delta\omega_{z_1}$, $\Delta\omega_{z_2}$, $\Delta\omega_{z_3}$ появляются за счет погрешностей формирования ω_{z_1}, ω_{z_2}, ω_{z_3}, а также за счет масштабной погрешности датчиков моментов гироскопов, слагаемые ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 определяют дрейф гироскопов. Эти дополнительные составляющие угловой скорости являются величинами порядка ε по сравнению с величинами программных скоростей. Учет этого обстоятельства при нормализации приводит к появлению множителя ε у слагаемых $\Delta\omega_{z_1}$, $\nu_1, \ldots$. Слагаемое $-m(\alpha_{11}-\alpha_{21})$ момента управления $l_{y_{22}}$ в (1.5) обеспечивает сохранение взаимной ортогональности осей собственного вращения гироскопов; $m=T_*M/H$, где M — коэффициент пропорциональности этой цепи управления в исходной размерной системе обозначений.

Подставив (1.4), (1.5) в (1.3), получим уравнения для первого гироскопа

$$
\begin{gathered}
(i_{x_1}+i_{y_1})\frac{d}{dt}(\omega_{z_3}+\alpha_{11}')+(\omega_{z_1}+\beta_{12}')+\varkappa_1\alpha_{11}'= \\
=\omega_{x_1}+\varepsilon\Big\{\nu_1+\Delta\omega_{z_1}+(\alpha_{13}\omega_{z_3}-(\alpha_{11}+\beta_{11}+\gamma_{11})\,\omega_{z_2})+(i_{x_2}-i_{x_3}-i_{y_3})\,\omega_{z_1}\omega_{z_2}+ \\
+i_{y_2}(\omega_{z_1}+\beta_{12}')\,\omega_{z_2}+\frac{d}{dt}((i_{y_1}-i_{y_3})\,\omega_{z_2}\beta_{12}+(i_{x_1}+i_{y_1})\,\omega_{z_2}\alpha_{12}- \\
-(i_{x_1}+i_{y_1})\,\omega_{z_1}\alpha_{13}-i_{y_1}\omega_{z_1}\beta_{13}+i_{y_2}(\omega_{z_1}+\beta_{12}')\,\beta_{13})\Big\} \qquad (1.6) \\
i_{y_2}\frac{d}{dt}(\omega_{z_1}+\beta_{12}')-(\omega_{z_3}+\alpha_{11}')+\varkappa_2\beta_{12}'=-\omega_{x_3}+\varepsilon\Big\{-\nu_3-\Delta\omega_{z_3}+ \\
+((\alpha_{13}+\beta_{13})\,\omega_{z_1}-(\alpha_{12}+\beta_{12}+\gamma_{12})\,\omega_{z_2})+(i_{y_3}-i_{y_1})\,(\omega_{z_3}+\alpha_{11}')\,\omega_{z_2}- \\
-i_{y_2}\frac{d}{dt}(-(\alpha_{13}+\beta_{13})\,\omega_{z_3}+(\alpha_{11}+\beta_{11})\,\omega_{z_2}-\alpha_{11}'\beta_{13})\Big\}
\end{gathered}
$$

Уравнения для второго гироскопа

$$
\begin{gathered}
(i_{x_1}+i_{y_1})\frac{d}{dt}(\omega_{z_3}+\alpha_{21}')+(-\omega_{z_2}+\beta_{22}')+\varkappa_1\alpha_{21}'= \\
=-\omega_{x_2}+\varepsilon\Big\{-\nu_2-\Delta\omega_{z_2}+\alpha_{23}\omega_{z_3}-(\alpha_{21}+\beta_{21}+\gamma_{21})\,\omega_{z_1}-(i_{x_2}-i_{x_3}-i_{y_3})\,\omega_{z_1}\omega_{z_2}+ \\
+i_{y_2}(-\omega_{z_2}+\beta_{22}')\,\omega_{z_1}+\frac{d}{dt}((i_{y_1}-i_{y_3})\,\omega_{z_1}\beta_{22}+(i_{x_1}+i_{y_1})\,\omega_{z_1}\alpha_{22}+ \\
+(i_{x_1}+i_{y_1})\,\omega_{z_2}\alpha_{23}+i_{y_1}\omega_{z_2}\beta_{23}+i_{y_2}(-\omega_{z_2}+\beta_{22}')\,\beta_{23})\Big\} \qquad (1.7) \\
i_{y_2}\frac{d}{dt}(-\omega_{z_2}+\beta_{22}')-(\omega_{z_3}+\alpha_{21}')+\varkappa_2\beta_{22}'=-m(\alpha_{11}-\alpha_{21})+ \\
+\varepsilon\Big\{-\nu_4-(\alpha_{23}+\beta_{23})\,\omega_{z_2}+(\alpha_{22}+\beta_{22}+\gamma_{22})\,\omega_{z_1}+(i_{y_3}-i_{y_1})\,(\omega_{z_3}+\alpha_{21}')\,\omega_{z_1}- \\
-i_{y_2}\frac{d}{dt}(-(\alpha_{23}+\beta_{23})\,\omega_{z_3}+(\alpha_{21}+\beta_{21})\,\omega_{z_1}-\alpha_{21}'\beta_{23})\Big\}
\end{gathered}
$$

Запишем уравнения объекта, управляемого по рассогласованиям относительно гироскопов. Для дальнейшего важны две особенности этих уравнений: управление по рассогласованиям должно быть «достаточно жестким», возмущения, действующие на объект, имеют широкий частотный спектр. Приведем в явном виде лишь те члены уравнений объекта, которые отражают указанные особенности

$$
\begin{aligned}
I_{z_1}\dot{\Omega}_{z_1}-I_{z_2}\Omega_{z_2}\Omega_{z_3}+\ldots &=K_1\mathrm{B}_{12}+[Q_1(T/T_1)]+\delta Q_1(T/T_2) \\
\ldots &=K_2\mathrm{B}_{22}+[Q_2(T/T_1)]+\delta Q_2(T/T_2) \\
\ldots &=K_3\mathrm{A}_{11}+[Q_3(T/T_1)]+\delta Q_3(T/T_2)
\end{aligned} \qquad (1.8)
$$

. . . .

В первом уравнении (1.8) выписаны слагаемые, определяющие структуру левых частей этих уравнений, через I_{z_1}, $I_{z_2}, \ldots$ обозначены моменты инерции соответствующих элементов системы. В (1.8) принято линейное управление по углам B_{12}, B_{22}, A_{11}, через K_1, K_2, K_3 обозначены статические коэффициенты управления по этим углам, передаточные функции корректирующих фильтров в (1.8) для краткости не выписываются. Через $[Q_i(T/T_1)]$, $\delta Q_i(T/T_2)$; $(i=1, 2, 3)$ в (1.8) обозначены медленная и быстрая составляющие возмущения. Здесь T_1, T_2 — постоянные времени, характеризующие скорость изменения этих составляющих. Пусть $T_1 \gg T_*$, а $T_2 \approx T_*$, т. е. быстрые возмущения действуют в районе резонансных частот системы.

При нормализации уравнений (1.8) примем $[Q_1]=Q_*[q_1],\ldots, \delta Q_1=$ $=Q_*\delta q_1,\ldots$, считая одинаковыми порядки величин быстрых и медленных возмущений. Будем рассматривать системы, для которых статические погрешности являются величинами порядка ε, а постоянные времени цепей управления — величины порядка T_*.

После нормализации (1.8) примет вид

$$\begin{gathered}\tau_1^2\omega_{z_1}'-\varepsilon\tau_2^2\omega_{z_2}\omega_{z_3}+\ldots=k_1\beta_{12}+[q_1(\mu t)]+\delta q_1(\nu t)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ k_1=K_1/K_*,\ldots,\quad K_*\varepsilon=Q_*,\quad \mu=T_*/T_1\ll 1,\quad \nu=T_*/T_2\sim 1\\ \tau_1^2=I_{z_1}/K_*T_*^2\sim 1,\quad \tau_2^2=I_{z_2}/K_*T_*^2\sim 1\end{gathered}\tag{1.9}$$

Составим теперь кинематические уравнения, которыми описывается относительное движение трехгранников $z_1z_2z_3$ и $x_1x_2x_3$. Обозначим через Φ матрицу направляющих косинусов между осями этих трехгранников, а символом $\|\Omega\|$ обозначим кососимметрическую матрицу, соответствующую вектору Ω. Тогда искомое кинематическое уравнение можно записать в матричном виде

$$d\Phi/dT=\|\Omega_z-\Omega_x\|\Phi\tag{1.10}$$

Здесь Ω_z, Ω_x — векторы абсолютной угловой скорости трехгранников $z_1z_2z_3$ и $x_1x_2x_3$, а $(\Omega_z-\Omega_x)$ — вектор их относительной скорости.

Распишем (1.10) в скалярной форме и проведем нормализацию этих уравнений. При этом характерные значения для диагональных элементов матрицы Φ будем считать равными единице, для всех остальных — равными ε. Характерные значения элементов матрицы $\|\Omega_z-\Omega_x\|$ полагаем равными ε/T_*. Как и ранее, уравнения будем составлять с точностью до членов порядка ε.

Обозначим через φ_{ij} нормализованные значения элементов матрицы Φ. Они связаны геометрическими соотношениями вида

$$\begin{gathered}\varphi_{11}^2+\varepsilon^2(\varphi_{12}^2+\varphi_{13}^2)=1\\ \varphi_{11}\varphi_{21}+\varphi_{12}\varphi_{22}+\varepsilon\varphi_{13}\varphi_{23}=0\\ \cdots\cdots\cdots\end{gathered}\tag{1.11}$$

Из (1.11) получим с погрешностью порядка ε^2 выражения для элементов, расположенных выше главной диагонали

$$\begin{gathered}\varphi_{12}=-\varphi_{21}-\varepsilon\varphi_{13}\varphi_{23}\\ \cdots\cdots\end{gathered}\tag{1.12}$$

Покажем, что в соотношениях (1.12) слагаемые порядка ε могут быть в дальнейшем опущены без ущерба для точности решения задачи. Исключим при помощи (1.12) наддиагональные элементы матрицы Φ в уравнениях (1.10). Легко видеть, что учет слагаемых $\varepsilon\varphi_{13}\varphi_{23}$ в правой части (1.10) дает члены порядка ε^2. Подставим (1.12) в левую часть (1.10)

$$\begin{gathered}-\frac{d\varphi_{21}}{dt}-\varepsilon\frac{d}{dt}(\varphi_{13}\varphi_{23})=\ldots\\ \cdots\cdots\cdots\end{gathered}\tag{1.13}$$

Влияние квадратичных членов порядка ε в уравнениях (1.13) в дальнейшем будет учитываться осредненно, путем вычисления средних по времени значений этих слагаемых на интервале времени порядка $1/\varepsilon$. После осреднения квадратичные слагаемые (1.13), равные полным производным, становятся величинами порядка ε^2. Таким образом, при решении задачи методом осреднения с погрешностью порядка ε^2 можно принять

$$\varphi_{12}=-\varphi_{21}=\alpha_3,\qquad \varphi_{23}=-\varphi_{32}=\alpha_1,\qquad \varphi_{31}=-\varphi_{13}=\alpha_2$$

Величины α_1, α_2, α_3 естественно называть нормализованными значениями малых поворотов трехгранника $z_1z_2z_3$ относительно $x_1x_2x_3$. Тогда

$$\Phi=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix}+\varepsilon\begin{Vmatrix}0&\alpha_3&-\alpha_2\\-\alpha_3&0&\alpha_1\\\alpha_2&-\alpha_1&0\end{Vmatrix} \tag{1.14}$$

Составляющие $(\Omega_z-\Omega_x)_{z_1},\ldots$ вектора $\Omega_z-\Omega_x$ по осям трехгранника $z_1z_2z_3$ определяются соответственно выражениями

$$\begin{aligned}(\Omega_z-\Omega_x)_{z_1}&=\varepsilon(\omega_{z_1}-\omega_{x_1})-\varepsilon^2(\omega_{x_2}\alpha_3+\omega_{x_3}\alpha_2)\\(\Omega_z-\Omega_x)_{z_2}&=\varepsilon(\omega_{z_2}-\omega_{x_2})+\varepsilon^2(\omega_{x_1}\alpha_3-\omega_{x_3}\alpha_1)\\(\Omega_z-\Omega_x)_{z_3}&=\varepsilon(\omega_{z_3}-\omega_{x_3})-\varepsilon^2(\omega_{x_1}\alpha_2+\omega_{x_2}\alpha_1)\end{aligned} \tag{1.15}$$

Кососимметрическая матрица $\|\Omega_z-\Omega_x\|$ имеет вид

$$\|\Omega_z-\Omega_x\|=\begin{Vmatrix}0&(\Omega_z-\Omega_x)_{z_1}&-(\Omega_z-\Omega_x)_{z_2}\\-(\Omega_z-\Omega_x)_{z_3}&0&(\Omega_z-\Omega_x)_{z_1}\\(\Omega_z-\Omega_x)_{z_2}&-(\Omega_z-\Omega_x)_{z_1}&0\end{Vmatrix} \tag{1.16}$$

Подставив (1.14) — (1.16) в (1.10) и проделав выкладки с оговоренной точностью, получим

$$\begin{aligned}d\alpha_1/dt&=\omega_{z_1}-\omega_{x_1}+\varepsilon\{-\omega_{x_2}\alpha_3+\omega_{x_3}\alpha_2+\alpha_2(\omega_{z_3}-\omega_{x_3})\}\\d\alpha_2/dt&=\omega_{z_2}-\omega_{x_2}+\varepsilon\{\omega_{x_1}\alpha_3-\omega_{x_3}\alpha_1+\alpha_3(\omega_{z_1}-\omega_{x_1})\}\\d\alpha_3/dt&=\omega_{z_3}-\omega_{x_3}+\varepsilon\{-\omega_{x_1}\alpha_2+\omega_{x_2}\alpha_1+\alpha_1(\omega_{z_2}-\omega_{x_2})\}\end{aligned} \tag{1.17}$$

Уравнения (1.17) замыкают систему уравнений (1.6), (1.7), (1.9), (1.17), которой описывается движение объекта относительно программного трехгранника $x_1x_2x_3$.

2. Будем далее рассматривать случай, когда для управления системой не используется информация об ориентации объекта в пространстве. (Эта информация могла бы быть получена, например, при помощи астродатчиков.) Тогда систему (1.6), (1.7), (1.9) можно рассматривать независимо от (1.17). Отыскав из (1.6), (1.7), (1.9) переменные ω_{z_1}, ω_{z_2}, ω_{z_3} и подставив их в (1.17), можно затем найти погрешности ориентации α_1, α_2, α_3.

Система (1.6), (1.7), (1.9) образована нелинейными уравнениями сложного вида и не поддается непосредственному интегрированию. Этой системой описывается движение, обладающее, как можно ожидать, быстрыми и медленными составляющими. Для исследования таких систем удобно пользоваться методами осреднения.

Приведем систему (1.6), (1.7), (1.9) к виду, допускающему применение метода осреднения в форме, изложенной в [3].

Введем квазикоординаты φ_1, φ_2, φ_3, задав их соотношениями

$$\varphi_1'=\omega_{z_1},\qquad \varphi_2'=\omega_{z_2},\qquad \varphi_3'=\omega_{z_3} \tag{2.1}$$

Запишем систему (1.6), (1.7), (1.9) в новых переменных $\varphi_1, \ldots$

$$(i_{x_1}+i_{y_1})\frac{d}{dt}(\varphi_3'+\alpha_{11}')+(\varphi_1'+\beta_{12}')\varkappa_1\alpha_{11}'=\omega_{x_1}+\varepsilon f_{11}$$

$$i_{y_2}\frac{d}{dt}(\varphi_1'+\beta_{12}')-(\varphi_3'+\alpha_{11}')+\varkappa_2\beta_{12}'=-\omega_{x_3}+\varepsilon f_{12}$$

$$(i_{x_1}+i_{y_1})\frac{d}{dt}(\varphi_3'+\alpha_{21}')+(-\varphi_2'+\beta_{22}')+\varkappa_1\alpha_{21}'=-\omega_{x_2}+\varepsilon f_{21}$$

$$i_{y_2}\frac{d}{dt}(-\varphi_2'+\beta_{22}')-(\varphi_3'+\alpha_{21}')+\varkappa_2\beta_{22}'=-m(\alpha_{11}-\alpha_{21})+\varepsilon f_{22}$$

$$\tau_1^2\varphi_1''-\varepsilon\tau_2^2\varphi_2'\varphi_3'+\ldots=k_1\beta_{12}+[q_1(\mu t)]+\delta q_1(\nu t) \qquad (2.2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Здесь через f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22} обозначены выражения, стоящие в (1.6), (1.7) в фигурных скобках.

Проинтегрируем три первых уравнения системы (2.2) и запишем полученную систему интегро-дифференциальных уравнений в виде

$$\begin{gathered}
(i_{x_1}+i_{y_1})(\varphi_3'+\alpha_{11}')+\left(\varphi_1+\beta_{12}-\int_0^t\omega_{x_1}\,dt-\varepsilon\int_0^t f_{11}\,dt\right)+\varkappa_1\alpha_{11}=0\\
i_{y_2}(\varphi_1'+\beta_{12}')-\left(\varphi_3+\alpha_{11}-\int_0^t\omega_{x_3}\,dt+\varepsilon\int_0^t f_{12}\,dt\right)+\varkappa_2\beta_{12}=0\\
(i_{x_1}+i_{y_1})(\varphi_3'+\alpha_{21}')+\left(-\varphi_2+\beta_{22}+\int_0^t\omega_{x_2}\,dt-\varepsilon\int_0^t f_{21}\,dt\right)+\varkappa_1\alpha_{21}=0\\
i_{y_2}(-\varphi_2''+\beta_{22}'')-(\varphi_3'+\alpha_{21}'-\omega_{x_3}+\varepsilon f_{12})+\varkappa_2\beta_{22}'=\\
=-m(\alpha_{11}-\alpha_{21})+\omega_{x_3}+\varepsilon(f_{22}-f_{12})\\
\tau_1^2\varphi_1''-\varepsilon\tau_2^2\varphi_2'\varphi_3'+\ldots=k_1\beta_{12}+[q_1(\mu t)]+\delta q_1(\nu t)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered} \qquad (2.3)$$

Несущественные для дальнейшего константы интегрирования полагаем равными нулю, выбрав соответствующим образом начальные условия по φ_1, φ_2, φ_3.

Систему (2.3) преобразуем к эквивалентной системе дифференциальных уравнений, введя переменные

$$\delta_1=\varepsilon\int_0^t f_{11}dt,\quad \delta_2=-\varepsilon\int_0^t f_{21}dt,\quad \delta_3=-\varepsilon\int_0^t f_{12}dt \qquad (2.4)$$

Получим

$$\begin{gathered}
(i_{x_1}+i_{y_1})(\varphi_3'+\alpha_{11}')+\left(\varphi_1+\beta_{12}-\int_0^t\omega_{x_1}\,dt-\delta_1\right)+\varkappa_1\alpha_{11}=0\\
i_{y_2}(\varphi_1'+\beta_{12}')-\left(\varphi_3+\alpha_{11}-\int_0^t\omega_{x_3}\,dt-\delta_3\right)+\varkappa_2\beta_{12}=0
\end{gathered} \qquad (2.5)$$

$$(i_{x_1}+i_{y_1})(\varphi_3'+\alpha_{21}')+\left(-\varphi_2+\beta_{22}+\int\limits_0^t \omega_{x_2}\,dt+\delta_2\right)+\varkappa_1\alpha_{21}=0$$

$$i_{y_2}(-\varphi_2''+\beta_{22}'')-(\varphi_3'+\alpha_{21}'-\omega_{x_3}+\varepsilon f_{12})+\varkappa_2\beta_{22}'=$$
$$=-m(\alpha_{11}-\alpha_{21})+\omega_{x_3}+\varepsilon(f_{22}-f_{12})$$
$$\delta_1'=\varepsilon f_{11},\ \delta_2'=-\varepsilon f_{21},\ \delta_3'=-\varepsilon f_{12}$$
$$\tau_1^2\varphi_1''-\varepsilon\tau_2^2\varphi_2'\varphi_3'+\ldots=k_1\beta_{12}+[q_1(\mu t)]+\delta q_1(\nu t)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Начальные условия по переменным δ_1, δ_2, δ_3, как следует из (2.4), нужно принять нулевыми.

Сделаем, наконец, в (2.5) переход от переменных φ_1, φ_2, φ_3, α_{11}, β_{12}, α_{21}, β_{22} к переменным ψ_1, ψ_2, ψ_3, θ_{11}, θ_{12}, θ_{21}, θ_{22} по формулам

$$\psi_1=\varphi_1-\delta_1,\ \psi_2=\varphi_2-\delta_2,\ \psi_3=\varphi_3-\delta_3$$
$$\theta_{11}=\psi_3+\alpha_{11}-\int\limits_0^t\omega_{x_3}dt,\quad \theta_{12}=\psi_1+\beta_{12}-\int\limits_0^t\omega_{x_1}dt \tag{2.6}$$
$$\theta_{21}=\psi_3+\alpha_{21}-\int\limits_0^t\omega_{x_3}dt,\quad \theta_{22}=-\psi_2+\beta_{22}+\int\limits_0^t\omega_{x_2}dt$$

Получим

$$(i_{x_1}+i_{y_1})\theta_{11}'+\theta_{12}+\varkappa_1\theta_{11}=(i_{x_1}+i_{y_1})(-\omega_{x_3}+\varepsilon f_{12})+\varkappa_1\left(\psi_3-\int\limits_0^t\omega_{x_3}\,dt\right)$$
$$i_{y_2}\theta_{12}'-\theta_{11}+\varkappa_2\theta_{12}=i_{y_2}(-\omega_{x_1}-\varepsilon f_{11})+\varkappa_2\left(\psi_1-\int\limits_0^t\omega_{x_1}\,dt\right) \tag{2.7}$$
$$(i_{x_1}+i_{y_1})\theta_{21}'+\theta_{22}+\varkappa_1\theta_{21}=(i_{x_1}+i_{y_1})(-\omega_{x_3}+\varepsilon f_{12})+\varkappa_1\left(\psi_3-\int\limits_0^t\omega_{x_3}\,dt\right)$$
$$i_{y_2}\theta_{22}''-\theta_{21}'+\varkappa_2\theta_{22}'=-m(\theta_{11}-\theta_{21})+i_{y_2}(\omega_{x_2}'-\varepsilon f_{21}')+\varkappa_2(\omega_{x_2}-\psi_2')+\omega_{x_3}+\varepsilon(f_{22}-f_{21})$$
$$\delta_1'=\varepsilon f_{11},\ \delta_2'=-\varepsilon f_{21},\ \delta_3'=-\varepsilon f_{12}$$
$$\tau_1^2\psi_1''-\varepsilon\tau_2^2\psi_2'\psi_3'+\ldots=k_1\beta_{12}+[q_1(\mu t)]+\delta q_1(\nu t)+\varepsilon F_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

В последнем уравнении (2.7) через εF_1 обозначены добавки порядка ε, появившиеся в этом уравнении после замены (2.6)

Фазовыми переменными исходной системы (1.6), (1.7), (1.9) являются α_{11}, α_{11}', β_{12}, β_{12}', α_{21}, α_{21}', β_{22}, β_{22}', ω_{z_1}, ω_{z_2}, ω_{z_3}. Фазовые переменные системы (2.7) — θ_{11}, θ_{12}, θ_{21}, θ_{22}, θ_{22}', δ_1, δ_2, δ_3, ψ_1, ψ_1', ψ_2, ψ_2', ψ_3, ψ_3'. Порядок системы (2.7) повысился по сравнению с (1.6), (1.7), (1.9) на три единицы за счет введения в (2.1) квазикоординат φ_1, φ_2, φ_3. Формальная замена от переменных системы (1.6), (1.7), (1.9), (2.1) к переменным системы (2.7) дается, прежде всего, соотношениями (2.6). Остальные получим, продифференцировав (2.6)

$$\psi_1'=\varphi_1'-\delta_1',\ \psi_2'=\varphi_2'-\delta_2',\ \psi_3'=\varphi_3'-\delta_3'$$
$$\theta_{11}'=\varphi_3'+\alpha_{11}'-\omega_{x_3}-\delta_3',\quad \theta_{12}'=\varphi_1'+\beta_{12}'-\omega_{x_1}-\delta_1' \tag{2.8}$$
$$\theta_{21}'=\varphi_3'+\alpha_{21}'-\omega_{x_3}-\delta_3',\quad \theta_{22}'=-\varphi_2'+\beta_{22}'+\omega_{x_2}+\delta_2'$$

и подставив в (2.8) выражения δ_1', δ_2', δ_3', θ_{11}', θ_{12}', θ_{21}', φ_1', φ_2', φ_3' из (2.1), (2.7).

Система (2.7), если ее дополнительно разрешить относительно старших производных и привести к форме Коши, имеет вид, допускающий применение методов осреднения. Переменные $\theta_{11}, \ldots, \psi_1, \ldots$ — быстрые, так как их скорости — величины нулевого порядка по параметру ε. Переменные $\delta_1, \ldots$ — медленные, так как $\delta_1' \sim \varepsilon, \ldots$ Число медленных переменных равно трем, что отвечает числу циклических координат для объекта типа гироплатформы или космического аппарата.

Метод осреднения дает, вообще говоря, возможность построить асимптотическое по ε приближение решения системы (2.7) на интервале времени $1/\varepsilon$. Учитывая сложность системы (2.7), ограничимся при этом построением медленных, «систематических» добавков порядка ε в решении по переменным ω_{z_1}, ω_{z_2}, ω_{z_3}. Эти добавки на интервалах времени порядка $1/\varepsilon$ могут привести к отклонениям объекта от программного положения на величины порядка единицы в нормализованных переменных φ_1, φ_2, φ_3, т. е. на величины порядка ε в исходных угловых переменных.

Разрешим первую группу соотношений (2.8) относительно $\varphi_1' = \omega_{z_1}, \ldots$

$$\omega_{z_1} = \psi_1' - \delta_1', \quad \omega_{z_2} = \psi_2' - \delta_2', \quad \omega_{z_3} = \psi_3' - \delta_3' \tag{2.9}$$

Покажем, что систематические, медленные порядка ε составляющие угловых скоростей $\omega_{z_1}, \ldots$ могут появиться в (2.9) лишь за счет слагаемых $\delta_1', \ldots$.

Предположим, что выбор структуры и параметров цепей управления обеспечивает асимптотическую устойчивость тривиального решения линейной части уравнений (1.6), (1.7), (1.9) по переменным $\alpha_{11}, \ldots$ $\ldots, \omega_{z_1}, \ldots$ Асимптотически устойчивыми будут и частные решения, определяемые внешними возмущениями линейных уравнений.

Рассмотрим линейную систему уравнений, которая получится из (2.7) при $\varepsilon = 0$. В этой системе уравнения по переменным δ_i отщепляются: $\delta_i' = 0$ ($i = 1, 2, 3$). Переменные оставшейся части системы будут связаны с переменными линейных для (1.6), (1.7), (1.9) уравнений невырожденным преобразованием. Поэтому, не проводя специального исследования устойчивости системы линейных для (2.7) уравнений, можно утверждать, что ее решения будут также асимптотически устойчивы по переменным $\theta_{11}, \ldots, \psi_1, \ldots$.

Будем рассматривать слагаемые порядка ε в (2.7) в качестве постоянно действующих возмущений по отношению к линейной части этих уравнений. Поскольку линейная часть асимптотически устойчива по $\theta_{11}, \ldots$ $\ldots, \psi_1, \ldots$, то по теореме о постоянно действующих возмущениях [4] добавки в решениях по ψ_1, ψ_2, ψ_3, определяемые слагаемыми порядка ε в (2.7), стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Это делает невозможным появление медленных составляющих движения по ψ_1, ψ_2, ψ_3 со скоростями порядка ε. В самом деле, если предположить обратное, то на временных интервалах порядка $1/\varepsilon$ величины ψ_1, ψ_2, ψ_3 достигали бы значений порядка единицы, что противоречит сказанному выше.

Таким образом, систематические составляющие уходов по ω_{z_1}, ω_{z_2}, ω_{z_3} в (2.9) могут появиться лишь за счет слагаемых δ_2', δ_2', δ_3'. Оценим их при помощи метода осреднения [3].

В [3] рассматриваются уравнения вида

$$x' = \varepsilon X^{(1)}(x, y, t) + \varepsilon^2 \ldots, \quad y' = Y^{(0)}(x, y, t) + \varepsilon \ldots \tag{2.10}$$

Здесь x — вектор медленных, а y — быстрых переменных. В (2.7) вектору x соответствует вектор переменных $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, вектору y отвечает

$(\theta_{11}, \ldots, \psi_1, \ldots)$. Система уравнений, определяющая вектор медленных переменных с погрешностью порядка ε по [3], записывается в виде

$$x' = \varepsilon \langle X^{(1)}(x) \rangle \tag{2.11}$$

$$\langle X^{(1)} \rangle = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} X^{(1)}(x, y^\circ(x,t), t)\, dt$$

как результат осреднения функции $X^{(1)}$ по траекториям $y = y^\circ(x, t)$ порождающего решения. Это решение определяется системой

$$y' = Y^{(0)}(x, y, t), \; x = \mathrm{const} \tag{2.12}$$

Получим из (2.7) порождающую систему, соответствующую (2.12), положив $\varepsilon = 0$, δ_1, δ_2, $\delta_3 = \mathrm{const}$. Решение порождающей системы далее следовало бы подставить в правые части уравнений $\delta_1' = \varepsilon f_{11}, \ldots$ в (2.7) и провести затем осреднение. При этом предполагается, что в нелинейных функциях $f_{11}, \ldots$ была ранее проведена замена от переменных $\alpha_{11}, \ldots, \omega_{z_1}, \ldots$ к переменным $\theta_{11}, \ldots, \psi_1, \ldots$. Заметим, однако, что величины δ_1, δ_2, δ_3 не фигурируют ни в порождающей системе, ни в аргументах функций $f_{11}, \ldots$. Поэтому осреднение в $f_{11}, \ldots$ можно проводить непосредственно по решениям системы, полученной из (1.6), (1.7), (1.9) при $\varepsilon = 0$.

Решение этой системы нулевого приближения по $\omega_{z_1}, \ldots, \alpha_{11}, \ldots$ обозначим через $\overset{(0)}{\omega}_{z_1}, \ldots, \overset{(0)}{\alpha}_{11}, \ldots$. В силу асимптотической устойчивости системы собственные составляющие движения затухают, и в $\overset{(0)}{\omega}_{z_1}, \ldots, \overset{(0)}{\alpha}_{11}, \ldots$ можно учитывать только вынужденные составляющие. Возмущения в (1.9) разделялись на быстрые и медленные. Поскольку система нулевого приближения линейна, то ее вынужденные решения представляются в виде суммы быстрых и медленных составляющих

$$\overset{(0)}{\omega}_{z_1} = [\overset{(0)}{\omega}_{z_1}] + \delta\overset{(0)}{\omega}_{z_1}, \ldots, \; \overset{(0)}{\alpha}_{11} = [\overset{(0)}{\alpha}_{11}] + \delta\overset{(0)}{\alpha}_{11}, \ldots \tag{2.13}$$

Можно доказать, воспользовавшись, например, методикой работ [5, 6], что с погрешностью порядка μ будет

$$[\overset{(0)}{\omega}_{z_1}] = \omega_{x_1}, \ldots \tag{2.14}$$

Приведем схему доказательства. Запишем, воспользовавшись принципом суперпозиции, систему нулевого приближения для медленных возмущений. Перейдем в этой системе к медленному времени μt. (Это равносильно тому, что в (2.2) берется $T_* = T_1$.) При старших производных рассматриваемой системы после этого появятся малые множители μ. Построим «вырожденную» [5, 6] по этому параметру систему уравнений. Этой системой движение по медленным составляющим описывается с погрешностью порядка μ. Решение вырожденной системы по переменным $[\overset{(0)}{\omega}_{z_1}], \ldots$ даст (2.14). Подставив (2.14) в (2.13), получим

$$\overset{(0)}{\omega}_{z_1} = \omega_{x_1} + \delta\overset{(0)}{\omega}_{z_1}, \ldots, \; \overset{(0)}{\alpha}_{11} = [\overset{(0)}{\alpha}_{11}] + \delta\overset{(0)}{\alpha}_{11}, \ldots \tag{2.15}$$

Подставим (2.15) в (2.7) и проведем осреднение. Функции медленного времени при осреднении будем считать константами [3].

Проделав необходимые выкладки, получим

$$\delta_1' = \varepsilon \{ \nu_1 + \Delta\omega_{z_1} - (\alpha_{13}\omega_{x_3} - ([\overset{(0)}{\alpha}_{11}] + \beta_{11} + \gamma_{11})\,\omega_{x_2}) - \langle \delta\overset{(0)}{\alpha}_{11}\, \delta\overset{(0)}{\omega}_{z_2} \rangle +$$

$$+(i_{x_2}-i_{x_3}-i_{y_3})\langle\delta\overset{(0)}{\omega}_{z_1}\delta\overset{(0)}{\omega}_{z_2}\rangle+i_{y_2}\langle(\delta\overset{(0)}{\omega}_{z_1}+\delta\overset{\prime(0)}{\beta}_{12})\delta\overset{(0)}{\omega}_{z_2}\rangle+(i_{x_2}+i_{y_2}-i_{x_3}-i_{y_3})\omega_{x_1}\omega_{x_2}\} \tag{2.16}$$

$$\delta_2'=\varepsilon\{\nu_2+\Delta\omega_{z_2}-(\alpha_{23}\omega_{x_3}-([\overset{(0)}{\alpha}_{21}]+\beta_{21}+\gamma_{21})\omega_{x_1})+\langle\delta\overset{(0)}{\alpha}_{21}\delta\overset{(0)}{\omega}_{z_1}\rangle+$$

$$+(i_{x_2}-i_{x_3}-i_{y_3})\langle\delta\overset{(0)}{\omega}_{z_1}\delta\overset{(0)}{\omega}_{z_2}\rangle-i_{y_2}\langle(-\delta\overset{(0)}{\omega}_{z_2}+\delta\overset{\prime(0)}{\beta}_{22})\delta\overset{(0)}{\omega}_{z_1}\rangle+$$

$$+(i_{x_2}+i_{y_2}-i_{x_3}-i_{y_3})\omega_{x_1}\omega_{x_2}\}$$

$$\delta_3'=\varepsilon\{\nu_3+\Delta\omega_{z_3}-((\alpha_{13}+\beta_{13})\omega_{x_1}-(\alpha_{12}+[\overset{(0)}{\beta}_{12}]+\gamma_{12})\omega_{x_2})+\langle\delta\overset{(0)}{\beta}_{12}\delta\overset{(0)}{\omega}_{z_2}\rangle-$$

$$-(i_{y_3}-i_{y_1})\langle(\delta\overset{(0)}{\omega}_{z_3}+\delta\overset{\prime(0)}{\alpha}_{11})\delta\overset{(0)}{\omega}_{z_2}\rangle-(i_{y_3}-i_{y_1})\omega_{x_2}\omega_{x_3}\}$$

Запишем выражения для угловых скоростей объекта, добавив к составляющим нулевого порядка по ε, определяемым (2.15), медленные составляющие порядка ε, определяемые (2.16)

$$\omega_{z_1}=\omega_{x_1}+\delta\overset{(0)}{\omega}_{z_1}+\delta_1', \quad \omega_{z_2}=\omega_{x_2}+\delta\overset{(0)}{\omega}_{z_2}+\delta_2', \quad \omega_{z_3}=\omega_{x_3}+\delta\overset{(0)}{\omega}_{z_3}+\delta_3' \tag{2.17}$$

Составим теперь осредненные уравнения для переменных α_1, α_2, α_3 — угловых рассогласований трехгранников $z_1z_2z_3$ и $x_1x_2x_3$. Приведем уравнения (1.17) к виду, допускающему применение методов осреднения. Сделаем в (1.17) замену

$$\gamma_1=\alpha_1-\int_0^t(\omega_{z_1}-\omega_{x_1})dt, \quad \gamma_2=\alpha_2-\int_0^t(\omega_{z_2}-\omega_{x_2})dt, \quad \gamma_3=\alpha_3-\int_0^t(\omega_{z_3}-\omega_{x_3})dt \tag{2.18}$$

Подставив в (2.18) выражения (2.17), получим

$$\gamma_1=\alpha_1-(\delta\overset{(0)}{\varphi}_1+\delta_1), \quad \gamma_2=\alpha_2-(\delta\overset{(0)}{\varphi}_2+\delta_2), \quad \gamma_3=\alpha_3-(\delta\overset{(0)}{\varphi}_3+\delta_3) \tag{2.19}$$

Здесь $\delta\varphi_1^{(0)},\ldots$ — быстрые составляющие решения по $\varphi_1,\ldots$, так что

$$\delta\overset{(0)}{\omega}_{z_1}=d\delta\overset{(0)}{\varphi}_1/dt,\ldots \tag{2.20}$$

Подставим (2.17), (2.19) в (1.17), тогда

$$\frac{d\gamma_1}{dt}=\varepsilon\{-\omega_{x_2}(\gamma_3+\delta\overset{(0)}{\varphi}_3+\delta_3)+\omega_{x_3}(\gamma_2+\delta\overset{(0)}{\varphi}_2+\delta_2)+(\gamma_2+\delta\overset{(0)}{\varphi}_2+\delta_2)(\delta\overset{(0)}{\omega}_{z_3}+\delta_3')\} \tag{2.21}$$

$$\frac{d\gamma_2}{dt}=\varepsilon\{\omega_{x_1}(\gamma_3+\delta\overset{(0)}{\varphi}_3+\delta_3)-\omega_{x_3}(\gamma_1+\delta\overset{(0)}{\varphi}_1+\delta_1)+(\gamma_3+\delta\overset{(0)}{\varphi}_3+\delta_3)(\delta\overset{(0)}{\omega}_{z_1}+\delta_1')\}$$

$$\frac{d\gamma_3}{dt}=\varepsilon\{-\omega_{x_1}(\gamma_2+\delta\overset{(0)}{\varphi}_2+\delta_2)+\omega_{x_2}(\gamma_1+\delta\overset{(0)}{\varphi}_1+\delta_1)+(\gamma_1+\delta\overset{(0)}{\varphi}_1+\delta_1)(\delta\overset{(0)}{\omega}_{z_2}+\delta_2')\}$$

Проведем в (2.21) осреднение по функциям явного времени $\delta\varphi_1^{(0)}$, $\delta\overset{(0)}{\omega}_{z_1}$, ...

$$\frac{d\gamma_1}{dt}=\varepsilon\{-\omega_{x_2}(\gamma_3+\delta_3)+\omega_{x_3}(\gamma_2+\delta_2)+(\gamma_2+\delta_2)\delta_3'+\langle\delta\overset{(0)}{\varphi}_2\delta\overset{(0)}{\omega}_{z_3}\rangle\}$$

$$\frac{d\gamma_2}{dt}=\varepsilon\{\omega_{x_1}(\gamma_3+\delta_3)-\omega_{x_3}(\gamma_1+\delta_1)+(\gamma_3+\delta_3)\delta_1'+\langle\delta\varphi_3^{(0)}\,\delta\omega_{z_1}^{(0)}\rangle\}$$
$$\frac{d\gamma_3}{dt}=\varepsilon\{-\omega_{x_1}(\gamma_2+\delta_2)+\omega_{x_2}(\gamma_1+\delta_1)+(\gamma_1+\delta_1)\delta_2'+\langle\delta\varphi_1^{(0)}\,\delta\omega_{z_2}^{(0)}\rangle\} \tag{2.22}$$

Перейдем в (2.22) к исходным переменным α_1, α_2, α_3. При этом в (2.19) опустим несущественные быстрые составляющие $\delta\varphi_1^{(0)},\ldots$ и пренебрежем слагаемыми $\varepsilon\alpha_2\delta_3',\ldots$, имеющими порядок малости ε^2. Получим

$$\frac{d\alpha_1}{dt}=\varepsilon\{-\omega_{x_2}\alpha_3+\omega_{x_3}\alpha_2+\langle\delta\varphi_2^{(0)}\,\delta\omega_{z_3}^{(0)}\rangle\}+\delta_1'$$
$$\frac{d\alpha_2}{dt}=\varepsilon\{\omega_{x_1}\alpha_3-\omega_{x_3}\alpha_1+\langle\delta\varphi_3^{(0)}\delta\omega_{z_1}^{(0)}\rangle\}+\delta_2' \tag{2.23}$$
$$\frac{d\alpha_3}{dt}=\varepsilon\{-\omega_{x_1}\alpha_2+\omega_{x_2}\alpha_1+\langle\delta\varphi_1^{(0)}\delta\omega_{z_2}^{(0)}\rangle\}+\delta_3'$$

Уравнения (2.23), (2.16) образуют искомую систему уравнений, которой описывается относительное движение трехгранников $z_1z_2z_3$ и $x_1x_2x_3$ по медленным составляющим.

Как видно из (2.23), (2.16), это движение определяется, прежде всего, пуассоновой линейной комбинацией слагаемых $d\alpha_1/dt=\varepsilon\{-\omega_{x_2}\alpha_3+$ $+\omega_{x_3}\alpha_2\},\ldots$ слагаемыми, которые определяются всякого рода несовершенствами системы, ν_1, $\Delta\omega_{z_1}$, $\alpha_{13}\omega_{x_3},\ldots$ и, наконец, слагаемыми типа систематических уходов, которые определяются осреднением квадратичных членов уравнений по траекториям высокочастотного порождающего решения $\langle\delta\varphi_2^{(0)}\delta\omega_{z_3}^{(0)}\rangle$, $\langle\delta\alpha_{11}^{(0)}\delta\omega_{z_2}^{(0)}\rangle,\ldots$. Заметим, что составляющие систематических уходов появляются здесь как за счет динамических уравнений гироскопов (1.6), (1.7), так и за счет кинематических, пуассоновых соотношений (1.17).

Обозначим через $\varepsilon\omega_1$, $\varepsilon\omega_2$, $\varepsilon\omega_3$ суммы слагаемых последнего типа соответственно в первом, втором и третьем уравнениях (2.23) и проведем краткий анализ выражений ω_1, ω_2, ω_3.

Предварительно в первом уравнении (2.23) проделаем замену слагаемого $\langle\delta\varphi_2^{(0)}\delta\omega_{z_3}^{(0)}\rangle$ эквивалентным выражением. Для этого рассмотрим соотношение

$$\left\langle\frac{d}{dt}(\delta\varphi_2^{(0)}\delta\varphi_3^{(0)})\right\rangle=0 \tag{2.24}$$

которое выполняется с погрешностью порядка ε, как показано в конце п. 1. Продифференцируем в (2.24) и учтем (2.20), тогда

$$\langle\delta\varphi_2^{(0)}\delta\omega_{z_3}^{(0)}\rangle=-\langle\delta\varphi_3^{(0)}\,\delta\omega_{z_2}^{(0)}\rangle \tag{2.25}$$

Подставив (2.25), (2.16) в (2.23) и сгруппировав нужным образом слагаемые, получим

$$\omega_1=\langle\delta\omega_{z_2}^{(0)}(-(\delta\varphi_3^{(0)}+\delta\alpha_{11}^{(0)})+i_{y_2}(\delta\omega_{z_1}^{(0)}+\delta\beta_{12}'^{(0)}))+(i_{x_2}-i_{x_3}-i_{y_3})\delta\omega_{z_1}^{(0)}\delta\omega_{z_2}^{(0)}\rangle$$
$$\omega_2=\langle\delta\omega_{z_1}^{(0)}((\delta\varphi_3^{(0)}+\delta\alpha_{21}^{(0)})-i_{y_2}(-\delta\omega_{z_2}^{(0)}+\delta\beta_{22}'^{(0)}))+(i_{x_2}-i_{x_3}-i_{y_3})\delta\omega_{z_1}^{(0)}\delta\omega_{z_2}^{(0)}\rangle \tag{2.26}$$

$$\omega_3=\langle\delta\omega_{z_2}^{(0)}((\delta\varphi_1^{(0)}+\delta\beta_{12}^{(0)})+(i_{x_1}+i_{y_1})(\delta\omega_{z_3}^{(0)}+\delta\alpha_{11}'^{(0)}))-$$
$$-(i_{x_1}-i_{y_3})\delta\omega_{z_2}^{(0)}(\delta\omega_{z_3}^{(0)}+\delta\alpha_{11}'^{(0)})\rangle$$

Правые части (2.26) зависят от решений линейной системы нулевого приближения для случая быстрых возмущений. Эту систему можно получить, например, из (2.5), приняв $\varepsilon=0$, $\delta_1=0,\ldots$, $\omega_{x_1}=0,\ldots$. Предположим дополнительно, что постоянная времени цепи межгироскопной коррекции существенно больше характерного времени быстрых движений. Тогда при вычислении вынужденных быстрых решений в (2.5) можно пренебречь слагаемым m $(\alpha_{11}-\alpha_{21})$. При этом четвертое уравнение (2.5) может быть проинтегрировано и приведено к такому же виду, как и три предыдущих. Таким образом, уравнения, связывающие $\delta\alpha_{11}^{(0)}$, $\delta\varphi_1^{(0)}$, $\delta\varphi_1'^{(0)}=\delta\omega_{z_1}^{(0)}$, ..., будут иметь вид

$$\begin{gathered}(i_{x_1}+i_{y_1})(\delta\omega_{z_3}^{(0)}+\delta\alpha_{11}'^{(0)})+(\delta\varphi_1^{(0)}+\delta\beta_{12}^{(0)})+\varkappa_1\delta\alpha_{11}^{(0)}=0\\ i_{y_2}(\delta\omega_{z_1}^{(0)}+\delta\beta_{12}'^{(0)})-(\delta\varphi_3^{(0)}+\delta\alpha_{11}^{(0)})+\varkappa_2\delta\beta_{12}^{(0)}=0\\ (i_{x_1}+i_{y_1})(\delta\omega_{z_3}^{(0)}+\delta\alpha_{21}'^{(0)})+(-\delta\varphi_2^{(0)}+\delta\beta_{22}^{(0)})+\varkappa_1\delta\alpha_{21}^{(0)}=0\\ i_{y_2}(-\delta\omega_{z_2}^{(0)}+\delta\beta_{22}'^{(0)})-(\delta\varphi_3^{(0)}+\delta\alpha_{21}^{(0)})+\varkappa_2\delta\beta_{22}^{(0)}=0\end{gathered}\tag{2.27}$$

Соотношения (2.27) позволяют упростить выражения, стоящие в (2.26) в фигурных скобках

$$\begin{gathered}\omega_1=\langle-\varkappa_2\delta\omega_{z_2}^{(0)}\delta\beta_{12}^{(0)}+(i_{x_2}-i_{x_3}-i_{y_3})\delta\omega_{z_1}^{(0)}\delta\omega_{z_2}^{(0)}\rangle\\ \omega_2=\langle\varkappa_2\delta\omega_{z_1}^{(0)}\delta\beta_{22}^{(0)}+(i_{x_2}-i_{x_3}-i_{y_3})\delta\omega_{z_1}^{(0)}\delta\omega_{z_2}^{(0)}\rangle\\ \omega_3=\langle-\varkappa_1\delta\omega_{z_2}^{(0)}\delta\alpha_{11}^{(0)}-(i_{x_1}+i_{y_3})\delta\omega_{z_2}^{(0)}(\delta\omega_{z_3}^{(0)}+\delta\alpha_{11}'^{(0)})\rangle\end{gathered}\tag{2.28}$$

Выражения (2.28) значительно упрощаются для случая $\varkappa_1$, $\varkappa_2\ll1$; i_{x_1}, $i_{y_1},\ldots\sim1$. При этом из (2.27) следует $\delta\omega_{z_3}^{(0)}+\delta\alpha_{11}'^{(0)}\approx0,\ldots$. (Во всяком случае, для частот возмущения вне малой окрестности нутационной частоты.) Тогда (2.28) принимает вид

$$\begin{gathered}\omega_1=(i_{x_2}-i_{x_3}-i_{y_3})\langle\delta\omega_{z_1}^{(0)}\delta\omega_{z_2}^{(0)}\rangle\\ \omega_2=(i_{x_2}-i_{x_3}-i_{y_3})\langle\delta\omega_{z_1}^{(0)}\delta\omega_{z_2}^{(0)}\rangle\\ \omega_3=0\end{gathered}\tag{2.29}$$

Из (2.29) можно усмотреть, по крайней мере, две возможности уменьшения величины систематических уходов.

Подберем параметры гироскопа так, чтобы удовлетворялось условие $i_{x_2}-i_{x_3}-i_{y_3}\sim\varkappa_1$, $\varkappa_2\ll1$. Тогда оставшиеся в (2.29) слагаемые будут соизмеримы с отброшенными в (2.28) по малости членами с множителями $\varkappa_1$, $\varkappa_2$.

Вторая возможность связана с тем, что выражения ω_1, ω_2, ω_3 несимметричны относительно $\delta\omega_{z_1}^{(0)}$, $\delta\omega_{z_2}^{(0)}$, $\delta\omega_{z_3}^{(0)}$. Это может быть использовано, если в силу тех или иных особенностей конструкции системы переменные $\delta\omega_{z_1}^{(0)}$, $\delta\omega_{z_2}^{(0)}$, $\delta\omega_{z_3}^{(0)}$ сильно разнятся по величине. Так, компоновка гироскопов, указанная на фиг. 1, заслуживает предпочтения при $\delta\omega_{z_1}^{(0)} \ll \delta\omega_{z_2}^{(0)}$, $\delta\omega_{z_3}^{(0)}$ или $\delta\omega_{z_2}^{(0)} \ll \delta\omega_{z_1}^{(0)}$, $\delta\omega_{z_3}^{(0)}$. В случае $\delta\omega_{z_3}^{(0)} \ll \delta\omega_{z_1}^{(0)}$, $\delta\omega_{z_2}^{(0)}$ гироскопы должны быть установлены на объекте так, чтобы оси их наружных колец были параллельны оси z_1 или оси z_2.

Автор благодарен Ю. Г. Мартыненко и А. И. Кобрину за обсуждение работы.

Поступила 15 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бутенин Н. В., Климов Д. М., Лунц Я. Л., Степаненко Н. П.* Нелинейные задачи теории гироскопических систем. Развитие механики гироскопических и инерциальных систем. М., «Наука», 1973.
2. *Осмен Дж.* Уход двухстепенного и трехстепенного гироскопов вследствие угловых вибраций. Проблемы гироскопии. М., «Мир», 1967.
3. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Изд-во МГУ, 1971.
4. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., Гостехиздат, 1952.
5. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. Матем. сб., 1952, т. 31 (73), № 3.
6. *Васильева А. Б.* Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Успехи матем. наук, 1963, т. 18, № 3.