

УПРАВЛЕНИЕ МАЯТНИКОМ  
С МИНИМАЛЬНЫМИ ЗАТРАТАМИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

А. М. ФОРМАЛЬСКИЙ

(Москва)

Решается задача оптимального с энергетической точки зрения управления движением маятника. Показано, что оптимальное управление можно построить в виде последовательности из двух импульсов. Рассмотрение задачи управления на фазовом цилиндре вызывает необходимость построения так называемой разделяющей кривой. Выписано уравнение этой кривой. Получена полная картина синтеза.

1. Рассмотрим уравнение движения плоского физического маятника

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + mgl \sin \varphi = M \quad (1.1)$$

Здесь  $\varphi$  — угол между линией, соединяющей точку подвеса с центром масс, и вертикалью,  $I$  — момент инерции маятника относительно точки подвеса,  $mg$  — вес маятника,  $l$  — расстояние от точки подвеса до центра масс,  $M$  — управляющий момент. Заменой времени  $\tau = (mgl/I)^{1/2} t$  уравнение (1.1) приводится к виду

$$\varphi'' + \sin \varphi = u \quad (1.2)$$

где  $u = M/mgl$ , а точками обозначено дифференцирование по  $\tau$ .

При  $M=0$  маятник имеет положения равновесия

$$\varphi = \pi k, \quad \dot{\varphi} = 0 \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Четные значения индекса  $k$  соответствуют устойчивому (нижнему) положению равновесия, нечетные — неустойчивому (верхнему).

Рассмотрим задачу о приведении маятника при помощи управляющего момента в положение равновесия за заданное время  $T$ . При этом будем искать управление, на которое затрачивается минимальное количество энергии. Механическая энергия, затрачиваемая на управление, характеризуется функционалом

$$E(0, T) = \int_0^T |u(\tau) \dot{\varphi}(\tau)| d\tau \quad (1.3)$$

Итак, рассмотрим задачу приведения маятника в положение равновесия за время  $T$  при помощи управления, которое минимизирует функционал (1.3). На самом деле будем решать две задачи: задачу приведения в неустойчивое положение равновесия и задачу приведения в устойчивое положение равновесия.

На управляющий момент никаких ограничений здесь не накладывается, в отличие, например, от работ [1-3], где рассматривается задача быстрогодействия при ограниченном по величине управляющем моменте.

2. Оценим затраты энергии при импульсном управлении. При  $u=0$  система (1.2), будучи консервативной, имеет интеграл энергии

$$H(\varphi, \dot{\varphi}) = 1/2\dot{\varphi}^2 - \cos \varphi = \text{const} \quad (2.1)$$

Легко видеть, что справедливы следующие соотношения:

$$E(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} |u(\tau)\dot{\varphi}(\tau)| d\tau \geq \left| \int_{t_0}^{t_1} u(\tau)\dot{\varphi}(\tau) d\tau \right| = \\ = |H[\varphi(t_1), \dot{\varphi}(t_1)] - H[\varphi(t_0), \dot{\varphi}(t_0)]| \quad (2.2)$$

Если на отрезке времени  $[t_0, t_1]$  произведение  $u(\tau)\dot{\varphi}(\tau)$  не меняет знака, то затраты энергии на управление определяются равенством

$$E(t_0, t_1) = |H[\varphi(t_1), \dot{\varphi}(t_1)] - H[\varphi(t_0), \dot{\varphi}(t_0)]| \quad (2.3)$$

Допустим, что управление является импульсным

$$u(\tau) = C\delta(\tau - \tau') \quad (2.4)$$

Здесь  $\delta(\tau - \tau')$  — дельта-функция единичной интенсивности, равная нулю при  $\tau \neq \tau'$ . Константа  $C$  характеризует интенсивность и направление импульсного воздействия (удара).

Из уравнения (1.2) получаем, что при управлении (2.4)

$$\varphi(\tau'+0) = \varphi(\tau'-0), \quad \dot{\varphi}(\tau'+0) = \dot{\varphi}(\tau'-0) + C \quad (2.5)$$

где  $\varphi(\tau'-0)$ ,  $\dot{\varphi}(\tau'-0)$  — значения угла  $\varphi$  и угловой скорости  $\dot{\varphi}$  до импульсного воздействия, а  $\varphi(\tau'+0)$ ,  $\dot{\varphi}(\tau'+0)$  — то же «сразу» после импульсного воздействия.

Подсчитаем теперь затраты механической энергии при управлении (2.4), т. е. величину  $E(\tau'-0, \tau'+0)$ . Допустим сначала, что

$$\dot{\varphi}(\tau'-0)\dot{\varphi}(\tau'+0) \geq 0 \quad (2.6)$$

т. е. после импульсного воздействия угловая скорость  $\dot{\varphi}$  не меняет знака. При условии (2.6) в соответствии с выражениями (2.1), (2.3), (2.5)

$$E(\tau'-0, \tau'+0) = 1/2|\dot{\varphi}^2(\tau'+0) - \dot{\varphi}^2(\tau'-0)| \quad (2.7)$$

Если  $\dot{\varphi}(\tau'-0) = 0$ , то

$$E(\tau'-0, \tau'+0) = 1/2\dot{\varphi}^2(\tau'+0) \quad (2.8)$$

Если  $\dot{\varphi}(\tau'+0) = 0$ , то

$$E(\tau'-0, \tau'+0) = 1/2\dot{\varphi}^2(\tau'-0) \quad (2.9)$$

Допустим теперь, что константа  $C$  такова (по знаку и абсолютной величине), что

$$\dot{\varphi}(\tau'-0)\dot{\varphi}(\tau'+0) < 0 \quad (2.10)$$

т. е. после импульсного воздействия скорость  $\dot{\varphi}$  меняет знак. Управляющее воздействие (2.4) можно представить в виде двух импульсных воздействий

$$u_1(\tau) = C_1\delta(\tau - \tau'), \quad u_2(\tau) = C_2\delta(\tau - \tau')$$

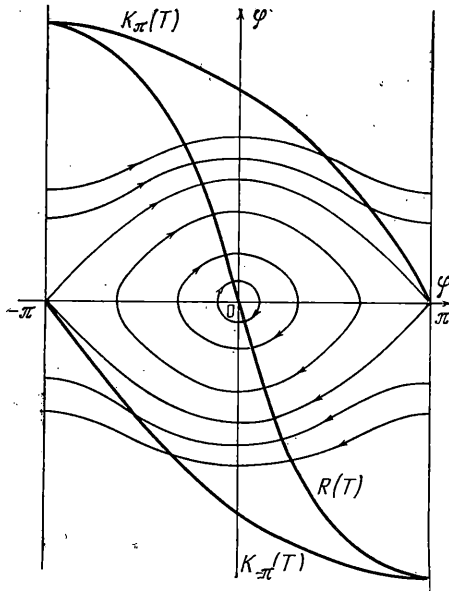
приложенных одно за другим сразу. Суммарная интенсивность этих воздействий равна  $C$ , т. е.  $C_1 + C_2 = C$ . Выберем интенсивность  $C_1$  управляющего воздействия  $u_1(\tau)$  так, чтобы угловая скорость  $\dot{\varphi}(\tau'+0)$ , возникающая

после этого воздействия, была равна нулю. Тогда затраты механической энергии на управление  $u_1(\tau)$  определяются формулой (2.9). При импульсном воздействии  $u_2(\tau)$  угловая скорость  $\dot{\varphi}$  меняется от нуля до значения  $\dot{\varphi}'(\tau'+0)$ . Затраты механической энергии определяются по формуле (2.8). Суммируя величины (2.8) и (2.9), получаем, что при условии (2.10)

$$E(\tau'-0, \tau'+0) = 1/2[\dot{\varphi}'^2(\tau'-0) + \dot{\varphi}'^2(\tau'+0)] \quad (2.11)$$

Формулы (2.5), (2.7)–(2.9), (2.11) можно получить, пользуясь принятыми в теории обобщенных функций [4] определениями дельта-функции, например, определением, использующим последовательность ступенчатых функций.

3. Решим задачу приведения в положение неустойчивого равновесия. Траектории уравнения (1.2) имеет смысл рассматривать не на всей фазовой плоскости переменных  $\varphi, \dot{\varphi}$ , а лишь в полосе шириной  $2\pi$ . Будем рассматривать траектории в полосе  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ . Совмещая прямые  $\varphi = -\pi$



Фиг. 1

и  $\varphi = \pi$ , получаем фазовый цилиндр. Неустойчивое положение равновесия описывается равенствами  $\varphi = \pm\pi, \dot{\varphi} = 0$ .

Траектории уравнения (1.2) при  $u=0$  [5] показаны на фиг. 1. Обозначим через

$$\dot{\varphi} = f(\varphi, T) \quad (3.1)$$

уравнение кривой  $K_\pi(T)$  на плоскости  $\varphi, \dot{\varphi}$ , с которой изображающая точка при  $u=0$  попадает на прямую  $\varphi = \pi$  ровно за время  $T$ . Это уравнение будем рассматривать в полосе  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ . В неявном виде уравнение (3.1) записывается, очевидно, при помощи эллиптического интеграла

$$\int_{\varphi}^{\pi} \frac{d\xi}{(\varphi^2 - 2 \cos \varphi + 2 \cos \xi)^{1/2}} = T \quad (3.2)$$

Кривая  $K_{-\pi}(T)$ , с которой изображающая точка при  $u=0$  попадает на прямую  $\varphi = -\pi$  за время  $T$ , симметрична кривой  $K_\pi(T)$  относительно начала координат (фиг. 1) и описывается поэтому уравнением

$$\dot{\varphi} = -f(-\varphi, T) \quad (3.3)$$

Кривая  $K_\pi(T)$  пересекается с каждой из интегральных траекторий (2.1) не более одного раза. Кривые  $K_\pi(T)$ , соответствующие большим значениям  $T$ , располагаются, очевидно, ниже кривых, соответствующих меньшим значениям  $T$ . Все кривые  $K_\pi(T)$  располагаются выше кривой

$$1/2\dot{\varphi}^2 - \cos \varphi = 1 \quad (3.4)$$

и пересекаются с ней только в точке  $\varphi = \pi, \dot{\varphi} = 0$ .

Допустим, что начальная точка  $(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$  расположена над кривой  $K_\pi(T)$ . Тогда при помощи управления вида

$$u(\tau) = C\delta(\tau - t) \quad (3.5)$$

состоящего из одного импульса, маятник можно к моменту  $\tau=T$  привести в желаемое положение равновесия. Действительно, при пассивном движении ( $u=0$ ) изображающая точка к некоторому моменту времени  $t < T$  попадает на прямую  $\varphi=\pi$ . При этом

$$\dot{\varphi}(t) = (\varphi_0'^2 - 4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi_0)^{1/2}$$

Если  $C = -\dot{\varphi}(t)$ , то при  $\tau=t+0$  изображающая точка оказывается в положении  $\varphi=\pi$ ,  $\dot{\varphi}=0$  и остается в этом положении при всех  $\tau > t$ .

Затраты механической энергии на управление (3.5) в соответствии с формулой (2.9) описываются выражением

$$E(0, T) = \frac{1}{2} \varphi'^2(t) = \frac{1}{2} \varphi_0'^2 - 2 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi_0 = H(\varphi_0, \varphi_0') - H(\pi, 0) \quad (3.6)$$

Управление (3.5) представляет собой тормозящий импульс. Этот импульс уменьшает энергию  $H(\varphi, \dot{\varphi})$  маятника.

Если требуется привести маятник в желаемое положение ровно за время  $T$  (а не раньше), то управление можно строить так:

$$u(\tau) = C_1 \delta(\tau) + C_2 \delta(\tau - T) \quad (3.7)$$

где коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  имеют вид

$$C_1 = f(\varphi_0, T) - \varphi_0', \quad C_2 = -(f^2(\varphi_0, T) - 4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi_0)^{1/2} \quad (3.8)$$

Управление (3.7) состоит из двух импульсов. Первый импульс (тормозящий) приводит изображающую точку на кривую  $K_\pi(T)$ , затем в пассивном движении к моменту  $\tau=T$  изображающая точка приходит на прямую  $\varphi=\pi$ . Второй импульс (также тормозящий) приводит изображающую точку в положение  $\varphi=\pi$ ,  $\dot{\varphi}=0$ . Легко убедиться в том, что затраты энергии на управление (3.7) описываются выражением (3.6).

Сравнивая соотношения (2.2) и (3.6), убеждаемся в том, что двухимпульсное управление (3.7), так же как и одноимпульсное (3.5), является оптимальным. Оптимальным будет также всякое другое управление, при котором энергия  $H(\varphi, \dot{\varphi})$  с течением времени монотонно уменьшается. Управление, при котором энергия  $H(\varphi, \dot{\varphi})$  изменяется немонотонно, оптимальным, очевидно, не является.

Если точка  $(\varphi_0, \varphi_0')$  располагается на кривой  $K_\pi(T)$ , то оптимальное управление, в отличие от рассмотренного выше случая, будет единственным. Оно состоит из одного тормозящего импульса, приложенного в момент  $\tau=T$ .

Для точек  $(\varphi_0, \varphi_0')$ , лежащих под кривой  $K_{-\pi}(T)$  и на ней, ситуация аналогична описанной выше.

Решим теперь задачу оптимального управления для начальных состояний  $(\varphi_0, \varphi_0')$ , расположенных между кривыми  $K_\pi(T)$  и  $K_{-\pi}(T)$ .

При помощи двухимпульсного управления (3.7) изображающую точку можно к моменту  $\tau=T$  привести в положение  $\varphi=\pi$ ,  $\dot{\varphi}=0$ . Соответствующие траектории  $ABC\pi$  показаны на фиг. 2, 3. Затраты энергии на первый импульс (разгоняющий) вычисляются по формуле (2.7), если  $\varphi_0' \geq 0$ , и по формуле (2.11), если  $\varphi_0' \leq 0$ . Затраты энергии на второй импульс (тормозящий) вычисляются по формуле (2.9). Следовательно, затраты энергии на управление (3.7) вычисляются по формуле

$$E(0, T) = H(\varphi_B, \varphi_B') - H(\varphi_A, \varphi_A') + H(\varphi_C, \varphi_C') - H(\pi, 0) = f^2(\varphi_0, T) - \frac{1}{2} \varphi_0'^2 - 2 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi_0 \quad (3.9)$$

если  $\varphi_0' = \varphi_A' \geq 0$ , и по формуле

$$E(0, T) = \frac{1}{2} \varphi_A'^2 + \frac{1}{2} \varphi_B'^2 + H(\varphi_C, \varphi_C') - H(\pi, 0) = f^2(\varphi_0, T) + \frac{1}{2} \varphi_0'^2 - 2 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi_0 \quad (3.10)$$

если  $\dot{\varphi}_0 \leq 0$ . Нижние индексы  $A, B, C$  у величин  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  означают, что эти величины являются координатами соответствующих точек.

При помощи двухимпульсного управления (3.7), в котором

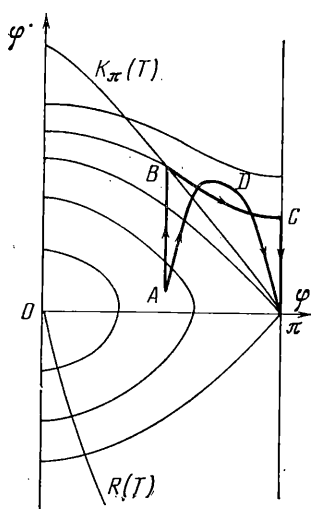
$$C_1 = -f(-\varphi_0, T) - \dot{\varphi}_0, \quad C_2 = (f^2(-\varphi_0, T) - 4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi_0)^{1/2} \quad (3.11)$$

изображающую точку можно к моменту  $\tau = T$  привести в положение  $\varphi = -\pi, \dot{\varphi} = 0$  (см. уравнение (3.3)). Затраты энергии при управлении (3.7), (3.11), если  $\dot{\varphi}_0 \leq 0$ , вычисляются по формуле

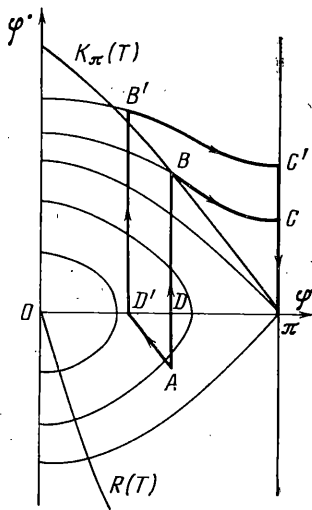
$$E(0, T) = f^2(-\varphi_0, T) - \frac{1}{2} \dot{\varphi}_0^2 - 2 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi_0 \quad (3.12)$$

и, если  $\dot{\varphi}_0 \geq 0$ , по формуле

$$E(0, T) = f^2(-\varphi_0, T) + \frac{1}{2} \dot{\varphi}_0^2 - 2 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi_0 \quad (3.13)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Приравнивая величины (3.9) и (3.13), а также (3.10) и (3.12), получаем уравнение так называемой разделяющей кривой  $R(T)$  (нижний индекс у  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  опущен)

$$\dot{\varphi} = -|f^2(\varphi, T) - f^2(-\varphi, T)|^{1/2} \operatorname{sgn} \varphi \quad (3.14)$$

Эта симметричная относительно начала координат линия (фиг. 1) легко строится при помощи линий  $K_\pi(T)$  и  $K_{-\pi}(T)$ . Для начальных состояний, лежащих на кривой (3.14), затраты энергии на двухимпульсное управление (3.7), (3.8) такие же, как на двухимпульсное управление (3.7), (3.11). Оба управления приводят маятник в желаемое положение равновесия, хотя и по различным траекториям.

Наличие разделяющей кривой типично для управляемых систем, движение которых рассматривается на фазовом цилиндре [1, 3, 6].

Для начальных состояний, расположенных выше кривой  $R(T)$ , затраты энергии при управлении (3.7), (3.8) меньше, чем при управлении (3.7), (3.11), а для начальных состояний, лежащих ниже кривой  $R(T)$ , наоборот.

Покажем теперь, что двухимпульсное управление (3.7), (3.8) является оптимальным для всех начальных состояний, расположенных между кривыми  $R(T)$  и  $K_\pi(T)$ .

Пусть сначала  $\varphi_0 \geq 0$ . Возьмем произвольное управление  $u(\tau)$ , которое приводит изображающую точку в положение  $\varphi = \pi$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ . Предположим, что траектория, соответствующая управлению  $u(\tau)$ , не уходит в полуплоскость  $\dot{\varphi} < 0$ ; тогда она располагается между прямыми  $AB$  и  $C\pi$ . Если эта траектория не пересекает криволинейный отрезок  $BC$  (располагается на нем и под ним), то время приведения по ней, очевидно, больше  $T$ . Допустим, что эта траектория пересекает отрезок  $BC$  (см. кривую  $AD\pi$  на фиг. 2;  $D$  — произвольная точка этой кривой, расположенная над отрезком  $BC$ ). Тогда затраты энергии при управлении  $u(\tau)$  можно в соответствии с соотношениями (2.2) оценить следующим образом:

$$E(0, T) \geq H(\varphi_D, \dot{\varphi}_D) - H(\varphi_A, \dot{\varphi}_A) + H(\varphi_D, \dot{\varphi}_D) - H(\pi, 0) > H(\varphi_B, \dot{\varphi}_B) - H(\varphi_A, \dot{\varphi}_A) + H(\varphi_C, \dot{\varphi}_C) - H(\pi, 0) \quad (3.15)$$

поскольку  $H(\varphi_D, \dot{\varphi}_D) > H(\varphi_B, \dot{\varphi}_B)$ .

Сопоставление соотношений (3.9) и (3.15) показывает, что расход энергии на траектории  $AD\pi$  больше, чем на траектории  $ABC\pi$ . Нетрудно показать, что всякая траектория, уходящая в полуплоскость  $\dot{\varphi} < 0$ , также «хуже» траектории  $ABC\pi$ .

Допустим теперь, что  $\varphi_0 < 0$ . Для сравнения с траекторией  $ABC\pi$  (фиг. 3) возьмем какую-либо траекторию  $AD'B'C'\pi$ . Очевидно, что  $\varphi_{D'} \leq \varphi_D$ . Если на траектории  $D'B'C'\pi$  достигается минимальный расход энергии, то она должна отвечать, как это доказано выше, двухимпульсному управлению. Разность  $\Delta E$  между энергией, затрачиваемой на траектории  $D'B'C'\pi$ , и энергией, затрачиваемой на траектории  $DBC\pi$ , описывается выражением

$$\Delta E = \frac{1}{2}\varphi_{B'}^2 - \frac{1}{2}\varphi_B^2 + H(\varphi_{B'}, \dot{\varphi}_{B'}) - H(\varphi_B, \dot{\varphi}_B) \quad (3.16)$$

Если  $\varphi_{D'} < \varphi_D$ , то величина  $\Delta E$  положительна, поскольку при этом  $\varphi_{B'} > \varphi_B$  и  $H(\varphi_{B'}, \dot{\varphi}_{B'}) > H(\varphi_B, \dot{\varphi}_B)$ .

Отсюда уже вытекает оптимальность траектории  $ABC\pi$ .

Для начальных состояний, расположенных на кривой  $R(T)$ , существует два закона оптимального управления.

Резюмируя все сказанное в п. 3, сформулируем следующую теорему.

**Теорема.** При всех начальных условиях оптимальное с точки зрения затрат энергии управление движением маятника можно построить в виде двух импульсов, один из которых действует в начале, а другой — в конце процесса управления.

4. Решим задачу приведения в положение устойчивого равновесия. Будем рассматривать траектории уравнения (1.2) в полосе  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Совмещая прямые  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\pi$ , получаем фазовый цилиндр. Устойчивое положение равновесия описывается равенствами  $\varphi = 0, 2\pi$ ;  $\dot{\varphi} = 0$ . Траектории уравнения (1.2) при  $u = 0$  показаны на фиг. 4.

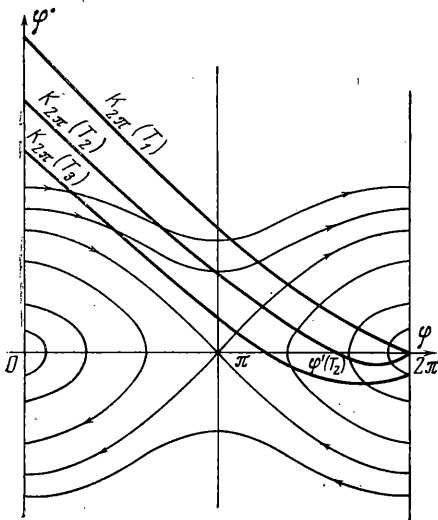
Обозначим через  $K_{2\pi}(T)$  и  $K_0(T)$  кривые, с которых изображающая точка при  $u = 0$  за время  $T$  попадает на прямые  $\varphi = 2\pi$  и  $\varphi = 0$  соответственно. Будем считать, что (3.1) — уравнение кривой  $K_{2\pi}(T)$ . В неявном виде уравнение (3.1) записывается при помощи интеграла (3.2), если верхний предел в нем заменить на  $2\pi$ . Кривые  $K_{2\pi}(T)$  и  $K_0(T)$  симметричны одна другой относительно точки  $(\pi, 0)$ . Поэтому уравнение кривой  $K_0(T)$  можно записать в виде

$$\dot{\varphi} = -f(2\pi - \varphi, T) \quad (4.1)$$

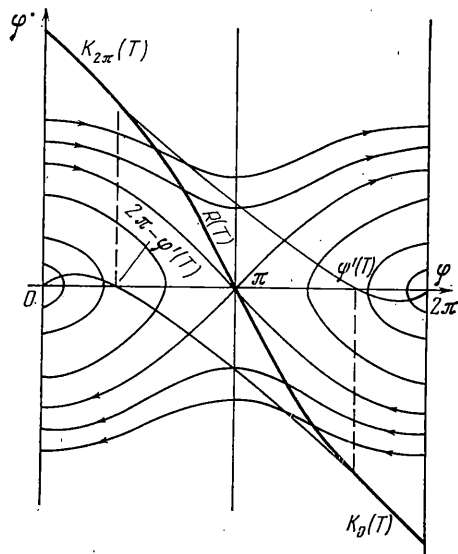
Кривые  $K_{2\pi}(T)$  при всех значениях  $0 < T \leq \pi$  проходят через точку  $(2\pi, 0)$  (фиг. 4). При  $T > \pi$  они пересекают прямую  $\varphi = 2\pi$  в точках с отрицательными значениями  $\dot{\varphi}$ . Эти утверждения легко понять, если

уравнение (1.2) линеаризовать около состояния  $\varphi=2\pi$ ,  $\dot{\varphi}=0$ . Все линии  $K_{2\pi}(T)$  на промежутке  $0 \leq \varphi < \pi$  располагаются выше кривой (3.4). При  $0 < T \leq \pi/2$  линии  $K_{2\pi}(T)$  целиком располагаются в области  $\varphi \geq 0$ . При  $T > \pi/2$  линия  $K_{2\pi}(T)$  пересекается с осью абсцисс в точке  $\varphi = \varphi'(T) > \pi$ . На промежутке  $0 \leq \varphi < \varphi'(T)$  кривая  $K_{2\pi}(T)$  располагается в области  $\varphi' > 0$ , на промежутке  $\varphi'(T) < \varphi < 2\pi$  — в области  $\varphi' < 0$  (фиг. 4). На фиг. 4 показаны кривые  $K_{2\pi}(T)$  при трех значениях  $T_1, T_2, T_3$  аргумента  $T$ , удовлетворяющих неравенствам  $T_1 < \pi/2 < T_2 < \pi < T_3$ .

Для начальных состояний, расположенных над кривой  $K_{2\pi}(T)$  или под кривой  $K_0(T)$ , при помощи рассуждений, аналогичных рассуждени-



Фиг. 4



Фиг. 5

ям п. 3, легко показать, что оптимальное управление можно построить в виде двух импульсов.

Решим теперь задачу оптимального управления для начальных состояний  $(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$ , расположенных между кривыми  $K_{2\pi}(T)$  и  $K_0(T)$ .

При помощи двухимпульсного управления (3.7), в котором

$$C_1 = f(\varphi_0, T) - \dot{\varphi}_0, \quad C_2 = -(f^2(\varphi_0, T) + 4 \sin^2 1/2 \varphi_0)^{1/2} \quad (4.2)$$

изображающую точку можно к моменту  $\tau = T$  привести в положение  $\varphi = 2\pi$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ . Затраты энергии на это управление вычисляются по формуле

$$E(0, T) = f^2(\varphi_0, T) - 1/2 \dot{\varphi}_0^2 + 2 \sin^2 1/2 \varphi_0 \quad (4.3)$$

если  $\dot{\varphi}_0 \geq 0$ ,  $\varphi_0 \leq \varphi'(T)$ , по формуле

$$E(0, T) = 1/2 \dot{\varphi}_0^2 + 2 \sin^2 1/2 \varphi_0 \quad (4.4)$$

если  $\dot{\varphi}_0 \leq 0$ ,  $\varphi_0 \geq \varphi'(T)$ , и по формуле

$$E(0, T) = f^2(\varphi_0, T) + 1/2 \dot{\varphi}_0^2 + 2 \sin^2 1/2 \varphi_0 \quad (4.5)$$

если  $\dot{\varphi}_0 \leq 0$  и  $\varphi_0 \leq \varphi'(T)$ .

При помощи управления (3.7), в котором

$$C_1 = -f(2\pi - \varphi_0, T) - \dot{\varphi}_0, \quad C_2 = (f^2(2\pi - \varphi_0, T) + 4 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_0)^{1/2} \quad (4.6)$$

изображающую точку к моменту  $\tau = T$  можно привести в положение  $\varphi = 0$ ,  $\dot{\varphi} = 0$  (см. уравнение (4.1)). Затраты энергии при управлении (3.7), (4.6) вычисляются по формуле

$$E(0, T) = f^2(2\pi - \varphi_0, T) - \frac{1}{2} \varphi_0^2 + 2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_0 \quad (4.7)$$

если  $\dot{\varphi}_0 \leq 0$ ,  $\varphi_0 \geq 2\pi - \varphi'(T)$ , по формуле

$$E(0, T) = \frac{1}{2} \varphi_0^2 + 2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_0 \quad (4.8)$$

если  $\dot{\varphi}_0 \geq 0$ ,  $\varphi_0 \leq 2\pi - \varphi'(T)$ , и по формуле

$$E(0, T) = f^2(2\pi - \varphi_0, T) + \frac{1}{2} \varphi_0^2 + 2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_0 \quad (4.9)$$

если  $\dot{\varphi}_0 \geq 0$ ,  $\varphi_0 \geq 2\pi - \varphi'(T)$ .

Приравнивая величины (4.3) и (4.9), а также (4.5) и (4.7), при  $2\pi - \varphi'(T) \leq \varphi \leq \varphi'(T)$  получаем уравнение разделяющей кривой  $R(T)$  в виде

$$\dot{\varphi} = |f^2(\varphi, T) - f^2(2\pi - \varphi, T)|^{1/2} \operatorname{sgn}(\pi - \varphi) \quad (4.10)$$

Приравнивая величины (4.3) и (4.8), получаем, что при  $0 \leq \varphi \leq 2\pi - \varphi'(T)$  уравнение разделяющей  $R(T)$  совпадает с уравнением (3.1). При  $\varphi'(T) \leq \varphi \leq 2\pi$  уравнение разделяющей  $R(T)$  совпадает с уравнением (4.1). Этот результат получается после приравнивания величин (4.4) и (4.7). Таким образом, на отрезках  $[0, 2\pi - \varphi'(T)]$  и  $[\varphi'(T), 2\pi]$  кривая  $R(T)$  совпадает с кривыми  $K_{2\pi}(T)$  и  $K_0(T)$  соответственно (фиг. 5).

Если  $0 < T \leq \pi/2$ , то кривая  $R(T)$  описывается уравнением (4.10) при всех значениях  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

Разделяющая кривая  $R(T)$  имеет тот же смысл, что и в п. 3.

Покажем, что управление (3.7), (4.2) является оптимальным для всех начальных состояний, расположенных между кривыми  $R(T)$  и  $K_{2\pi}(T)$ .

Если  $\dot{\varphi}_0 \geq 0$ , то оптимальность рассматриваемого управления доказывается точно так же, как в п. 3, при условии  $\dot{\varphi}_0 \geq 0$  доказывается оптимальность управления (3.7), (3.8).

Пусть  $\dot{\varphi}_0 < 0$ . Предположим сначала, что  $\varphi'(T) \leq \varphi_0 \leq 2\pi$ . Тогда при двухимпульсном управлении (3.7), (4.2) энергия  $H(\varphi, \dot{\varphi})$  изменяется монотонно во времени. Поэтому двухимпульсное управление, так же как и всякое другое, при котором энергия изменяется монотонно, является оптимальным. Затраты энергии при оптимальном управлении определяются по формуле (4.4).

Предположим теперь, что  $0 < \varphi_0 < \varphi'(T)$ . Для сравнения с траекторией  $ABCE$  (фиг. 6), соответствующей рассматриваемому двухимпульсному управлению, возьмем траекторию  $AD'B'C'E$ . Для доказательства того, что траектория  $ABCE$  лучше траектории  $AD'B'C'E$ , достаточно показать, что на траектории  $DBCE$  расход энергии меньше, чем на траектории  $D'B'C'E$ . Разность  $\Delta E$  между энергией, затрачиваемой на траектории  $D'B'C'E$ , и энергией, затрачиваемой на траектории  $DBCE$ , описывается выражением (3.16). Точка  $B$  лежит на кривой  $K_{2\pi}(T)$ , а точка  $B'$ , очевидно, — выше этой кривой. Можно доказать, что при изменении аргумента  $\varphi$  от  $\pi$  до



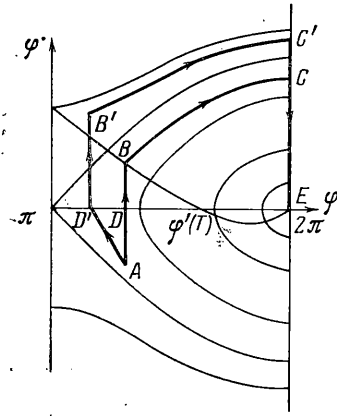
значения  $\varphi'(T)$  функция (3.1) монотонно убывает. Поэтому  $\varphi_{B'} > \varphi_B$ . Кроме того,  $H(\varphi_{B'}, \varphi_{B'}) > H(\varphi_B, \varphi_B)$ . Следовательно, величина  $\Delta E$  положительна. Отсюда вытекает оптимальность траектории  $ABCE$ .

Итак, теорема, сформулированная в п. 3, справедлива для задачи приведения маятника как в неустойчивое, так и в устойчивое положение равновесия.

Задачу управления с минимальными затратами энергии можно решить также для уравнений

$$\varphi'' - \varphi = u, \quad \varphi'' + \varphi = u, \quad \varphi'' = u \quad (4.11)$$

Первое из уравнений (4.11) получается после линеаризации уравнения (1.2) около неустойчивого положения равновесия, а второе — около устойчивого. Третье можно рассматривать как уравнение маятника в отсутствие силы тяжести. Для каждого из уравнений (4.11) оптимальное управление состоит из двух импульсных воздействий, одно из которых приложено в начале движения, другое — в конце. Заметим, что аналогичный результат получается для



Фиг. 6

уравнений (4.11), если качество управления оценивать при помощи интеграла

$$\int_0^T |u(\tau)| d\tau \quad (4.12)$$

характеризующего расход рабочего тела реактивного двигателя [<sup>7-10</sup>].

Отметим, что при исследовании линейных задач оптимального управления с различными критериями качества, например, с критерием (4.12), существенным моментом является выпуклость так называемых областей достижимости [<sup>9, 11</sup>]. При использовании критерия (1.3) эти области не являются, вообще говоря, выпуклыми. Они не являются выпуклыми, как нетрудно показать, ни для одного из уравнений (4.11). Отсутствие выпуклости осложняет решение задачи оптимального управления.

Поступила 29 IV 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Филимонов Ю. М. К задаче об оптимальном управлении математическим маятником. Дифференциальные уравнения, 1965, т. 1, № 8.
2. Jose L. G., Almuzara G., Flügge-Lotz I. Minimum time control of a non-linear system. J. Different. Equations, 1969, vol. 4, No. 1.
3. Белецкий В. В. Об оптимальном приведении искусственного спутника Земли в гравитационно-устойчивое положение. Космические исследования, 1974, т. 9, № 3.
4. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959.
5. Булгаков Б. В. Колебания. М., Гостехиздат, 1954.
6. Friedland B., Sarachik P. E. Indifference regions in optimum attitude control. IEEE Trans. Automat. Control, 1964, vol. 9, No. 2.
7. Kreindler E. Contributions to the theory of time-optimal control. J. Franklin Inst., 1963, vol. 275, No. 4.
8. Маршалов Л. М., Плогникова Г. В., Пожарицкий Г. К. Импульсные быстродействия в линейных системах второго порядка. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
9. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
10. Красовский Н. Н. Лекции по теории управления. Свердловск, вып. 1. Уральский ун-т им. А. М. Горького, 1968.
11. Формальский А. М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М., «Наука», 1974.