Обобщением метода Л. А. Галина получено решение упругопластической задачи о двухосном растяжении плоскости с двоякопериодической системой отверстий, по контуру которых задача равномерная нормальная нагрузка. Оценено влияние системы отверстий на распространение пластических зон по сравнению с одиночным отверстием при различных соотношениях между радиусами отверстий, шагом решетки и приложенной нагрузкой.

27 XII 1976. **В. Г. Громов** (Ростов-на-Дону) *Математическая теория устойчивости гибких вязкоупругих тел.*

В докладе развит и математически обоснован первый метод Ляпунова исследования устойчивости стабилизирующихся движений гибких термовязкоупругих тел, подверженных действию консервативных и неконсервативных внешних сил.

Рассмотрена общая нелинейная начально-краевая задача для возмущений анизотропной термовязкоупругости наследственного типа. В условиях ограниченности характеристик основного напряженно-деформированного состояния и задаваемых внешних сил, при естественных предположениях о гладкости и затухании релаксационных функций доказаны теоремы о разрешимости линеаризованной и нелинейной задачи для возмущений из энергетического класса.

Приведены теоремы об устойчивости и неустойчивости. В основу анализа возмущенных движений положена теория абстрактного аналога уравнения Вольтерра, рассматриваемого на полуоси.

Дан метод расчета критических параметров и закритических режимов. Показано, что последние определяются характером внешнего воздействия и могут стабилизироваться либо стремиться к периодическим колебаниям с течением времени.

Вскрыта специфика исследования потери устойчивости гибких диссипативных тел. Она характеризуется нарушением корректной (при наличии однозначной) разрешимости линеаризованных уравнений для возмущений. Происходит не разветвление (бифуркация) решений нелинейных уравнений, а «разветвление» множества решений на отдельные классы с определенным поведением во времени, причем каждый из них реализуется на «своем» классе внешних возмущений. Точка разветвления есть точка нарушения корректной разрешимости линеаризованного уравнения. Существуют «мягкие» и «жесткие» малые внешние возмущения.

Сформулированы условия мягких возмущений. На жестких возмущениях малые закритические режимы не существуют.

УДК 534.061.3

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ. СЕМИНАРЫ

Семинар по механике твердого деформируемого тела под руководством Э. И. Григолюка.

20 IX 1976. **В. А. Крысько** (Саратов) *Некоторые линейные задачи статики и динамики теории неоднородных пологих оболочек.*

Рассматриваются пологие оболочки на прямоугольном плане. Исходя из принципа Гамильтона — Остроградского, получены вариационное и дифференциальные уравнения с учетом геометрической нелинейности, упругопластических деформаций, поперечных сдвигов и инерции вращения. Для получения достоверных результатов исходные уравнения движения решаются численно и вариационными методами.

Исследуется их практическая сходимость и обосновывается оптимальный метод счета на ЭВМ. Рассмотрены пластины и оболочки переменной толщины. Исследуется напряженное и деформированное состояние конструкций с учетом геометрической и физической нелинейностей (с учетом и без учета разгрузки).

Построены алгоритмы расчета по деформационной теории пластичности и теории течения: на конкретных примерах проводится сопоставление результатов по обеим теориям.

Рассмотрены задачи о собственных колебаниях пластинок и оболочек. Дается обоснование динамического критерия потери устойчивости оболочек. Исследуется влияние на величины динамических критических нагрузок: формы импульсной нагрузки, коэффициента внешнего демпфирования, начальных несовершенств и физико-геометрических параметров.

Определены устойчивые и неустойчивые формы равновесных состояний оболочек при потере устойчивости.

27 IX 1976. **В. Н. Антонов** (Москва) *О совместном применении метода суммарных представлений и метода конечных элементов при исследовании колебаний оболочек с жидкостью.*

Вышеуказанным способом определены частоты и формы собственных линейных колебаний в цилиндрическом объеме жидкости цилиндрической оболочки с прямоугольными отверстиями.

Для записи потенциальной энергии оболочки использовались перемещения оболочки в узлах двумерной конечно-разностной сетки на поверхности оболочки. Кинетическая энергия жидкости выражалась через перемещения оболочки.

В рассмотренном примере частоты и формы близки к результатам расчета, когда кинетическая энергия жидкости определялась через перемещения оболочки методом плоских сечений и методом суммарных представлений.

4 X 1976. **Н. Д. Векслер** (Таллин) *О дифракции акустического импульса на цилиндрической оболочке, заполненной жидкостью.*

На упругую цилиндрическую оболочку набегает акустический импульс давления, фронт которого параллелен продольной оси оболочки. Рассматривается двумерная нестационарная задача о нахождении поля давления в отраженном, излученных и дифрагированных импульсах. Оболочка описывается линейными уравнениями типа Тимошенко, а окружающая и заполняющая оболочки жидкости считаются акустическими средами. Полагается, что свойства жидкостей вне и внутри оболочки различны.

Используется метод двукратного интегрального преобразования (Лапласа по времени и Фурье по углу), разработанный Фридлендером для задачи дифракции импульсов на неподвижном недеформируемом цилиндре. В рамках принятых моделей оболочки и жидкостей в пространстве двукратного интегрального преобразования выписывается точное решение задачи. Обратные преобразования выполняются приближенно аналитическими методами теории функций комплексного переменного.

Входящие в формальное решение модифицированные функции Бесселя первого и второго рода комплексного аргумента и порядка аппроксимируются асимптотическими разложениями. Асимптотические разложения Ольвера по целым отрицательным степеням параметра преобразования Лапласа s служат для нахождения отраженного и излученных импульсов. В переходной зоне, когда разложения Ольвера перестают быть справедливыми, применяются асимптотические представления Лангера по отрицательным степеням s степени $^1/_3$, посредством которых находятся дифрагированные импульсы.

Вначале выполняется обратное преобразование Фурье. В предположении больших s находятся полюсы излученных и дифрагированных импульсов. Преобразования Лапласа излученных и дифрагированных импульсов отыскиваются путем вычисления вычетов в этих полюсах.

Преобразование Лапласа отраженного импульса определяется с помощью метода перевала. Выводятся уравнения фронтов отраженного, излученных и дифрагированных импульсов; определяются критические углы раздвоения фронтов. Находятся интенсивности разрывов на фронтах импульсов и закономерности их изменения по фронту и при удалении от него.

Исследуется влияние свойств упругой оболочки и заполняющей ее жидкости на импульсы этих трех типов. Результаты справедливы только в непосредственной близости от фронтов импульсов.

11 X 1976. **Н. М. Юнгерман** (Новосибирск) *Ползучесть призматических оболочек при стесненном кручении.*

Рассматривается методика расчета тонкостенных замкнутых призматических конструкций на ползучесть при стесненном кручении.

Решение задачи строится на основе допущений, обычно принимаемых в теории стесненного кручения упругих стержней и оболочке: недеформируемость контура поперечного сечения, равномерное распределение напряжений по толщине стенки. Соотношения ползучести формулируются по теории типа течений при степенной зависимости скорости деформаций от напряжений.

Для решения задачи о ползучести используется вариационная теорема Сандерса – Мак-Комба – Шлехте.

Полученная система нелинейных дифференциальных уравнений может быть решена с помощью известных методов численного интегрирования.

В рассмотренных примерах нелинейная краевая задача решается методом прогонки по координате и шагами по времени (неустановившаяся ползучесть); методом квазилинеаризации по Беллману, который позволяет свести нелинейную краевую задачу к последовательности линейных задач Коши (установившаяся ползучесть).

Решение упругой задачи и задачи о ползучести обобщаются на случай оболочки с поперечным сечением произвольной формы и сложной нагрузки (изгиб с кручением), оболочки, подкрепленной продольным набором стержней, многозамкнутого призматического кессона.

Приводятся некоторые результаты экспериментальных исследований ползучести, проведенных на специально созданной установке. Клепаные призматические образцы типа прямоугольного кессона, нагруженные крутящей или бимоментной нагрузкой, испытывались на ползучесть при T=200° C.

Сравнение экспериментальных данных с результатами расчета показывает удовлетворительное совпадение и подтверждает применимость предложенной методики расчета в иженерной практике.

18 X 1976. **Г. Я. Попов** (Одесса) *Ортогональные многочлены и биортогональные разложения в задачах механики.*

Обобщаются результаты работы автора (ПММ, 1969, т. 33, вып. 3), в которой получены спектральные соотношения для ортогональных многочленов и интегральных операторов, в частности, в сторону рассмотрения интегро-дифференциальных операторов. Примером нового спектрального соотношения такого сорта является следующее:

$$\frac{d}{dr}\int_0^1\left[\int_0^\infty J_0(rt)J_0(\rho t)\,dt\right]\rho P_{2n+1}(\sqrt{1-\rho^2})\,d\rho=\sigma_n P_{2n+1}(r)$$

где $P_n(z)$ – многочлен Лежандра, $J_0(z)$ – функция Бесселя.

В явном виде строятся системы гармонических $\pi_n^{(0)}(x, y)$ многочленов, ортогональных на произвольной односвязной области, и выражаемые через них $m+1$-гармонические многочлены $\pi^{(m)}(x, y)$, т. е. $\Delta^{m+1}\pi^{(m)}=0$. С помощью построенных таким образом многочленов получено в явном виде решение статической задачи об изгибе защемленной по контуру пластинки (произвольной в плане).

В виде рядов найдено решение динамической задачи изгиба защемленной по контуру пластинки (произвольной в плане, односвязной).

Метод биортогональных разложений перенесен и на общие уравнения $L\chi=f$ в гильбертовом пространстве H (L – линейный оператор в H).

25 X 1976. **С. Н. Карасев** (Казань) *Некоторые контактные задачи теории тонких трансверсально изотропных пластин и оболочек.*

Излагается один способ решения одномерных и некоторых двумерных контактных задач теории оболочек, податливых поперечному сдвигу. Суть способа для одномерных контактных задач состоит в следующем. Предварительно с помощью функции влияния строится исходное интегральное уравнение относительно нормального контактного напряжения. Затем из разрешающих дифференциальных уравнений равновесия оболочки (пластинки), взаимодействующей с другим объектом (например со штампом), отыскивается напряжение контакта в замкнутом виде с точностью до постоянных интегрирования. В дальнейшем эти неизвестные постоянные и область контакта (если заранее неизвестна) определяются из исходного интегрального уравнения и условий равновесия объекта.

Если объект имеет угловые точки (линии), то к напряжению контакта, найденному из уравнений равновесия оболочки, добавляются сосредоточенные силы, приложенные в угловых точках. Величина этих сил и неизвестные постоянные интегрирования определяются, как и ранее, из исходного интегрального уравнения и условий равновесия объекта. Для двумерных контактных задач этот подход эффективен в том случае, когда ядро интегрального уравнения и напряжение контакта можно разложить в одинарный ряд по одним и тем же собственным ортогональным функциям.

Применение данного способа показано на одномерных задачах изгиба прямоугольной пластинки, цилиндрической панели и оболочки, сферического купола штампами различной формы. Рассмотрены также задачи о взаимодействии цилиндрической оболочки и прямоугольной пластинки, двухцилиндрических оболочек, находящихся под действием локальных нагрузок (сосредоточенных сил, нагрузок, распределенных по малой площадке).

Решена двумерная задача изгиба круглой пластинки, подкрепленной круглой жесткой накладкой. Центр накладки совпадает с центром пластинки (к накладке и пластине приложены сосредоточенные силы).

Исследовано влияние граничных условий и пригрузки на распределение нормальных контактных напряжений. Доказано, что контактные напряжения, найденные по теории учитывающей деформацию поперечного сдвига, описываются функциями, которые образуют дельтаобразные последовательности. Эти последовательности стремятся при $G_{1z} \to \infty$ (G_{1z} – модуль поперечного сдвига) к дельта-функции, а их производные стремятся к производным от дельта-функции. Последние два обстоятельства позволили осуществить предельный переход к решениям теории Кирхгофа – Лява.

1 XI 1976. **Е. З. Король** (Москва) *Некоторые задачи деформирования структурно-нестабильных материалов.*

В процессе изготовления и эксплуатации высокотемпературных материалов под действием интенсивных тепловых потоков происходят изменения структуры вследствие дегидратации, спекания и фазовых превращений. Структурные превращения сопровождаются наблюдаемыми в механических испытаниях явлениями объемной деформации (усадка или расширение) и изменениями термомеханических характеристик материала (модулей упругости, деформационных и прочностных характеристик, коэффициентов термического расширения, теплопроводности, температуропроводности и т. д.), которые могут быть как обратимы, так и необратимы.

Для описания процессов неизотермического деформирования материалов, структурная нестабильность которых обусловлена процессами сушки, спекания и фазовыми превращениями при обжиге и эксплуатации, предлагается вариант соотношений деформационной термоупругопластичности. Эти соотношения вместе с описанными явлениями учитывают также появляющуюся вследствие изменений структуры анизотропию (деформационную) и, кроме того, зависимость механических свойств от вида нагружения.

Формулируются основные положения варианта, где наряду с известными положениями теории малых термоупругопластических деформаций при простом нагружении принимается, что для описания структурной нестабильности и сопутствующих явлений может служить один структурный параметр – деформация объема. Определяющие соотношения для изотропного тела по виду совпадают с ранее предложенными автором (Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 2; 1976, № 5); с введением зависимости материальных функций от структурного параметра.

Для случая появляющейся в результате структурных изменений деформационной анизотропии используются тензорно-линейные соотношения нелинейно-упругой анизотропной среды. Приводятся данные, подтверждающие это положение, и отмечается, что изменения термомеханических величин в процессе сушки и спекания, например, могут достигать значительных величин. Описывается система опытов для экспериментального определения материальных функций и приводятся условия на них, вытекающие из теорем минимума дополнительной работы и работы дополнительных сил. Рассмотрены различные варианты представления зависимости термомеханических характеристик от структурного параметра. Формулируется вариационный принцип для структурно-нестабильных деформируемых сред с описанными соотношениями между определяющими величинами.

Дается постановка краевых задач деформирования тел при нагреве и охлаждении с учетом обратимых и необратимых структурных изменений материалов.

Для упрощенных моделей доказывается единственность решения задач и обсуждаются приближенные методы решения нелинейных функциональных уравнений, определяющих напряженно-деформированные состояния структурно-нестабильных тел при нагреве (метод шагового интегрирования, метод последовательных приближений, метод малого параметра и метод усреднения). Дается решение и анализ задач нагрева структурно-нестабильных тел.

15 XI 1976. **А. С. Либерзон** (Москва) *Рациональное проектирование в задачах динамики оболочек из композиционных материалов.*

Рассматриваются вопросы ограничения уровня динамических напряжений в тонких оболочках и тонкостенных закрученных стержнях путем рационального армирования материала.

Для анализа привлекаются уточненные уравнения движения упругих слоистых анизотропных оболочек, учитывающие деформацию сдвига в поперечном направлении и инерцию вращения нормального элемента.

Основные зависимости теории малых деформаций произвольно закрученных армированных стержней получены на основе линейных соотношений слоистых анизотропных оболочек со слоями переменной толщины, исходная поверхность которых наделяется метрикой геликоида. Уравнения равновесия, соотношения упругости и естественные краевые условия, соответствующие введенным кинематическим и статическим гипотезам, выводятся из смешанного принципа стационарности Рейсснера. Полученные зависимости обобщают существующие прикладные теории на случай учета поперечных сдвигов в неоднородном по сечению анизотропном материале.

Рассматриваемая проблема оптимального проектирования решается в два этапа. На первом этапе формулируется задача нелинейного математического программирования, где в качестве функции цели выбирается мера отклонения спектра собственных частот от заданного конечного ряда действительных чисел. В качестве варьируемых параметров выступают толщины слоев и направления главных осей анизотропии каждого слоя. Для решения задачи используется модификация метода случайного поиска и метод сопряженных градиентов в сочетании с методом штрафных функций.

Второй этап проектирования представляет итеративный процесс последовательного улучшения вектора структурных параметров, обеспечивающий направленное изменение частот собственных колебаний слоистой конструкции. Основу метода составляет использование функций влияния, характеризующих чувствительность собственных частот анизотропной конструкции к изменению различных параметров.

Численные результаты получены для случая малых колебаний относительно положения равновесия тонкостенных слоистых естественно закрученных стержней, армированных прямоугольных пластин и цилиндрических оболочек.

22 XI 1976. **А. Н. Ульяшина** (Москва) *Об одном варианте теории ортотропных пластин и оболочек.*

Получены уравнения технической теории многослойных ортотропных оболочек с переменными по толщине упругими свойствами, учитывающие сдвиговые и нормальную поперечные деформации.

Построенная кинематическая модель позволяет представить тангенциальные перемещения u_α, u_β функциями, квадратично зависящими от γ, а нормальные перемещения u_γ — линейно зависящими.

Уравнения записаны в смешанной форме: в качестве неизвестных функций включают три составляющих вектора перемещения и три напряжения на исходной поверхности (в совокупности имеют шестнадцатый порядок). Граничные условия получены вариационным методом.

Представлены частные формы записи разрешающих уравнений для различных вариантов оболочек.

Рассматривается приложение полученных уравнений к решению задач изгиба балок, пластин и оболочек.

На примере плоской задачи теории упругости показано, что пренебрежение эффектом Пуассона по толщине вполне допустимо и практически не сказывается на напряженно-деформированном состоянии.

Далее рассмотрена задача изгиба неоднородной семнадцатислойной шарнирно опертой пластины сосредоточенной силой. Результаты решения сравниваются с опубликованными экспериментальными и теоретическими результатами Л. В. Баева.

Решена задача изгиба однородной ортотропной прямоугольной пластины равномерно распределенным давлением. Исследовано влияние относительной толщины пластины и механических свойств материала на величину максимального прогиба.

Рассмотрены задачи осесимметричной деформации круговых цилиндрических оболочек. Исследовано напряженное состояние однородной ортотропной оболочки, усиленной упругим кольцом, под действием внутреннего давления. Полученное решение сравнивается с известными экспериментальными данными и классическим решением.

Рассмотрена также задача изгиба полубесконечной жесткозащемленной оболочки, нагруженной равномерным давлением. Исследовано влияние относительной толщины оболочки и механических свойств материала на распределение напряжений по толщине закрепленного края.

29 XI 1976. **В. Н. Барсуков** (Куйбышев) *Некоторые вопросы теории пологих многослойных оболочек нерегулярной структуры.*

Приводятся линеаризированные уравнения устойчивости сжимаемых многослойных цилиндрических панелей нерегулярной структуры. Решены задачи по определению критических нагрузок свободно опертых сжимаемых цилиндрических панелей и пластин.

6 XII 1976. **В. С. Морозов** (Москва) *Об одном алгоритме решения задач устойчивости оболочек при неосесимметричном нагружении.*

Предлагается численный метод расчета оболочек вращения на местную устойчивость. Метод представляет собой сочетание метода Тимошенко и метода локальных вариаций, с помощью которого можно при небольших затратах машинного времени решать задачи устойчивости для оболочек при неосесимметричном нагружении. Исследована сходимость и эффективность алгоритма на модельных задачах, имеющих точное решение.

Рассмотрены некоторые задачи для консольных цилиндрических оболочек, нагруженных изгибающей силой и изгибающим моментом при наличии внутреннего давления. Решены задачи устойчивости сжатой зоны цилиндрической оболочки, нагруженной продольной сосредоточенной силой, через упругий торцевой и промежуточный шпангоуты. Проведено сравнение теоретических результатов с известными экспериментальными данными.

13 XII 1976. **Д. В. Тарлаковский** (Москва) *Нестационарное поведение толстостенной упругой сферы в жидкости.*

Рассмотрено взаимодействие внешних (сферических или плоских) и внутренних сферических (с произвольным расположением источника) акустических волн давления с упругой полой сферой, погруженной в безграничную жидкость. Внутренняя полость оболочки заполнена в общем случае отличной от внешней среды жидкостью. Движение сферы описывается уравнениями линейной теории упругости. Жидкость считается идеальной и сжимаемой.

С использованием разложения искомых функций в ряды по полиномам Лежандра и метода «каскадного» интегрирования Лапласа получен общий интеграл волнового уравнения в сферических координатах, представляющий собой некоторые обобщенные сферические волны. Решение задачи дифракции строится в виде конечной суммы сходящихся и расходящихся элементарных волн. В пространстве преобразований Лапласа по времени получена система рекуррентных соотношений, которая ввиду рациональности входящих в нее функций позволяет в замкнутом виде найти аналитическое решение в пространстве оригиналов. Для сравнения в случае радиальных колебаний таким же методом получено решение аналогичных задач для тонкой оболочки. Отличие по максимальным перемещениям и напряжениям при относительной толщине оболочки $^1/_{20}$ около 10%.

Отмечена возможность использования данного метода для исследования подобных задач, когда окружающая или заполняющая среда являются упругими.

20 XII 1976. **А. Г. Горшков** (Москва) *Вертикальный вход в воду цилиндрической оболочки.*

Методом Бубнова получено решение задачи о вертикальном входе в воду тонкой упругой цилиндрической оболочки (панели), связанной с абсолютно твердым телом. Образующая оболочки параллельна свободной поверхности жидкости.

Первоначальная скорость движения оболочки предполагается малой. На начальном этапе погружения смоченная поверхность оболочки аппроксимируется плоской расширяющейся пластиной. Обобщенные координаты в разложениях для перемещений определяются численно на основе метода Рунге – Кутта.

Показано, что учет гидроупругого взаимодействия между оболочкой и жидкостью приводит к существенному изменению характеристик реакций в сравнении со схемой расчета по теории «жесткого» удара.

Проведено широкое параметрическое исследование процесса погружения упругой оболочки в идеальную несжимаемую жидкость.

27 XII 1976. **О. П. Шакулин** (Москва) *Динамический анализ волновых передач.*

Дифференциальное уравнение свободных колебаний кругового кольца, кроме решения в виде суперпозиции стоячих волн, допускает также решение в виде бегущей волны. Волна распространяется по кольцу с фазовой скоростью $\omega_1=p/n$, где p – круговая частота собственных изгибных колебаний кольца, n – волновое число. В случае совпадения скорости вращения подвижной нагрузки с фазовой скоростью распространения бегущей волны ω_1 затраты энергии на деформацию гибкого кольца будут минимальны.

Этот эффект наблюдается при испытании электромагнитных волновых передач. Экспериментальные зависимости КПД и амплитуды прогиба от скорости вращения магнитного поля имеют ярко выраженный экстремальный характер.

Расчетная схема механической волновой передачи представлена в виде упругого кольца, деформируемого вращающимся жестким кулачком-генератором. В приведенную массу кольца входит масса тел качения, расположенных между кулачком и гибким кольцом. Связь между кулачком генератором и кольцом односторонняя.

Построено решение автомодельного типа, описывающее деформацию кольца при вращении кулачка. Для косинусоидального кулачка при совпадении его угловой скорости вращения с фазовой скоростью распространения бегущей волны ($\omega_1=\omega_2$) динамическая реакция со стороны кулачка на гибкое кольцо обращается в ноль. Расчеты показывают, что в случае, когда кулачок спрофилирован по закону, отличному от косинусоидального, $\omega_2<\omega_1$.

Уменьшение зазора, с которым гибкое кольцо насаживается на кулачок, также приводит к уменьшению ω_2. Эти выводы подтверждаются экспериментально.

Расчетная угловая скорость (ω_2) оптимального режима определяется уравнением

$$\omega_2^2(h+h_1+h_2) = KK_1^2K_2h^3\frac{E}{\rho R^4}, \qquad K_1=\frac{\omega_2}{\omega_1}$$

где h, h_1 и h_2 — распределенная приведенная толщина обода, зубьев и тел качения соответственно; для $n=2$, $K=0.15$; для электромагнитных волновых передач $K_1=1$; K_2 – коэффициент ужесточения обода гибкого кольца за счет зубьев.

УДК 531/534 : 061.3

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ. СЕМИНАРЫ

Семинар по численным методам механики сплошной среды под руководством Н. Ф. Морозова, П. Е. Товстика и К. Ф. Черных.

3 II 1976. **А. М. Линьков** (Ленинград) *Запредельные характеристики и вопросы устойчивости.*

Рассмотрены пути обобщения критериев деформационного разрушения и разрушения при распространении трещин. Отмечается, что такое обобщение возможно на основе изучения устойчивости решений надлежащим образом поставленных математических задач. Эти задачи характеризуются особого рода нелинейностью, состоящей в наличии падающего участка на диаграмме, которая связывает кинематические и силовые характеристики. Предлагается определение устойчивости в малом, способное описать эффекты, реализующиеся в экспериментах по испытанию гладких образцов и образцов с надрезами. Устойчивым названо состояние, для которого на любых кинематически возможных перемещениях разность приращений работы внешних сил и внутренней энергии отрицательна. Если же существует поле, для которого эта разность неотрицательна, то состояние равновесия считается неустойчивым. Поскольку падающие участки диаграмм получаются лишь в статических опытах, под возможными перемещениями понимаются такие, которые не только равны нулю на части границы, где заданы перемещения, но и дают поле приращений напряжений, удовлетворяющих статическим уравнениям равновесия в той части объема, где деформация происходит на падающем участке. Вариации в области, деформируемой на восстающем участке, трактуются традиционным образом. Сформулированное условие устойчивости (неустойчивости) является достаточным (необходимым) для устойчивости (неустойчивости) по Ляпунову. Показано, что принятое определение является оптимальным в том смысле, что не переоценивает и не занижает устойчивости по сравнению с данными экспериментов по активному нагружению образцов из пластических материалов и образцов с трещинами надрезами. Практическое его использование в горной геомеханике дает оценки опасности горных ударов, согласующихся с данными шахтных наблюдений.

10 II 1976. **С. А. Иванов** (Ленинград) *Расчет собственных значений бигармонического оператора.*

Исследуется разностная схема В. Г. Корнеева для бигармонического оператора. Для решения краевой задачи предложен несколько измененный оператор с числом обусловленности $O(h^{-4})$. Рассмотрены вопросы применимости разностной схемы к задаче на собственные значения и приведены оценки сходимости собственных значений и собственных функций того же порядка, что и для исходной краевой задачи. Для класса областей, включающего в себя, в частности, выпуклые односвязные области, составлены программы расчеты собственных функций и собственных значений. Расчеты показали, что для прямоугольного равнобедренного треугольника, например, для получения первых четырех собственных значений с точностью 2–3% на машине М-22 требуется около 40 минут.