МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1977

УДК 531.53

ОПТИМАЛЬНЫЙ РАЗГОН МАЯТНИКА

Б. Н. СОКОЛОВ, Ф. Л. ЧЕРНОУСЬКО

(Москва)

Рассматривается движение маятника (висящего груза) с подвижной точкой подвеса. Требуется за кратчайшее время разогнать маятник из состояния покоя до поступательного движения, управляя перемещением точки подвеса. Построены оптимальные законы управления для нескольких вариантов постановки задачи при ограничениях на скорость точки подвеса. Полученные оптимальные управления имеют релейный характер. Задачи представляют интерес в связи с исследованием законов управления механическими системами, содержащими колебательные звенья, например подъемными кранами [1-3]. По постановке задач и способу решения работа продолжает [2, 3].

1. Постановка задачи. Рассматривается движение маятника (груза, подвешенного на нерастяжимом канате) в вертикальной плоскости. Точка подвеса может перемещаться с ограниченной скоростью вдоль заданной горизонтальной прямой ox. Введем следующие обозначения: φ — угол отклонения маятника от вертикали, x — координата точки подвеса, отсчитанная от начального положения, g — ускорение силы тяжести, m — масса маятника, I — его момент инерции относительно точки подвеса, L — расстояние от центра тяжести груза до точки подвеса.

Запишем линейное уравнение малых колебаний груза под действием сил тяжести и инерции

$$I\varphi^{\cdot\cdot}=-mgL\varphi+mLw \tag{1.1}$$

Движение точки подвеса описывается следующими уравнениями (v — скорость, w — ускорение точки подвеса):

$$x^{\cdot}=v,\quad v^{\cdot}=w \tag{1.2}$$

Рассматриваются два вида ограничений на скорость, которые отвечают различным условиям работы двигателей

$$-v_0\leqslant v(t)\leqslant v_0 \quad \text{или} \quad 0\leqslant v(t)\leqslant v_0 \tag{1.3}$$

Движение начинается из состояния покоя в момент $t=0$ и заканчивается в момент T. В этот момент скорость груза должна равняться максимальной скорости точки подвеса v_0, а колебания груза относительно точки подвеса должны быть погашены. Такие режимы важны и удобны с практической точки зрения, так как они не зависят от расстояния, на которое надо перенести груз. Поступательное движение груза позволяет в дальнейшем менять длину каната, на котором подвешен груз (колебания груза при этом не возникают).

Обозначая через a координату точки подвеса в момент T, запишем граничные условия для системы (1.1), (1.2)

$$\begin{gathered}\varphi(0)=\varphi^{\cdot}(0)=x(0)=v(0)=0\\ \varphi(T)=\varphi^{\cdot}(T)=0,\ v(T)=v_0,\ x(T)=a\end{gathered} \tag{1.4}$$

Перейдем в уравнениях (1.1), (1.2) к безразмерным переменным. Безразмерные (обозначенные штрихами) переменные свяжем с исходными (размерными) следующими соотношениями:

$$t=T_0t',\ x=v_0T_0x',\ v=v_0v',\ w=v_0T_0^{-1}w',\ \varphi=v_0T_0^{-1}g^{-1}\varphi'$$
$$T=T_0T',\ a=v_0T_0a',\ T_0=(I/mgL)^{1/2} \qquad (1.5)$$

В безразмерных переменных соотношения (1.1)—(1.3) примут вид

$$\varphi^{\cdot\cdot}+\varphi=w \qquad (1.6)$$

$$x^{\cdot}=v,\ v^{\cdot}=w \qquad (1.7)$$

$$-1\leqslant v(t)\leqslant 1 \text{ или } 0\leqslant v(t)\leqslant 1 \qquad (1.8)$$

Краевые условия (1.4) перейдут в соотношения

$$\varphi(0)=\varphi^{\cdot}(0)=x(0)=v(0)=0 \qquad (1.9)$$

$$\varphi(T)=\varphi^{\cdot}(T)=0,\ x(T)=a,\ v(T)=1 \qquad (1.10)$$

Для сокращения записи штрихи здесь и далее опущены. Сформулируем следующие три задачи оптимального управления точкой подвеса.

Задача 1. Выбором управления $w(t)$ за минимальное время T перевести систему (1.6), (1.7) из начального положения (1.9) в конечное положение (1.10), a свободно. Скорость точки подвеса предполагается ограниченной первым неравенством в (1.8).

Задача 2. Выбором управления $w(t)$ за минимальное время T перевести систему (1.6), (1.7) из начального положения (1.9) в конечное положение (1.10), a свободно. Скорость точки подвеса предполагается ограниченной вторым неравенством в (1.8).

Задача 3. Выбором управления $w(t)$ за минимальное время T перевести систему (1.6), (1.7) из начального положения (1.9) в конечное положение (1.10) при $a=0$. Скорость точки предполагается ограниченной первым неравенством в (1.8).

Обращая время в решениях задач 1—3, получаем оптимальные по быстродействию законы торможения поступательно движущегося маятника.

Преобразуем соотношения (1.6)—(1.10). Для этого введем новую переменную ψ, равную безразмерной абсолютной скорости груза

$$\varphi^{\cdot}=-\psi+v \qquad (1.11)$$

Продифференцируем обе части (1.11) по t и подставим в (1.6). В результате получим

$$\psi^{\cdot}=\varphi \qquad (1.12)$$

Определим краевые условия для линейной системы дифференциальных уравнений (1.11), (1.12) и первого уравнения в (1.7). Положим в (1.11) и (1.12) $t=0$ и $t=T$ и подставим полученные соотношения в (1.9), (1.10)

$$\varphi(0)=\psi(0)=x(0)=0 \qquad (1.13)$$

$$\varphi(T)=0,\ \psi(T)=1,\ x(T)=a \qquad (1.14)$$

Поставим в соответствие задачам 1 — 3 следующие три задачи оптимального управления.

Задача 1°. Выбором управления $v(t)$ за минимальное время T перевести систему, описываемую первым уравнением в (1.7) и уравнениями (1.11), (1.12), из начального положения (1.13) в конечное положение

ние (1.14), a свободно. Управляющая функция $v(t)$ предполагается ограниченной первым неравенством (1.8).

Задача 2° отличается от 1° тем, что $v(t)$ ограничено вторым неравенством (1.8).

Задача 3° отличается от 1° дополнительным условием $a=0$.

Задачи 1° — 3° отличаются от задач 1 — 3 тем, что в них нет фазовых ограничений, так как в уравнения системы не входит ускорение w, и поэтому скорость v можно рассматривать как управляющую функцию.

Повторяя рассуждения работы [3], где была предложена замена переменных (1.11), приходим к выводу, что задачи 1° — 3° эквивалентны задачам 1 — 3 в следующем смысле.

Допустим, что задача 1°, 2° или 3° решена, и найдено оптимальное управление $v(t)$. Тогда управление $w(t)$, равное $w(t)=v_1^{\cdot}(t)$ (где $v_1(t)=0$ при $t=0$, $v_1(t)=v(t)$ при $0<t<T$ и $v_1(t)=1$ при $t=T$), решает задачу 1, 2 или 3 соответственно. В точках разрыва функции $v_1(t)$ ее производная понимается в обобщенном смысле.

2. Решение задач 1 и 2. Применим принцип максимума [4] к задаче 1°. Выпишем функцию Гамильтона

$$H=p_1\varphi+p_2(v-\psi)+p_3v \tag{2.1}$$

и сопряженную систему

$$p_1^{\cdot}=p_2,\ p_2^{\cdot}=-p_1,\ p_3^{\cdot}=0 \tag{2.2}$$

Функция Гамильтона (2.1) достигает максимума по v при

$$v=\begin{cases}-1 & \text{если} \quad p_2+p_3<0\\ 1 & \text{если} \quad p_2+p_3>0\end{cases} \tag{2.3}$$

Интегрируя систему (2.2) и подставляя результаты в (2.3), получим (A_1, A_2, θ — постоянные интегрирования)

$$v=\begin{cases}-1 & \text{при} \quad A_1\sin(t+\theta)+A_2<0\\ 1 & \text{при} \quad A_1\sin(t+\theta)+A_2>0\end{cases} \tag{2.4}$$

Пусть число ненулевых интервалов постоянства функции $v(t)$ из (2.4) равно n. Обозначим через t_i длину i-го интервала постоянства. Из (2.4) сразу вытекает, что

$$\begin{gathered} t_i+t_{i+1}=2\pi \quad (1<i<n-1)\\ t_1+t_2\leqslant 2\pi \quad t_{n-1}+t_n\leqslant 2\pi \end{gathered} \tag{2.5}$$

Из (2.5) следует, что при $n>3$ оптимальное время разгона $T>2\pi$. Отметим, что это справедливо не только для задачи 1, но и для задач 2, 3, которые отличаются от задачи 1 ограничениями на управление $v(t)$ и граничными условиями.

В дальнейшем будем предполагать $n\leqslant 3$ при решении всех задач 1 — 3. Это предположение оправдано тем, что соответствующие $n\leqslant 3$ времена быстродействия будут удовлетворять неравенству $T\leqslant 2\pi$.

Пусть при решении задачи 1 с $n\leqslant 3$ имеем $v(t)=1$ на первом интервале $(0, t_1)$. Тогда на третьем интервале имеем также $v(t)=1$. Так как в конце этого интервала выполнены краевые условия (1.10), то на третьем интервале маятник движется поступательно, и поэтому краевые условия (1.10) для φ, $\varphi^{\cdot}$, v удовлетворены уже в начале третьего интервала. Поэтому можно положить $t_3=0$ и, следовательно, $n=2$; это приведет к уменьшению T.

В дальнейшем без нарушения общности можно ограничиться случаем $n=3$, $v(t)=-1$ на первом интервале $(0, t_1)$; случай $n=2$ получится отсюда как частный случай при $t_1=0$. Поэтому полагаем

$$v(t)=\begin{cases}-1 & \text{при} \quad t\in(0,t_1]\cup(t_1+t_2,T) \\ 1 & \text{при} \quad t\in(t_1,t_1+t_2]\end{cases} \tag{2.6}$$

$$v(0)=0,\quad v(T)=1,\quad t_1+t_2+t_3=T,\quad t_i\geqslant 0$$

Решение уравнения (1.6) с нулевыми начальными условиями определяется формулами

$$\varphi(t)=\int_0^t \sin(t-\tau)\,w(\tau)\,d\tau,\qquad \varphi^{\cdot}(t)=\int_0^t \cos(t-\tau)\,w(\tau)\,d\tau \tag{2.7}$$

Продифференцируем $v(t)$ из (2.6) согласно п. 1 и подставим $w(\tau)$ в (2.7). Положим $t=T$ и приравняем в соответствии с (1.10) интегралы (2.7) нулю. После интегрирования получим систему уравнений

$$\begin{gathered}-2\sin(t_2+t_3)+2\sin t_3=-\sin T \\ -2\cos(t_2+t_3)+2\cos t_3=2-\cos T \quad (T=t_1+t_2+t_3)\end{gathered} \tag{2.8}$$

Условия на правом конце для задачи 1 содержат один свободный параметр a, поэтому система (2.8) недоопределена. Величины t_1, t_2, t_3, удовлетворяющие (2.8), следует искать из дополнительного условия — минимума T. Нетрудно убедиться, что следующие значения t_i, T удовлетворяют системе (2.8)

$$t_1=0,\ t_2=\arccos {}^1/_4=1.3181\ldots,\ t_3=\arccos {}^7/_8=0.5054\ldots,\ T=t_2+t_3= \\ =\arccos(-{}^1/_4)=1.8235\ldots \tag{2.9}$$

Покажем, что любые другие значения t_i, удовлетворяющие системе (2.8), дают большее значение T. Для этого выразим значения интервалов t_2, t_3 из уравнений (2.8) через T. Будем предполагать, что $T\in[0,\pi]$. Возведем в квадрат и сложим оба уравнения (2.8). Получим $\cos t_2=(3+4\cos T)/8$, откуда

$$t_2=\arccos[(3+4\cos T)/8] \tag{2.10}$$

При $T\in[0,\pi]$ согласно (2.10) имеем $t_2\in[0,\pi]$. Разделим обе части первого уравнения (2.8) на соответствующие части второго; в результате получим

$$t_3+t_2/2=\operatorname{arc\,tg}[(2-\cos T)/\sin T]$$

Подставим в это равенство вместо t_2 выражение (2.10)

$$t_3=\operatorname{arc\,tg}[(2-\cos T)/\sin T]-{}^1/_2\arccos[(3+4\cos T)/8] \tag{2.11}$$

При всех $T\in[0,\pi]$ имеем $t_3\leqslant\pi/2$. Докажем, что $t_3\geqslant 0$. Для этого нужно доказать, что

$$2\operatorname{arc\,tg}[(2-\cos T)/\sin T]\geqslant\arccos[(3+4\cos T)/8]$$

Обе части неравенства принадлежат интервалу $[0,\pi]$. Поэтому оно выполнено, если справедливо

$$\cos 2\operatorname{arc\,tg}[(2-\cos T)/\sin T]\leqslant(3+4\cos T)/8$$

После элементарных преобразований приходим к неравенству $24\cos T\leqslant 39$, которое всегда верно. Следовательно, при всех $T\in[0,\pi]$ выполнено $t_3\in[0,\pi/2]$. Время T удовлетворяет неравенству

$$T\geqslant t_2(T)+t_3(T) \tag{2.12}$$

Как следует из соотношений (2.10), (2.11), величины t_2, t_3 — непрерывные функции T, удовлетворяющие неравенству $t_{2,3}>0$. Следовательно, минимум T достигается при равенстве $T=t_2+t_3$; в противном случае T можно было бы уменьшить при допустимых t_2, t_3. После подстановки $T=t_2+t_3$ в систему (2.8) и ее решения получаем соотношения (2.9).

Остановимся на решении задачи 2. В отличие от задачи 1 здесь скорость точки подвеса стеснена ограничением $0\leqslant v(t)\leqslant 1$. В этом случае на первом интервале постоянства скорость точки подвеса $v(t)$ может быть равна только единице, поэтому $v(t)$ на всем интервале $[0, T]$ имеет два интервала постоянства. Обозначим через t_1 длину первого интервала и через t_2 — длину второго интервала постоянства скорости $v(t)$. Решая соответствующую систему уравнений, аналогичную системе (2.8), получаем

$$t_1=t_2=\pi/3, \quad T=2\pi/3 \tag{2.13}$$

3. Решение задачи 3. Как и при решении задач 1—2, оптимум будем искать в классе режимов с $n\leqslant 3$ участками постоянства скорости $v(t)$.

Пусть $v(t)=-1$ на первом интервале постоянства. Таким образом рассмотрим сначала управление, определенное соотношением (2.6), и соответствующую систему уравнений (2.8). Из условия $a=0$ следует

$$t_1+t_3=t_2, \quad T=2t_2 \tag{3.1}$$

Подставим T из (3.1) в уравнения (2.8)

$$-2\sin(t_2+t_3)+2\sin t_3=-\sin 2t_2, \quad -2\cos(t_2+t_3)+2\cos t_3=2-\cos 2t_2 \tag{3.2}$$

После несложных преобразований получим $\cos t_2=-0.11237\ldots$, наименьший положительный корень этого уравнения, соответствующий наименьшему T согласно (3.1), $t_2=1.6834\ldots$, а время движения $T=3.3668\ldots$.

Согласно соотношению (3.1) корень t_3 первого уравнения в (3.2) должен лежать в интервале $[0, t_2]$, где $t_2=1.6834$. Единственный корень в этом интервале будет

$$t_3=\arccos[\cos t_2\cos t_2/2]-(t_2/2)=0.8041\ldots$$

Длину первого интервала постоянства скорости найдем из соотношения (3.1) $t_1=0.8793\ldots$. Рассмотрим далее второй случай: $v(t)=1$ на первом интервале постоянства, т. е. определим $v(t)$ формулой

$$v(t)=\begin{cases}-1 & \text{при} \quad t\in(t_1, t_1+t_2]\\ 1 & \text{при} \quad t\in(0,t_1]\cup(t_1+t_2, T]\end{cases} \tag{3.3}$$

$$v(0)=0, \quad T=t_1+t_2+t_3, \quad t_i\geqslant 0$$

Покажем, что управление вида (3.3) не позволяет перевести систему (1.6), (1.7) из начального положения (1.9) в положение (1.10) при $a=0$ за время T, меньшее 2π, при любом выборе t_i ($i=1, 2, 3$).

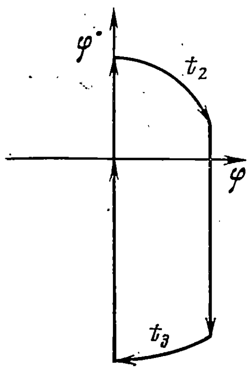
Продифференцируем (3.3) и подставим производную вместо $w(\tau)$ в соотношения (2.7). Положим $t=T$ и приравняем согласно (1.10) интегралы (2.7) нулю. После интегрирования и замены T согласно (3.1) получим систему уравнений

$$-2\sin(t_2+t_3)+2\sin t_3=-\sin 2t_2, \quad -2\cos(t_2+t_3)+2\cos t_3=-\cos 2t_2 \tag{3.4}$$

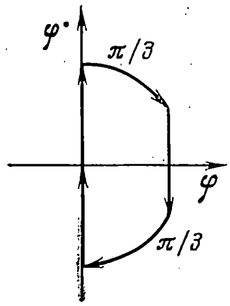
Возведем обе части уравнения (3.4) в квадрат и сложим их. После приведения подобных членов найдем $\cos t_2={}^7/_8$.

Отсюда t_2 равно либо $\arccos{}^7/_8$, либо $2\pi k\pm\arccos{}^7/_8$, $k=1, 2,\ldots$. Если верно второе соотношение, то время движения $T=2t_2>2\pi$. Покажем, что равенство $t_2=\arccos{}^7/_8$ невозможно. Умножим первое уравнение (3.4) на

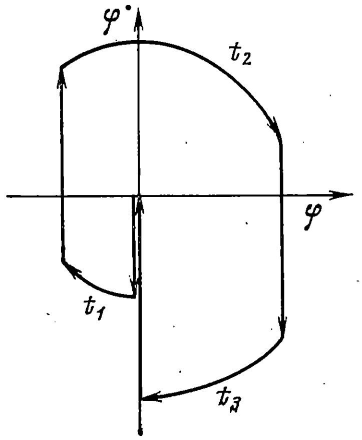
$\sin(t_2+t_3)$, а второе — на $\cos(t_2+t_3)$ и сложим их. В результате получим $\cos(t_2-t_3)={}^1/_4$ или $t_2-t_3=2\pi k\pm\arccos{}^1/_4$, $k\geqslant0$. Любое $k\geqslant1$ приводит к $T=2t_2>2\pi$. При $k=0$ получим $t_2=t_3\pm\arccos{}^1/_4$. Совместно с $t_2=\arccos{}^7/_8$ приходим к противоречию: $t_3<0$, либо $t_3>t_2$, см. (3.1).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Решение всех задач 1—3 построено. Во всех случаях имеем $v(0)=0$, $v(T)=1$. В задаче 1 оптимальный разгон маятника до поступательного движения осуществляет следующий закон изменения скорости точки подвеса, состоящий из двух участков:

$$v(t)=1,\ t\in(0,\ t_2);\quad v(t)=-1,\ t\in(t_2,\ t_2+t_3)$$

где t_2, t_3 определяются формулами (2.9). Фазовая траектория маятника в плоскости φ, $\varphi^\bullet$ (фиг. 1) состоит из трех вертикальных отрезков длиной 1, 2 и 2, соответствующих моментам включения и переключения скорости, между которыми заключены дуги, соответствующие движению с постоянной скоростью. Величины t_2, t_3 из (2.9) определяют угловые размеры дуг.

В задаче 2 оптимальная скорость точки подвеса равна

$$v(t)=1,\quad t\in(0,\ \pi/3];\quad v(t)=0,\quad t\in(\pi/3,\ 2\pi/3)$$

Фазовая траектория (фиг. 2) отличается от изображенной на фиг. 1 тем, что все вертикальные отрезки имеют длину 1. Размеры соответствующих дуг определены формулами (2.13).

Для задачи 3 фазовая траектория приведена на фиг. 3 и состоит из четырех вертикальных отрезков, длиной 1, 2, 2, 2 соответственно.

Отметим, что в задаче 3 движение маятника сначала идет в сторону, противоположную направлению окончательного поступательного движения.

Полученные результаты применимы не только для задач управления маятником, но и для других управляемых колебательных систем, например, для систем, содержащих упругие звенья или жидкость в сосуде. В этих случаях достаточно в формулах (1.5) константу T_0 заменить на $1/\omega_0$, где ω_0 — собственная частота колебаний, которые нужно погасить при разгоне системы.

Отметим, что в связи с другими постановками задач близкие по структуре оптимальные решения были построены в работах [5, 6].

Поступила 2 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баничук Н. В., Черноусько Ф. Л.* Определение оптимальных и квазиоптимальных управлений в одной колебательной механической системе. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 2.
2. *Черноусько Ф. Л.* Оптимальное перемещение маятника. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
3. *Соколов Б. Н., Черноусько Ф. Л.* Об оптимальном перемещении висящего груза. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4.
4. *Понтрягин Л. С. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.
5. *Петухов Л. В., Троицкий В. А.* О минимуме коэффициента динамичности. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1969, № 307.
6. *Троицкий В. А.* Оптимальные процессы колебаний механических систем. Л., «Машиностроение», 1976.