

$$+ \sum_{k_1=0}^{2k_1 \leq n_2} \sum_{k_2=0}^{n_2-2k_1} \frac{(-1)^{k_1}}{k_1! k_2!} \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{k_1 \bar{z}_1^{k_1} z_1^{n_1+k_1} \bar{z}_2^{k_2} z_2^{n_2-q}}{(n_1+k_1)!(n_2-q)!}$$

Аналогично обозначим  $W_{1n_1n_2}^\psi$ ,  $W_{2n_1n_2}^\psi$  поля перемещений, получаемые при подстановке  $f_{n_1n_2}$  на место  $\psi_0(z_1, z_2)$  при  $\varphi_0(z_1, z_2) = 0$

$$W_{1n_1n_2}^\psi = \sum_{k_1=0}^{2k_1 \leq n_2} \sum_{k_2=0}^{n_2-2k_1} \frac{(-1)^{k_1}}{k_1! k_2!} \frac{z_1^{k_1} \bar{z}_1^{n_1+k_1-1} z_2^{k_2} \bar{z}_2^{n_2-q}}{(n_1+k_1-1)!(n_2-q)!}$$

$$W_{2n_1n_2}^\psi = \sum_{k_1=0}^{2k_1 \leq n_2-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-2k_1-1} \frac{(-1)^{k_1}}{k_1! k_2!} \frac{z_1^{k_1} \bar{z}_1^{n_1+k_1} z_2^{k_2} \bar{z}_2^{n_2-q-1}}{(n_1+k_1)!(n_2-q-1)!}$$
(18)

На границе трехмерного шара единичного радиуса, т. е. при

$$x_4=0, \quad x_3=\sin \theta, \quad z_1=\cos \theta (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

формулы (17), (18) приобретают вид сумм тригонометрических функций, высшие гармоники которых определяются числами  $n_1, n_2$ . Это дает возможность использовать систему указанных аналитических функций при решении краевых задач теории упругости для шара.

Поступила 3 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М., «Наука», 1969.

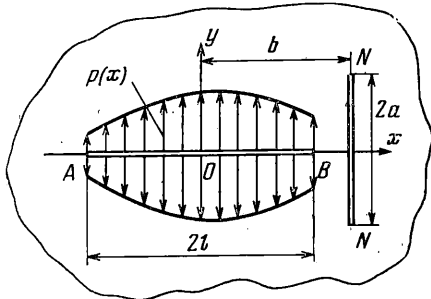
УДК 539.375

РАСПЕЧЛЕНИЕ В ОДНОНАПРАВЛЕННОМ КОМПОЗИТЕ

А. И. ЗОВНИН

(Москва)

Сопротивление материала распространению трещины можно существенно повысить армированием его высокопрочными волокнами, поскольку в этом случае магистральная трещина, рвущая волокна, тормозится за счет образования расщепления на границе раздела компонент [1-3]. Эффективность такого метода усовершенствования материала во многом зависит от поведения вторичной трещины [2]. Для изучения его в данной работе строится решение модельной задачи о взаимодействии двух ортогональных трещин в ортотропном материале, моделирующем однонаправленный композит. Задача о растяжении изотропной плоскости с двумя удаленными неколлинеарными трещинами решалась в [4].



Фиг. 1

Рассмотрим ортотропную плоскость с осями ортотропии  $Ox$  и  $Oy$  и двумя разрезами  $AB: |x| < l, y=0$  и  $NN: x=b, |y| < a$  (фиг. 1). Берега первого разреза загружены только нормальными усилиями  $p(x)$ , а берега второго свободны. Граничные условия задачи имеют вид

$$\sigma_y = -p(x), \quad \tau_{xy} = 0 \quad (|x| < l, y=0) \quad (1)$$

$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0 \quad (x=b, |y| < a) \quad (2)$$

Предположим, что на бесконечности напряжения отсутствуют, а корни характеристического уравнения материала не равны и чисто мнимые  $\pm i\beta_1, \pm i\beta_2$  ( $\beta_2 > \beta_1 > 0$ ). Последнее обычно выполняется для таких ортотропных материалов, как древесина, графиты, стекло- и углепластики.

Обозначим полураскрытие разреза  $AB$  через  $f(x)$ :

$$v(x, \pm 0) = \pm f(x) \quad (|x| < l) \quad (3)$$

Решение исходной задачи (1), (2) построим, как и в [5], в виде суперпозиции решений двух задач:

1)  $\sigma_{ij}^{(1)}, v_i^{(1)}$  — решение задачи о бесконечном теле с разрезом  $AB$  на берегах которого заданы вертикальные смещения (3) и отсутствуют касательные напряжения;

2)  $\sigma_{ij}^{(2)}, v_i^{(2)}$  — решение задачи о бесконечном теле с разрезом  $NN$ , на берегах которого заданы напряжения, определяемые из решения первой задачи

$$\sigma_x^{(2)} = -\sigma_x^{(1)}, \quad \tau_{xy}^{(2)} = -\tau_{xy}^{(1)} \quad (x=b, |y| < a) \quad (4)$$

В силу симметрии  $\tau_{xy}^{(1)}$  и  $\tau_{xy}^{(2)}$  равны нулю при  $y=0$  и если потребовать, чтобы на берегах первого разреза выполнялось условие

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) + \sigma_y^{(2)}(x, 0) = -p(x) \quad (|x| < l) \quad (5)$$

то  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}, v_i = v_i^{(1)} + v_i^{(2)}$  будет решением исходной задачи (1), (2),

Каждую из вспомогательных задач можно привести к краевой задаче Гильберта или Римана. Из решения первой задачи получаются [5], в частности, выражение

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) = A \int_{-l}^l \frac{f'(\xi)}{\xi - x} d\xi, \quad A = \frac{\beta_1 \beta_2}{\pi(\beta_1 + \beta_2) \beta_{22}} \quad (6)$$

и граничные условия (4) второй задачи. Решение этой задачи позволяет [6] определить второе слагаемое в (5)

$$\sigma_y^{(2)}(x, 0) = -\frac{A}{l} \int_{-l}^l f'(\xi) K\left(\beta_1, \beta_2, \frac{\xi}{l}, \frac{x}{l}\right) d\xi \quad (7)$$

$$K(\beta_1, \beta_2, s, t) = 1/2 B^2 [\Psi(\beta_1, \beta_2) + \Psi(\beta_2, \beta_1)]$$

$$\Psi(\gamma, \delta, s, t) = [(\gamma + \delta)\varphi^{-1}(\delta, \delta) + (\gamma - \delta)\varphi(\delta, \delta) - 2\delta\varphi(\gamma, \delta)] / \gamma\delta^2\eta(t, \delta)$$

$$\varphi(\gamma, \delta, s, t) = [\gamma(\lambda - t) + \delta(\lambda - s)] / [\gamma\eta(t, \delta) + \delta\eta(s, \gamma)]$$

$$\eta(t, v) = \sqrt{(\lambda - t)^2 + \alpha^2 v^2}, \quad B = \beta_1 \beta_2 / (\beta_2 - \beta_1), \quad t = x/l, \quad s = \xi/l, \quad \alpha = a/l, \quad \lambda = b/l$$

Подставляя (6) и (7) в (5), приводим исходную задачу к полному особому интегральному уравнению

$$\int_{-1}^1 g(s) \int \left[ \frac{1}{s-t} - K(\beta_1, \beta_2, s, t) \right] ds = -q(t), \quad g(s) = \frac{Af'(sl)}{p_0}, \quad q(t) = \frac{p(x)}{p_0} \quad (8)$$

В классе функций, имеющих интегрируемые особенности на обоих концах отрезка  $[-1, 1]$ , это уравнение имеет неединственное решение [7]. Искомое решение выделяется условием однозначности смещений  $v_i$ , приводящимся к виду

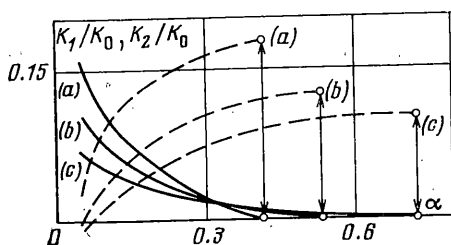
$$\int_{-1}^1 g(s) ds = 0 \quad (9)$$

Основной интерес для композитов представляет случай близкого расположения трещин, когда метод малого параметра [4, 5] непригоден. Поэтому уравнение (8) ре-

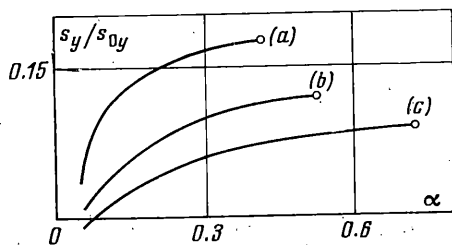
шалось прямым методом [8]. Согласно [7] для  $q(t)$ , непрерывных на  $[-1, 1]$ , решение имеет вид  $g(t) = h(t)(1-t^2)^{-1/2}$ , где  $h(t)$  непрерывна на отрезке  $[-1, 1]$ . Приближенное решение уравнения (8) получается аппроксимацией  $h(t)$  многочленом некоторой степени  $N$ . Коэффициенты его определяются из системы линейных уравнений, которая, как и в [8], получается из (8) и (9) методом коллокаций по  $N$  узлам Чебышева.

Соответствующие вычисления были проведены на ЭВМ для случая простого растяжения  $p(x) = p_0 = \text{const}$  для нескольких типичных ортотропных материалов [9]: стеклопластика с объемным содержанием волокна 32% и отношением модулей Юнга  $E'/E = 3.8$  (a) и углепластиков двух сортов с  $E'/E = 15.2$  (b) и  $E'/E = 52.0$  (c). При расчете было принято  $\lambda = 1.01$ . Основные вычисления проводились при  $N = 10$ , поскольку ряд примеров показал, что дальнейшее существенное увеличение (удвоение) числа узлов коллокации меняет значения коэффициентов интенсивности напряжений нормального разрыва  $K_1$  и поперечного сдвига  $K_2$  для вершин вторичной трещины  $NN'$  при  $\alpha > 0.1$  не более чем на 1%.

На фиг. 2 приведены вычисленные для упомянутых материалов значения  $K_1$  и  $K_2$  в вершинах расщепления. Эти величины отнесены к величине  $K_0 = p_0(\pi l)^{1/2}$  — коэффициенту интенсивности напряжений, создаваемых одиночной трещиной длины



Фиг. 2



Фиг. 3

2l. Видно, что  $K_2$  с увеличением длины расщепления  $\alpha$  монотонно возрастает (пунктир), а  $K_1$  (сплошная линия) убывает и обращается в нуль при некотором значении  $\alpha = \alpha_*$ , зависящем от свойств материала, но не от величины приложенной нагрузки. (При  $\alpha > \alpha_*$  берега расщепления входят в соприкосновение.) Напряженное состояние вблизи вершины вторичной трещины, таким образом, существенно меняется и переходит от нормального разрыва к поперечному сдвигу [10]. Разрушение волокнистого композита происходит не отрывом волокна от связующего, а сдвигом, и значительную роль при разрушении расщеплением играет сдвиговая прочность границы раздела.

Оценим при помощи полученного решения среднее напряжение на волокнах, лежащих вблизи вершины  $N$  вторичной трещины

$$s_y = \frac{1}{\varepsilon} \int_b^{b+\varepsilon} \sigma_y(x, a) dx = \frac{s_{0y} [K_1 \beta_1 \beta_2 + K_2 (\beta_1 + \beta_2 + \sqrt{\beta_1 \beta_2})]}{\sqrt{2} K_0 (\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})}$$

В последнем выражении использованы известные асимптотические формулы для поля напряжений вблизи конца произвольной трещины [11]. Здесь  $s_{0y} = K_0(2/\pi\varepsilon)^{1/2}$  — средняя концентрация напряжений, создаваемая одиночной трещиной длины  $2l$ ,  $\varepsilon$  — характерный структурный размер материала.

Представленные на фиг. 3 результаты вычислений показывают, что вторичная трещина создает значительную концентрацию напряжений на волокнах, расположенных со стороны внешней по отношению к основному разрыву (с внутренней стороны  $s_y < 0$ ). В ослабленном месте эти волокна могут быть разорваны, и расщепление может перейти к разрушению поперек волокон. Такое явление характерно, например, для композитов с относительно небольшим объемным содержанием волокон [12].

Приведенный анализ позволяет объяснить некоторые факты, сопровождающие разрушение волокнистых композитов и отмеченные в экспериментальных работах [12, 13]. С переходом к сдвиговому характеру расщепления, по-видимому, связано существенное возрастание удельной работы разрушения композита при увеличении длины расщепления [13], заполнение этого расщепления неразорванными волокнами, которое нельзя отнести за счет неправильной укладки волокон [12, 13], а также тот факт, что расщепление обычно не распространяется строго вдоль волокна, а систематически отклоняется в сторону от магистрального разрыва [13].

Следует упомянуть, что зачастую картина разрушения реального композита может осложниться развитием значительного числа расщеплений.

Поступила 21 IX 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Cook J., Gordon J. E. A mechanism for the control of crack propagation in all-brittle systems. Proc. Roy. Soc. London. A, 1964, vol. 282, No. 1391.
2. Милейко С. Т. Разрушение волокнистых материалов. Проблемы прочности, 1974, № 3.
3. Полилов А. Н. Торможение трещины поверхностью раздела. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 1.
4. Саврук М. П., Дацышин А. П. О предельном равновесии пластины, ослабленной двумя произвольно-ориентированными трещинами. Прикл. механ., 1973, т. 9, вып. 7.
5. Зобнин А. И., Ломакин Е. В. Центральная поперечная трещина в ортотропной упругой полосе. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 1.
6. Загубиженко П. А. Про напряжения в анизотропній площині, ослабленій прямолінійними щілинами. Доп. АН УРСР, 1954, № 6.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
8. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М., «Наука», 1973.
9. Harrison N. L. Strain energy release rates for turning cracks. Fibre Sci. and Technol., 1972, vol. 5, No. 3.
10. Михайлов А. М. Трещина сдвига в однонаправленном стеклопластике. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 1.
11. Прикладные вопросы вязкости разрушения. (Перев. с англ. Под ред. Б. А. Дроздовского.) М., «Мир», 1968.
12. Wright M. A., Ianuzzi F. A. The application of the principles of linear elastic fracture mechanics to unidirectional fibre reinforced materials. J. Composite Materials, 1973, vol. 7, No. 4.
13. Harrison N. L. Splitting of fibre-reinforced materials. Fibre Sci. and Technol., 1973, vol. 6, No. 1.