УДК 539.30

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ К РЕШЕНИЮ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. И. АЛЕКСАНДРОВИЧ

(Москва)

Плоские задачи теории упругости, для решения которых успешно применяется теория функций одного комплексного переменного, представляют собой определенный класс краевых задач трехмерной теории упругости. Это дает основание рассматривать трехмерные задачи как специальный класс задач теории упругости для четырехмерных тел.

Рассмотрим дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для четырехмерной среды, упругие свойства которой определяются константами Ламе λ, μ.

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\mu\,\Delta u_i=0 \qquad (i=1,2,3,4) \tag{1}$$

$$\theta=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{\partial u_4}{\partial x_4}$$

Будем рассматривать класс решений этих дифференциальных уравнений, для которого

$$\partial u_i/\partial x_4=0 \qquad (i=1,\,2,\,3,\,4) \tag{2}$$

Для определенного таким образом класса решений уравнения (1) распадаются на три уравнения для трехмерной упругой среды

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\mu\,\Delta u_i=0 \qquad (i=1,2,3)$$

$$\theta=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \tag{3}$$

и уравнение Лапласа для четвертой компоненты вектора перемещений $\Delta u_4=0$.

Решение трехмерной задачи теории упругости входит в рассматриваемый класс решений для четырехмерной упругой среды.

Введем комплексные переменные и комплексные перемещения по следующим формулам:

$$z_1=x_1+ix_2,\qquad z_2=x_3+ix_4,\qquad W_1=u_1+iu_2,\qquad W_2=u_3+iu_4$$

Операторы дифференцирования Коши определяют по известным формулам [1]

$$\frac{\partial}{\partial z_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-i\frac{\partial}{\partial x_2}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial z_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}-i\frac{\partial}{\partial x_4}\right)$$

Относительное изменение объема вычисляется в комплексных переменных по формуле

$$\theta=\frac{\partial W_1}{\partial z_1}+\frac{\partial \overline{W}_1}{\partial \bar z_1}+\frac{\partial W_2}{\partial z_2}+\frac{\partial \overline{W}_2}{\partial \bar z_2}$$

а оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta=4\frac{\partial^2}{\partial\bar z_1\,\partial z_1}+4\frac{\partial^2}{\partial\bar z_2\,\partial z_2}$$

Уравнения (1), записанные в комплексных переменных, имеют следующий вид:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial\bar z_1}+2\mu\frac{\partial^2 W_1}{\partial\bar z_1\,\partial z_1}+2\mu\frac{\partial^2 W_1}{\partial\bar z_2\,\partial z_2}=0 \tag{4}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial\bar z_2}+2\mu\frac{\partial^2 W_2}{\partial\bar z_1\,\partial z_1}+2\mu\frac{\partial^2 W_2}{\partial\bar z_2\,\partial z_2}=0$$

Условия независимости компонент вектора перемещений от координаты x_4 также запишем в комплексной форме

$$\frac{\partial W_1}{\partial z_2}-\frac{\partial W_1}{\partial \bar{z}_2}=0,\qquad \frac{\partial W_2}{\partial z_2}-\frac{\partial W_2}{\partial \bar{z}_2}=0 \tag{5}$$

Для решения систем (4), (5) введем вспомогательные функции α, β, определяемые через комплексные перемещения по следующим формулам:

$$\alpha=\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\theta+\frac{\partial W_1}{\partial z_1}+\frac{\partial W_2}{\partial z_2},\qquad \beta=\frac{\partial W_2}{\partial z_1}-\frac{\partial W_1}{\partial \bar{z}_2} \tag{6}$$

Так как W_1, W_2 не зависят от x_4, то функции α, β также не будут зависеть от четвертой координаты, т. е. для них будут справедливы уравнения типа (5). Из уравнений (4), (5) для функций α, β вытекает следующая система уравнений:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial \bar{z}_1}-\frac{\partial\beta}{\partial z_2}=0,\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial \bar{z}_2}+\frac{\partial\beta}{\partial z_1}=0,\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial z_2}-\frac{\partial\alpha}{\partial \bar{z}_2}=0,\qquad \frac{\partial\beta}{\partial z_2}-\frac{\partial\beta}{\partial \bar{z}_2}=0 \tag{7}$$

Применяя оператор $\partial/\partial z_1$ к первому уравнению, оператор $\partial/\partial z_2$ ко второму уравнению и сложив эти уравнения, получим, что α является комплекснозначной гармонической функцией. Аналогично доказывается, что β – также комплекснозначная гармоническая функция.

Раскладывая эти гармонические функции в ряды в окрестности каждой точки области и удерживая N членов разложения, после перехода к комплексным переменным будем иметь отрезки рядов, представленные в виде суммы степеней переменных z_1, z_2 с коэффициентами, являющимися антианалитическими функциями переменных z_1, z_2. Подставляя эти выражения в уравнения (7), для указанных антианалитических функций получим систему зацепляющихся дифференциальных уравнений. Решая эту систему, получим, что отрезки рядов функций α, β могут быть представлены через некоторую аналитическую функцию $\varphi_N(z_1, z_2)$ [1].

Введем функцию $\varphi_0(z_1, z_2)$ следующим образом:

$$\varphi_N=\int dz_1\ldots\int\varphi_0(z_1,z_2)\,dz_1\equiv I^N\varphi_0 \tag{8}$$

Для того, чтобы φ_N была произвольной аналитической функцией, $\varphi_0(z_1, z_2)$ также должна быть произвольной аналитической функцией. Интегралы в формуле (8) понимаются как обратные операторы к комплексному дифференцированию.

Переходя к пределу и обозначая $q=2k_1+k_2$, получим

$$\alpha=\lim_{N\to\infty}\alpha_N=\sum_{k_1=k_2=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k_1}}{k_1!\,k_2!}z_1^{k_1}z_2^{k_2}\bar{I}^{k_1}\frac{\partial^{q+1}}{\partial \bar{z}_2^{q+1}}\overline{\varphi}_0$$

$$\beta=\lim_{N\to\infty}\beta_N=\sum_{k_1=k_2=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k_1}}{k_1!\,k_2!}z_1^{k_1}z_2^{k_2}\bar{I}^{k_1-1}\frac{\partial^{q}}{\partial \bar{z}_2^{q}}\overline{\varphi}_0 \tag{9}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что формальные ряды (9) удовлетворяют уравнениям (7). Сходимость рядов (9) зависит от свойств функции $\varphi_0(z_1, z_2)$, конкретный вид которой определяется после задания граничных условий.

Рассмотрим равенства (6) как уравнения относительно комплексных перемещений W_1, W_2. Добавляя к этим уравнениям условия независимости от x_4, получим систему уравнений

$$\frac{\partial W_1}{\partial z_1}+\frac{\partial W_2}{\partial z_2}=\alpha-\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}(\alpha+\bar{\alpha}),\qquad \frac{\partial W_2}{\partial \bar{z}_1}-\frac{\partial W_1}{\partial z_2}=\beta$$

---

[1] *Александрович А. И.* Решение трехмерных задач теории упругости с использованием теории функций двух комплексных переменных. Деп. ВИНИТИ, 1975, № 2594–75.

$$\frac{\partial W_1}{\partial z_2}-\frac{\partial W_1}{\partial \bar z_2}=0,\qquad \frac{\partial W_2}{\partial z_2}-\frac{\partial W_2}{\partial \bar z_2}=0 \tag{10}$$

Частичное решение этой системы после подстановки рядов (9) имеет вид

$$W_1{}^\circ=\sum_{k_1=k_2=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k_1}}{k_1!\,k_2!}\left[\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}k_1 z_1{}^{k_1}z_2{}^{k_2}\bar I^{k_1-1}\frac{\partial^{q-1}}{\partial \bar z_2{}^{q-1}}\bar\varphi_0-\right.$$
$$\left.-\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}(k_1+1)\bar z_1{}^{k_1}\bar z_2{}^{k_2}I^{k_1+1}\frac{\partial^{q+1}}{\partial z_2{}^{q+1}}\varphi_0\right]$$
$$W_2{}^\circ=\sum_{k_1=k_2=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k_1}}{k_1!\,k_2!}\left[\left(\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}k_1+1\right)z_1{}^{k_1}z_2{}^{k_2}\bar I^{k_1}\frac{\partial^{q}}{\partial \bar z_2{}^{q}}\bar\varphi_0+\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}k_1\bar z_1{}^{k_1}\bar z_2{}^{k_2}I^{k_1}\frac{\partial^{q}}{\partial z_2{}^{q}}\varphi_0\right] \tag{11}$$

Для получения общего решения соответствующей однородной системы уравнений перепишем ее в форме уравнений (7).

Общее решение этой системы имеет вид

$$W_1{}^*=\sum_{k_1=k_2=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k_1}}{k_1!\,k_2!}z_1{}^{k_1}z_2{}^{k_2}\bar I^{k_1-1}\frac{\partial^{q}}{\partial \bar z_2{}^{q}}\bar\psi_0$$
$$W_2{}^*=\sum_{k_1=k_2=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k_1}}{k_1!\,k_2!}z_1{}^{k_1}z_2{}^{k_2}\bar I^{k_1}\frac{\partial^{q+1}}{\partial \bar z_2{}^{q+1}}\bar\psi_0 \tag{12}$$

Таким образом, решение уравнений теории упругости зависит от двух произвольных аналитических функций $\varphi_0(z_1, z_2)$, $\psi_0(z_1, z_2)$ и имеет вид

$$W_1=W_1{}^*+W_1{}^0,\qquad W_2=W_2{}^*+W_2{}^0 \tag{13}$$

Не ограничивая общности решения, будем считать, что начало координат принадлежит рассматриваемой области, тогда

$$If=\int_0^{z_1} f\,dz_1+g(z_2)$$

где $g(z_2)$ – произвольная аналитическая функция.

Так как построенное решение не зависит от x_4, то положим $x_4=0$, тогда в формулах (11), (12) можно z_2 заменить на $\bar z_2$. После этого несложно заметить, что произвольные функции типа $g(z_2)$, возникающие при интегрировании функций $\bar\varphi_0$, ψ_0, компенсируются произвольностью выбора функции φ_0, а соответствующие произвольные аналитические функции, возникающие при интегрировании φ_0, компенсируются произвольностью функции $\bar\psi_0$.

Следовательно, интегралы, входящие в выражения для W_1, W_2, можно понимать как определенные интегралы вдоль линии, лежащей в рассматриваемой области и соединяющей начало координат с точкой $z=(z_1, z_2)$

$$I^k f=\int_0^{z_1}dz_1\ldots\int_0^{z_1}f\,dz_1 \tag{14}$$

При решении краевых задач теории упругости, так же как в плоской задаче теории упругости, для нахождения двух аналитических функций $\varphi_0(z_1, z_2)$, $\psi_0(z_1, z_2)$ можно использовать разложение этих функций в ряды по полной системе аналитических функций для рассматриваемой области. Заметим, что некоторое отличие применения теории функций двух комплексных переменных в этом случае состоит в том, что в пространстве двух комплексных переменных не всякая область является оболочкой голоморфности, т. е. существуют такие области, что любую аналитическую функцию, определенную в этой области, можно аналитически продолжить в некоторое расширение рассматриваемой области. Поэтому полную систему аналитических функций можно выбирать для оболочки голоморфности рассматриваемой области, которая, как правило, имеет более простую конфигурацию по сравнению с исходной областью.

Другое направление при решении краевых задач состоит в использовании интегральных представлений для аналитических функций, например, формулы Лере [1]

$$f(z)=-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)\delta(\chi_z(\zeta))\wedge d\zeta}{\langle\zeta-z,\chi_z(\zeta)\rangle^2}$$

$$dz=dz_1\wedge dz_2,\qquad \delta(\omega)=\omega_1 d\omega_2-\omega_2 d\omega_1,\qquad \langle z,\omega\rangle=z_1\omega_1+z_2\omega_2 \tag{15}$$

где ∂D – граница рассматриваемой области.

Функция $\chi_z(\zeta)$ может быть произвольной, удовлетворяющей следующему условию: $\langle z, \chi(z)\rangle\neq 0$, $z\in\partial D$. Выбор функции $\chi_z(\zeta)$ может зависеть от точки z. Так как в точках границы упругого тела могут быть заданы компоненты вектора напряжений, которые вычисляются по компонентам тензора напряжений, а также в связи с тем, что часто требуется определить напряженное состояние упругого тела, приведем формулы Коши для вычисления компонент тензора деформаций, записанные в комплексных обозначениях

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{11}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial z_1}+\frac{\partial \overline{W}_1}{\partial z_1}+\frac{\partial W_1}{\partial \bar z_1}+\frac{\partial \overline{W}_1}{\partial \bar z_1}\right)\\
\varepsilon_{22}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial z_1}-\frac{\partial \overline{W}_1}{\partial z_1}-\frac{\partial W_1}{\partial \bar z_1}+\frac{\partial \overline{W}_1}{\partial \bar z_1}\right)\\
\varepsilon_{33}=\frac{\partial W_2}{\partial z_2}+\frac{\partial \overline{W}_2}{\partial \bar z_2},\qquad \varepsilon_{12}=\frac{i}{2}\left(\frac{\partial \overline{W}_1}{\partial z_2}-\frac{\partial W_1}{\partial \bar z_1}\right)\\
\varepsilon_{13}=\frac{1}{4}\left(2\frac{\partial W_1}{\partial z_2}+2\frac{\partial \overline{W}_1}{\partial \bar z_2}+\frac{\partial W_2}{\partial z_1}+\frac{\partial \overline{W}_2}{\partial z_1}+\frac{\partial W_2}{\partial \bar z_1}+\frac{\partial \overline{W}_2}{\partial \bar z_1}\right)\\
\varepsilon_{23}=\frac{i}{4}\left(2\frac{\partial \overline{W}_1}{\partial z_2}-2\frac{\partial W_1}{\partial z_2}+\frac{\partial W_2}{\partial z_1}-\frac{\partial \overline{W}_2}{\partial \bar z_1}+\frac{\partial \overline{W}_2}{\partial z_1}-\frac{\partial W_2}{\partial \bar z_1}\right)
\end{gathered}\tag{16}$$

Компоненты тензора напряжений находятся с помощью закона Гука.

В качестве примера рассмотрим поля перемещений, порождаемые аналитическими функциями вида

$$f_{n_1n_2}=\frac{1}{n_1!\,n_2!}z_1^{n_1}z_2^{n_2}.$$

Обозначим через $\overset{\varphi}{W}_{1n_1n_2}$, $\overset{\varphi}{W}_{2n_1n_2}$ поля перемещений, получаемые при подстановке $f_{n_1n_2}$ в (13) на место $\varphi_0(z_1, z_2)$ при $\psi_0(z_1, z_2)=0$. Тогда

$$\begin{gathered}
\overset{\varphi}{W}_{1n_1n_2}=\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}\left[\sum_{k_1=0}^{2k_1\leqslant n_2+1}\ \sum_{k_2=0}^{n_2+1-2k_1}\frac{(-1)^{k_1}}{k_1!\,k_2!}\frac{k_1z_1^{k_1}\bar z_1^{n_1+k_1-1}z_2^{k_2}\bar z_2^{n_2-q+1}}{(n_1+k_1-1)!\,(n_2-q+1)!}-\right.\\
\left.-\sum_{k_1=0}^{2k_1\leqslant n_2-1}\ \sum_{k_2=0}^{n_2-1-2k_1}\frac{(-1)^{k_1}}{k_1!\,k_2!}\frac{(k_1+1)\bar z_1^{k_1}z_1^{n_1+k_1+1}\bar z_2^{k_2}z_2^{n_2-q-1}}{(n_1+k_1+1)!\,(n_2-q+1)!}\right]
\end{gathered}\tag{17}$$

$$\overset{\varphi}{W}_{2n_1n_2}=\sum_{k_1=0}^{2k_1\leqslant n_2}\ \sum_{k_2=0}^{n_2-2k_1}\frac{(-1)^{k_1}}{k_1!\,k_2!}\left(\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}k_1+1\right)\frac{z_1^{k_1}\bar z_1^{n_1+k_1}z_2^{k_2}\bar z_2^{n_2-q}}{(n_1+k_1)!\,(n_2-q)!}+$$

$$+\sum_{k_1=0}^{2k_1\leqslant n_2}\sum_{k_2=0}^{n_2-2k_1}\frac{(-1)^{k_1}}{k_1!\,k_2!}\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}\frac{k_1\bar{z}_1^{k_1}z_1^{n_1+k_1}\bar{z}_2^{k_2}z_2^{n_2-q}}{(n_1+k_1)!\,(n_2-q)!}$$

Аналогично обозначим $\overset{\psi}{W}_{1n_1n_2}$, $\overset{\psi}{W}_{2n_1n_2}$ поля перемещений, получаемые при подстановке $f_{n_1n_2}$ на место $\psi_0(z_1, z_2)$ при $\varphi_0(z_1, z_2)=0$

$$\overset{\psi}{W}_{1n_1n_2}=\sum_{k_1=0}^{2k_1\leqslant n_2}\sum_{k_2=0}^{n_2-2k_1}\frac{(-1)^{k_1}}{k_1!\,k_2!}\frac{z_1^{k_1}\bar{z}_1^{n_1+k_1-1}z_2^{k_2}\bar{z}_2^{n_2-q}}{(n_1+k_1-1)!\,(n_2-q)!}$$

$$\overset{\psi}{W}_{2n_1n_2}=\sum_{k_1=0}^{2k_1\leqslant n_2-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-2k_1-1}\frac{(-1)^{k_1}}{k_1!\,k_2!}\frac{z_1^{k_1}\bar{z}_1^{n_1+k_1}z_2^{k_2}\bar{z}_2^{n_2-q-1}}{(n_1+k_1)!\,(n_2-q-1)!} \tag{18}$$

На границе трехмерного шара единичного радиуса, т. е. при

$$x_4=0, \quad x_3=\sin\theta, \quad z_1=\cos\theta(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

формулы (17), (18) приобретают вид сумм тригонометрических функций, высшие гармоники которых определяются числами n_1, n_2. Это дает возможность использовать систему указанных аналитических функций при решении краевых задач теории упругости для шара.

Поступила 3 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М., «Наука», 1969.

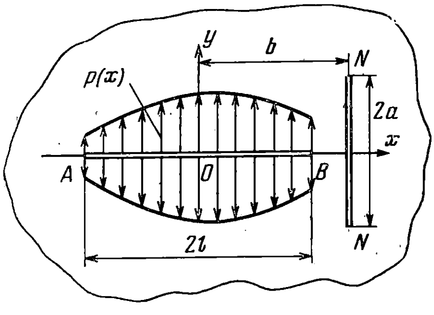
УДК 539.375

РАСЩЕПЛЕНИЕ В ОДНОНАПРАВЛЕННОМ КОМПОЗИТЕ

А. И. ЗОБНИН

(Москва)

Сопротивление материала распространению трещин можно существенно повысить армированием его высокопрочными волокнами, поскольку в этом случае магистральная трещина, рвущая волокна, тормозится за счет образования расщепления на границе раздела компонент [1–3]. Эффективность такого метода усовершенствования материала во многом зависит от поведения вторичной трещины [2]. Для изучения его в данной работе строится решение модельной задачи о взаимодействии двух ортогональных трещин в ортотропном материале, моделирующем однонаправленный композит. Задача о растяжении изотропной плоскости с двумя удаленными неколлинеарными трещинами решалась в [4].



Фиг. 1

Рассмотрим ортотропную плоскость с осями ортотропии Ox и Oy и двумя разрезами AB: $|x|<l$, $y=0$ и $NN: x=b$, $|y|<a$ (фиг. 1). Берега первого разреза загружены только нормальными усилиями $p(x)$, а берега второго свободны. Граничные условия задачи имеют вид

$$\sigma_y=-p(x), \quad \tau_{xy}=0 \quad (|x|<l,\ y=0) \tag{1}$$

$$\sigma_x=\tau_{xy}=0 \quad (x=b,\ |y|<a) \tag{2}$$

Предположим, что на бесконечности напряжения отсутствуют, а корни характеристического уравнения материала не равные и чисто мнимые $\pm i\beta_1$, $\pm i\beta_2$ $(\beta_2>\beta_1>0)$. Последнее обычно выполняется для таких ортотропных материалов, как древесина, графиты, стекло- и углепластики.