

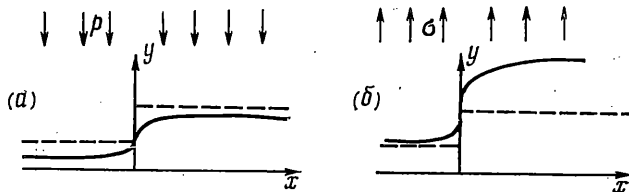
ТОНКИЙ УПРУГИЙ СЛОЙ,
ИСПЫТЫВАЮЩИЙ СКАЧОК ХАРАКТЕРИСТИК,
В БЕСКОНЕЧНОМ УПРУГОМ ТЕЛЕ (плоская задача)

Р. Л. САЛГАНИК

(Москва)

Задача решается в предположении об однородности деформаций поперек слоя, справедливом, если обеспечена малость изменения напряжений на расстояниях порядка толщины слоя. Для выполнения последнего условия достаточно, чтобы относительная податливость слоя была большой, что и принимается в работе. Отметим, что указанные ограничения очевидным образом можно ослабить, если отношение продольной податливости слоя к поперечной велико: когда это отношение бесконечно (слой из полосок или волокон), деформации поперек слоя в любом случае однородны.

В первом варианте задачи предполагается, что слой ступенчатого профиля зажимается между упругими полупространствами так, что контакт с ними образуется



в данном приближении по всей его поверхности (т. е. допускается нарушение контакта вблизи места скачка в области, размер которой порядка толщины слоя). После этого по контакту может быть произведено то или иное скрепление и изменено нагружение вдали от слоя.

Во втором варианте предполагается, что в бесконечном теле имеется неоднородность в виде слоя ступенчатого профиля, и тело с такой неоднородностью подвергается однородному вдали от нее нагружению. На фигуре представлена верхняя половина картины деформирования для первого (а) и второго (б) вариантов. В первом — нагружение осуществляется давлением, во втором — растяжением; ось x — ось симметрии, сплошная линия — деформированная граница между внешним материалом и слоем, штрихи — первоначальный профиль слоя.

1. Обозначим через u , v , w компоненты смещения по осям x , y , z соответственно. Считая окружающий материал и слой ортотропными с осями ортотропии x , y , z , запишем обобщенный закон Гука в виде [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z, & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= a_{44}\tau_{yz} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z, & \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} &= a_{55}\tau_{xz} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z, & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= a_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\sigma_x, \dots, \tau_{yz}$ — компоненты напряжения. Коэффициентам a_{jk} будем давать дополнительные индексы: 1 — для левой и 2 — для правой половины слоя соответственно (оставляя без индекса, когда они относятся к окружающему материалу).

При изотропии $a_{11}=a_{22}=a_{33}=E^{-1}$, $a_{23}=a_{13}=a_{12}=-\nu E^{-1}$, $a_{44}=a_{55}=a_{66}=$
 $=2(1+\nu)E^{-1}$, где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Для формулировки задачи необходимо установить связь между напряжениями и смещениями на границе полуплоскости при законе упругости (1.1). Для плоской деформации, когда на границе полуплоскости касательные напряжения $\tau_{xy}=0$, соответствующая связь между возмущением нормального напряжения σ_y^* и смещением v на границе может быть найдена по соотношениям [1]:

$$\sigma_y^* = \frac{1}{\pi\beta_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v'(\xi) d\xi}{\xi-x}, \quad \beta_n = \{\beta_{22}[\beta_{66} + 2(\beta_{12} + \sqrt{\beta_{11}\beta_{22}})]\}^{1/2} \quad (1.2)$$

$$\beta_{ij} = a_{ij} - a_{i3}a_{j3}a_{33}^{-1} \quad (i, j \neq 3)$$

Продольная компонента возмущения нормального напряжения на границе находится из соотношения

$$\beta_{11}^{1/2} \sigma_x^* = \beta_{22}^{1/2} \sigma_y^* \quad (1.3)$$

Аналогично при нулевых нормальных напряжениях на границе связь между возмущением касательных напряжений τ_{xy}^* и касательными смещениями u на границе имеет вид (1.1) с заменой β_n на $\beta_s = \beta_n \beta_{11} \beta_{22}^{-1}$. При этом $\sigma_x^* = -\beta_{11}^{-1}(\partial u / \partial x)$.

В случае изотропии $\beta_{11} = \beta_{22} = (1-\nu^2)E^{-1}$, $\beta_{12} = -\nu(1+\nu)E^{-1}$, $\beta_{66} =$
 $=2(1+\nu)E^{-1}$, $\beta_n = \beta_s = 2(1-\nu^2)E^{-1}$.

В дальнейшем будем рассматривать нормальное нагружение в условиях плоской деформации. Для перехода к случаю плоского напряженно-упругого поля вдали от места скачка будем отмечать нулем в индексе, вводя дополнительно, когда они относятся к слою, индексы 1 и 2 для левой и правой его половин соответственно. Ввиду симметрии считаем $y > 0$.

Обозначим через h_j полутолщину слоя ($j=1$ при $x < 0$ и $j=2$ при $x > 0$) и через L характерную длину, на которой происходит существенное изменение компонент упругого поля вдоль слоя. Будем считать, что $L \gg h_j$. При $L \gg h_j$ упругое поле в слое можно считать в каждой точке однородным по y , в частности $\partial v / \partial y \approx v h_j^{-1}$. Вследствие малости $h_j L^{-1}$ касательными напряжениями в слое при отыскании величин σ_y^* и v можно пренебречь. Касательные напряжения в слое определяются условиями на контакте с окружающим материалом и в любом случае оцениваются величиной $\sigma_y^* h_j L^{-1}$.

Таким образом, между нормальными напряжениями и смещениями имеется связь (1.2). С другой стороны, используя закон Гука в форме (1.1) в случае плоской деформации слоя, соотношение $\partial v / \partial y \approx v h_j^{-1}$ и постоянство σ_y по толщине слоя, для первого варианта задачи получаем следующие соотношения:

$$v = h_1 (\beta_{22}^{(1)} \sigma_y^* + \beta_{12}^{(1)} \sigma_x^{*(1)}) \quad (x < 0)$$

$$v = \Delta h + h_2 (\beta_{22}^{(2)} \sigma_y^* + \beta_{12}^{(2)} \sigma_x^{*(2)}) \quad (x > 0)$$

$$\Delta h = h_2 (1 + \beta_{22}^{(2)} \sigma_y^{(0)} + \beta_{12}^{(2)} \sigma_x^{(0)}) - h_1 (1 + \beta_{22}^{(1)} \sigma_y^{(0)} + \beta_{12}^{(1)} \sigma_x^{(0)}) \quad (1.4)$$

Здесь v отсчитывается от его значения при $x = -\infty$, возмущения напряжений стремятся к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Если рассматриваемым решением описывается быстрый процесс, которому предшествовали длительные релаксационные процессы, условия, определяющие невозмущенные и возмущенные компоненты, могут не совпадать.

Для определения продольных компонент возмущения следует задать условия на границе соединения слоя и тела. Рассмотрим два крайних случая: полное сцепление и полное проскальзывание. В случае полного сцепления слоя с телом u и $\partial u/\partial x$ непрерывны на границе соединения. Отсюда, воспользовавшись законом Гука в форме (1.1) для слоя и тела в случае плоской деформации, а также формулой (1.3), находим

$$\sigma_{x(j)}^* = [(\beta_{11}\beta_{22})^{1/2} + \beta_{12} - \beta_{12}^{(j)}] (\beta_{11}^{(j)})^{-1} \sigma_y^* = \chi_{(j)} \sigma_y^* \quad (1.5)$$

Касательные напряжения на границе слой — тело τ_{xy}^* находятся из условия равновесия слоя вдоль оси x и с учетом (1.5) равны

$$\tau_{xy}^* = -h_j (\partial \sigma_{x(j)}^* / \partial x) = -h_j \chi_{(j)} (\partial \sigma_y^* / \partial x) \quad (1.6)$$

Отсюда видно, что напряжения τ_{xy}^* имеют порядок $\sigma_y h_j L^{-1}$. В случае полного проскальзывания $\tau_{xy}^* = 0$ на границе и, следовательно, $\sigma_{x(j)}^* = 0$. Подставляя в (1.4) вместо $\sigma_{x(j)}^*$ либо (1.5), либо нуль, находим

$$v = h_1 \beta_1 \sigma_y^* \quad (x < 0), \quad v = \Delta h + h_2 \beta_2 \sigma_y^* \quad (x > 0) \quad (1.7)$$

Здесь $\beta_j = \beta_{22}^{(j)}$ при полном проскальзывании и $\beta_j = \beta_{22}^{(j)} + \chi_{(j)} \beta_{12}^{(j)}$ при полном сцеплении.

При изотропии материала слоев и окружающего материала в случае полного проскальзывания и полного сцепления имеем соответственно

$$\beta_j = \frac{1 - \nu_j^2}{E_j}, \quad \beta_j = \frac{(1 + \nu_j)(1 - 2\nu_j)}{(1 - \nu_j)E_j} - \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)\nu_j}{(1 - \nu)E} \quad (1.8)$$

для плоской деформации и

$$\beta_j = E_j^{-1}, \quad \beta_j = (1 - \nu_j^2)E_j^{-1} - \nu_j(1 - \nu)E^{-1} \quad (1.9)$$

для плоского напряженного состояния.

Так как для выполнения условия $L \gg h_j$ слой должен быть существенно податливее окружающего материала, слагаемые в выражении для β_j , зависящие от податливости окружающего материала, должны быть малы. В частности, в (1.8), (1.9) должны быть малы члены, содержащие E .

Из (1.8) видно, что для выполнения этого условия в случае плоской деформации и полного сцепления существенно, насколько ν_j отличается от $1/2$. Это вполне естественно, так как при плоской деформации не происходит деформирования в направлении оси z , а деформации вдоль оси x малы вследствие полного сцепления и низкой относительной податливости окружающего материала. Поэтому при таких условиях для малосжимаемого материала слоя его податливость в направлении оси y , выражаемая коэффициентом β_j , также оказывается малой.

Во втором варианте задачи

$$v = h_1 [\beta_{22}^{(1)} (\sigma_y^* + \sigma_y^{(0)}) + \beta_{12}^{(1)} (\sigma_{x(1)}^* + \sigma_x^{(0)})] \quad (x < 0) \quad (1.10)$$

$$v = h_2 [\beta_{22}^{(2)} (\sigma_y^* + \sigma_y^{(0)}) + \beta_{12}^{(2)} (\sigma_{x(2)}^* + \sigma_x^{(0)})] \quad (x > 0)$$

где v отсчитывается от первоначальной ступенчатой границы слоя. Вводя $v^* = v - h_1 [\beta_{11}^{(1)} \sigma_x^{(0)} + \beta_{22}^{(1)} \sigma_y^{(0)}]$ и принимая, что на границе имеет место либо полное сцепление, либо полное проскальзывание, приводим (1.10) к виду (1.7) для v^* , где

$$\Delta h = h_2 [\beta_{22}^{(2)} \sigma_y^{(0)} + \beta_{12}^{(2)} \sigma_x^{(0)}] - h_1 [\beta_{22}^{(1)} \sigma_y^{(0)} + \beta_{12}^{(1)} \sigma_x^{(0)}] \quad (1.11)$$

Таким образом, в обоих вариантах задача сводится к совместному решению уравнений (1.2), (1.7), причем в первом Δh выражается формулой (1.4), во втором — (1.11).

Из приведенного рассмотрения видно, что для слоя, работающего в условиях сдвига, математическая формулировка задачи получается аналогичной.

2. Задача (1.2), (1.7) является обобщением задачи для трещины Прандтля в формулировке [2] и может быть решена при помощи преобразования Фурье методом Винера — Хопфа [3]. Преобразование Фурье с ядром $\exp(i\alpha x)$ от функции $f(x)$ будем обозначать $f^{(F)}(\alpha)$.

Введем также функции $f_{\pm}(x) = 1/2 f(x) (1 \pm \operatorname{sgn} x)$. Преобразования Фурье от них являются граничными значениями регулярных аналитических функций в верхней и нижней полуплоскости комплексного переменного ζ ($\operatorname{Re} \zeta = \alpha$).

Предполагая, что в (1.2) v может претерпевать скачок Δv , подставляя с учетом этого (1.7) в (1.2) и применяя к результату преобразование Фурье, находим

$$\sigma_{-}^{(F)}(1 + b_1^{-1}|\alpha|) + \sigma_{+}^{(F)}(1 + b_2^{-1}|\alpha|) = i \operatorname{sgn} \alpha \{ -\Delta v \beta_n^{-1} + b_2^{-1} \sigma_{+}(0) - b_1^{-1} \sigma_{-}(0) \} \\ b_j = \beta_n (\beta_j h_j)^{-1} \quad (j=1,2) \quad (2.1)$$

Здесь для краткости обозначено $\sigma_y^* = \sigma$ и использовано равенство $(x^{-1})^{(F)} = i\pi \operatorname{sgn} \alpha$. Вводя функции

$$\sigma_{s-}^{(F)} = \sigma_{-}^{(F)} - iB\alpha^{-1}, \quad \sigma_{s+}^{(F)} = \sigma_{+}^{(F)} + iB\alpha^{-1} \quad (2.2) \\ B = (-\Delta v \beta_n^{-1} + b_2^{-1} \sigma_{+}(0) - b_1^{-1} \sigma_{-}(0)) (b_1^{-1} - b_2^{-1})^{-1}$$

приводим (2.1) к виду

$$\sigma_{s-}^{(F)}(1 + b_1^{-1}|\alpha|) = -\sigma_{s+}^{(F)}(1 + b_2^{-1}|\alpha|) \quad (2.3)$$

Из соотношения (1.6) работы [2] находим

$$-(b_j + |\alpha|) = H_{-}^{(j)}(\alpha) [H_{+}^{(j)}(\alpha)]^{-1} \quad (2.4)$$

$$H_{\mp}^{(j)}(\zeta) = \pm (\zeta + b_j)^{\pm 1/2} \exp\left(\frac{i}{\pi} \int_0^{\zeta} \frac{\ln \tau d\tau}{\tau^2 - 1}\right), \quad \zeta' = \zeta b_j^{-1} \quad (2.5)$$

При помощи (2.4) приводим (2.3) к виду

$$\sigma_{s-}^{(F)} H_{-}^{(1)} [b_1 H_{-}^{(2)}]^{-1} = -\sigma_{s+}^{(F)} H_{+}^{(1)} [b_2 H_{+}^{(2)}]^{-1} \quad (2.6)$$

Таким образом, имеем равенство на действительной оси двух аналитических, регулярных в нижней и верхней полуплоскостях функций. Вследствие интегрируемости напряжений по любым конечным участкам оси x и свойств $H_{\mp}^{(j)}(\zeta)$ эти функции должны обращаться в нуль на бесконечности.

Кроме того, из (2.2) видно, что в нуле они должны иметь особенность типа ξ^{-1} . По известным свойствам аналитических функций отсюда сразу следует, что каждая из рассматриваемых функций в своей полуплоскости равна $C(i\xi)^{-1}$, где C — постоянная. Таким образом, на действительной оси можно записать, что левая и правая части в (2.6) равны $C(i\alpha)^{-1}$, и найти отсюда $\sigma_{\pm}^{(F)}$. Сравнивая после этого результат с (2.2), находим

$$C = B(b_1 b_2)^{-1/2} \quad (2.7)$$

Возвращаясь далее к $\sigma_{\pm}^{(F)}$, с учетом (2.7) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_-^{(F)} &= -i\alpha^{-1} C \{ b_1 H_-^{(2)} [H_-^{(1)}]^{-1} - (b_1 b_2)^{1/2} \} \\ \sigma_+^{(F)} &= i\alpha^{-1} C \{ b_2 H_+^{(2)} [H_+^{(1)}]^{-1} - (b_1 b_2)^{1/2} \} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Эти функции, как и должно быть, ограничены при $\alpha \rightarrow 0$. Из (2.8) можно выразить значения $\sigma_-(0)$ и $\sigma_+(0)$ через C , используя асимптотику при $\alpha \rightarrow \infty$, которая соответствует для исходных величин асимптотике при $x \rightarrow 0$. Главный член последней представляет собой $\sigma_-(0)$ при $x < 0$ и $\sigma_+(0)$ при $x > 0$. Отсюда, учитывая, что $[1/2(1 \pm \operatorname{sgn} \alpha)]^{(F)} = \pm i\alpha^{-1}$, и сравнивая этот результат с главным членом асимптотики (2.8) при $\alpha \rightarrow \infty$, находим

$$\sigma_-(0) = C [b_1 - (b_1 b_2)^{1/2}] \quad \sigma_+(0) = C [b_2 - (b_1 b_2)^{1/2}] \quad (2.9)$$

Подставляя эти значения с учетом (2.7) в выражение (2.3) для B , находим, что $\Delta v = 0$, т. е. функция v непрерывна при $x = 0$.

Используя обращение преобразования Фурье, находим

$$\sigma_{\pm}^{(F)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\alpha x) \sigma_{\pm}^{(F)}(\alpha) d\alpha \quad (2.10)$$

где $\sigma_{\pm}^{(F)}$ определяются выражениями (2.8). Эти выражения удобно преобразовать, выразив при помощи (2.4) в первом соотношении $H_-^{(j)}$ через $H_+^{(j)}$, а во втором $-H_+^{(j)}$ через $H_-^{(j)}$. Подставляя после этого $\sigma_{\pm}^{(F)}$ в (2.10) разобьем интеграл на два: от $-\infty$ до 0 (в нем $|\alpha| = -\alpha$) и от 0 до $+\infty$ (в нем $|\alpha| = \alpha$).

В обоих интегралах подынтегральная функция регулярна в верхней полуплоскости и по модулю экспоненциально убывает на любом луче с уменьшением скорости этого убывания по мере приближения луча к действительной оси, где убывание происходит как α^{-1} . Это позволяет перевести интегрирование с отрицательной и положительной действительных полуосей в интегрирование по положительной мнимой полуоси.

Аналогично преобразуем выражение для $\sigma_+^{(F)}$ только с тем отличием, что все преобразования выполняются в нижней полуплоскости и интегрирование переводится на отрицательную мнимую полуось. В результате находим

$$\begin{aligned} \sigma_-(x) &= \frac{C b_1 (b_1 - b_2)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{H_+^{(2)}(it) \exp(-t|x|) dt}{(b_1^2 + t^2) H_+^{(1)}(it)} \\ \sigma_+(x) &= -\frac{C b_2 (b_1 - b_2)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{H_-^{(2)}(-it) \exp(-tx) dt}{(b_2^2 + t^2) H_-^{(1)}(-it)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Выражения для $H_{\mp}^{(j)}(\mp it)$ находятся из (2.5) и имеют вид

$$H_{\mp}^{(j)}(\mp it) = \pm (t^2 + b_j^2)^{\pm 1/4} \exp[\mp \varphi(tb_j^{-1})], \quad t > 0 \quad (2.12)$$

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\tau} \frac{\ln \alpha \, d\alpha}{\alpha^2 + 1} \quad (2.13)$$

причем легко убедиться заменой в (2.13) α на α^{-1} , что $\varphi(\tau) = \varphi(\tau^{-1})$, $\varphi(\infty) = \varphi(0) = 0$.

Свяжем теперь C с Δh . Для этого рассмотрим асимптотику σ при $x \rightarrow \infty$. Из (1.2), пренебрегая ξ с учетом того, что согласно (1.7) $v(+\infty) - v(-\infty) = \Delta h$, находим $\sigma = -\Delta h (\pi \beta_n x)^{-1}$. С другой стороны, при $x \rightarrow \infty$ все функции под интегралами в (2.11), за исключением $\exp(-t|x|)$, $\exp(-tx)$, можно заменить их значениями при $t=0$; интегрирование после этого дает $\pi x \sigma = C(b_2 - b_1)(b_1 b_2)^{-1/2}$. Из сравнения этих двух выражений находим

$$C = -\Delta h (b_1 b_2)^{1/2} (b_2 - b_1)^{-1} \beta_n^{-1} \quad (2.14)$$

Таким образом, все величины определены.

3. Из (2.9) и (2.14) после простых преобразований находим возмущения напряжений в месте скачка

$$\sigma_y^*(-0) = \sigma_-(0) = \frac{\Delta h}{h_1 \beta_1 + \sqrt{h_1 \beta_1 h_2 \beta_2}} \quad (3.1)$$

$$\sigma_y^*(+0) = \sigma_+(0) = -\frac{\Delta h}{h_2 \beta_2 + \sqrt{h_1 \beta_1 h_2 \beta_2}} \quad (3.2)$$

С другой стороны, те же величины можно найти, положив в (2.11) $x=0$. Приравнявая выражения для этих величин, найденные указанными двумя способами, и используя (2.12), устанавливаем, что

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp[\varphi(\tau \lambda^{-1}) - \varphi(\tau)] \, d\tau}{(1 + \tau^2)^{1/4} (\lambda^2 + \tau^2)^{1/4}} = \frac{1}{1 + \sqrt{\lambda}} \quad (3.3)$$

Это равенство будет использовано ниже.

Условие применимости решения, состоящее в том, что характерный масштаб L изменения найденного упругого поля должен быть намного больше h_j , заведомо выполняется при достаточно больших $|x|$. Для применимости же решения при всех x (с точностью до расстояний порядка h_j) требуется большое превышение над h_j величин b_j^{-1} , имеющих размерность длины и определяющих масштаб L изменения упругого поля у места скачка характеристик. Это означает (так как $b_j = \beta_n (\beta_j h_j)^{-1}$), что должны быть малы $\beta_n \beta_j^{-1}$. Как видно из (2.11)–(2.13) (для определенности считаем $\Delta h > 0$), σ_y^* при возрастании x от $x = -\infty$ монотонно растет, вначале как $|x|^{-1}$; при $x=0$ достигает значения (3.1), затем скачком падает до отрицательного значения (3.2), после чего снова монотонно возрастает, приближаясь при $x \rightarrow +\infty$ к нулю как x^{-1} .

Из постановки задачи и решения видно, что без ограничения общности всегда можно считать $0 < b_2 b_1^{-1} \leq 1$ (в противном случае достаточно поменять местами левую и правую половины слоя). При $b_2 b_1^{-1} = 1$ и $b_2 b_1^{-1} \rightarrow 0$ решение упрощается. Характер его упрощения в первом случае очевиден. Остановимся на втором.

Во втором случае наряду с асимптотикой при $|x| \rightarrow \infty$ и $|x| \rightarrow 0$ появляется также промежуточная асимптотика при

$$b_1^{-1} = h_1 \beta_1 \beta_n^{-1} \ll |x| \ll h_2 \beta_2 \beta_n^{-1} = b_2^{-1} \quad (3.4)$$

Предположим сначала, что выполнено левое из этих неравенств. При этом для нахождения главных членов асимптотики можно в (2.14) при фиксированных остальных величинах принять $b_1 \rightarrow \infty$, т. е. $H_+^{(1)}(it)$ заменить на $-b_1^{-1/2}$, $H_-^{(1)}(-it)$ — на $b_1^{1/2}$.

В результате, переходя к интегрированию по переменной $\tau = tb_2^{-1}$ и подставляя вместо $H_-^{(2)}(-it)$, $H_+^{(2)}(it)$ из выражения (2.12), с учетом (2.14) находим

$$\begin{aligned} \sigma_-(x) &= \frac{\Delta h b_2}{\pi \beta_n} \int_0^\infty \frac{\exp[-\tau b_2 |x| + \varphi(\tau)] d\tau}{(1+\tau^2)^{3/4}} \\ \sigma_+(x) &= -\frac{\Delta h b_2}{\pi \beta_n} \int_0^\infty \frac{\exp[-\tau b_2 x - \varphi(\tau)] d\tau}{(1+\tau^2)^{3/4}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Эти выражения применимы при $|x| \gg b_1^{-1}$. Главный член асимптотики, соответствующей выполнению также правого неравенства в (3.4), получается из (3.5) при $x \rightarrow 0$. Для выполнения этого предельного перехода перейдем в первом интеграле (3.4) к интегрированию по переменной $\eta = \tau b_2 |x|$. Имеем

$$\sigma_-(x) = \frac{\Delta h}{\pi \beta_n} \sqrt{\frac{b_2}{|x|}} \int_0^\infty \frac{\exp[-\eta + \varphi(\eta b_2^{-1} |x|^{-1})] d\eta}{[(b_2 x)^2 + \eta^2]^{3/4}} \quad (3.6)$$

Устремляя здесь $|x|$ к нулю, учитывая, что согласно (2.13) $\varphi(\infty) = 0$ и интегрирование $\eta^{-1/2} \exp(-\eta)$ по полуоси $\eta > 0$ дает $\pi^{1/2}$, находим

$$\sigma_-(x) = N |x|^{-1/2}, \quad N = \Delta h (\pi \beta_n \beta_2 h_2)^{-1/2} \quad (3.7)$$

Из второго интеграла (3.5) находим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sigma_+(x) = -\frac{\Delta h b_2}{\pi \beta_n} \int_0^\infty \frac{\exp[-\varphi(\tau)] d\tau}{(1+\tau^2)^{3/4}} \quad (3.8)$$

Переходя в (3.3) к пределу при $\lambda \rightarrow \infty$ с учетом (2.13), видим, что стоящий в (3.8) интеграл равен π . Используя это равенство, прибавляя ко второму интегралу в (3.5) и вычитая из него (3.8) и переходя к интегрированию по переменной $\eta = \tau x b_2$, находим

$$\sigma_+(x) = -\frac{\Delta h b_2}{\beta_n} \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \sqrt{x b_2} \int_0^\infty \frac{[\exp(-\eta) - 1] \exp[-\varphi(\eta b_2^{-1} x^{-1})]}{[(b_2 x)^2 + \eta^2]^{3/4}} d\eta \right\} \quad (3.9)$$

Полагая здесь $x \rightarrow 0$ и выделяя главный член асимптотики, находим

$$\sigma_+(x) = -\beta_n^{-1} \Delta h b_2 [1 - 2\pi^{-1/2} (b_2 x)^{1/2}] \quad (3.10)$$

при выводе (3.10) использовано равенство

$$\int_0^\infty [1 - \exp(-\eta)] \eta^{-3/2} d\eta = 2 \int_0^\infty \exp(-\eta) \eta^{-1/2} d\eta = 2\pi^{1/2}$$

Из (3.10) и второго равенства (1.7) находим

$$v_+(x) = 2\beta_n N x^{1/2} \quad (3.11)$$

где N определяется выражением (3.7).

Полученный в области (3.4) результат совпадает с хорошо известной асимптотикой у конца свободного от нагрузок разреза (трещины); величина N представляет собой коэффициент интенсивности напряжений [4].

Подставляя в (2.11) выражения (2.12), (2.14), решение для возмущения нормальных к оси напряжений на этой оси можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_-(x) &= (b_1 b_2)^{1/2} (\pi \beta_n)^{-1} \Delta h F(b_1 |x|, b_1^{-1} b_2) \\ \sigma_+(x) &= -(b_1 b_2)^{1/2} (\pi \beta_n)^{-1} \Delta h F(b_2 x, b_1 b_2^{-1}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$F(\xi, \lambda) = \int_0^\infty \frac{\exp[-\xi \tau + \varphi(\lambda^{-1} \tau) - \varphi(\tau)] d\tau}{(1 + \tau^2)^{1/4} (\lambda^2 + \tau^2)^{1/4}} \quad (3.13)$$

Здесь $\varphi(\tau)$ определяется формулой (2.13), Δh — формулой (1.4) для первого и (1.11) для второго вариантов задачи.

Деформированный профиль границы находится по $\sigma_\mp = \sigma_{y\mp}^*$ при помощи соотношений (1.7). Для нахождения упругого поля вне оси x можно воспользоваться известным решением задачи о полуплоскости с заданными на ее границе напряжениями [4]; при выполнении (3.4) в области расстояний, удовлетворяющих (3.4), упругое поле определяется одним лишь коэффициентом интенсивности напряжений N (см. (3.7)) и дается известными выражениями [4].

4. Покажем на двух примерах применение полученных результатов к анализу неоднородного деформирования материалов в тонких областях, когда имеется начальный материал, преобразованный материал и переходная зона между ними.

Рассмотрим процесс отслоения в наполненном жесткими изолированными частицами композите. Степень наполнения будем считать достаточно высокой, так что при отслоении происходит значительное увеличение податливости. Если все частицы наполнителя, которые будем считать сферическими, имеют одинаковый радиус r (отслоение носит критический характер и процесс отслоения протекает однородно по объему), то при условии, что не происходит разрушения, макроскопическая зависимость напряжения от деформации будет линейной с большим наклоном до момента отслоения и линейной с существенно меньшим наклоном после этого момента.

Если имеется распределение частиц по размерам, то возникает целая зона, в которой происходит отслоение, и при однородном по объему процессе отслоения макроскопическая зависимость приобретает вид, аналогичный наблюдаемому при пластическом деформировании. Соответствующее рассмотрение и экспериментальные результаты для отслоения в эластомерах с жестким наполнителем представлены в [5, 6].

Однако процесс отслоения может протекать и неоднородно по объему образца. Возникающая на начальном дефекте в месте отслоения концентрация напряжений может оказаться достаточной для того, чтобы вызвать отслоение рядом с дефектом в сечении, перпендикулярном оси растяжения, и распространение отслоения в тонком слое, заключающем в себе это сечение. Модель такой полосы отслоения аналогична рассмотренной в [7] модели трещины «серебра» в полимере, однако в данном случае длину переходной зоны вследствие предполагаемого критического характера перехода и сильного увеличения податливости после него можно считать пренебрежимо малой.

Материал как в зоне отслоения, происходящего по предположению в узкой полосе, так и вне ее считаем изотропным, нагружаемым вдали от полосы нормальным к ней напряжением σ . Фронт отслоения считаем расположенным при $x=0$, так что при $x>0$ расположен материал с отслоившимися частицами, при $x<0$ — исходный материал. Размер переходной зоны считаем пренебрежимо малым, а увеличение податливости после отслоения — настолько большим, что выполняется условие (3.4).

В исходном материале при $x < 0$ выделим слой полутолщины $h_1 = r$, считая для него упругие постоянные совпадающими с эффективными упругими постоянными исходного материала. Это, разумеется, огрубление. То обстоятельство, что слой исходного материала выделяется до бесконечности при выполнении (3.4), как видно из результатов п. 3, несущественно, ибо на расстояниях перед фронтом порядка r упругое поле совпадает с возникающим от разреза. Деформирование для этого случая изображено на фигуре (б).

Предположим, что достигнуто предельное состояние, при котором фронт отслоения может перемещаться вдоль оси x ; в этом состоянии $\sigma = \sigma_0$. Упругую энергию, освобождающуюся при перемещении фронта отслоения на dx , поскольку справедливо (3.4), можно подсчитать как для разреза, воспользовавшись формулой Ирвина [4]. Предполагая размер композита в направлении оси z единичным, находим, что эта энергия в расчете на одну поверхность слоя равна $\pi(1-\nu^2)N^2E^{-1}dx$. В основном эта энергия идет на отслоение. Обозначая среднюю энергию, затрачиваемую на образование единицы площади поверхности отслоения через γ и считая $\gamma = \text{const}$, находим, что при отслоении одной частицы затрачивается энергия $4\pi^2\gamma$, а всех частиц в объеме $h_2dx \cdot 1$ — энергия $3\gamma r^{-1}wh_2dx$, где w — объемная концентрация частиц (разумеется, это огрубленное описание процесса отслоения).

Приравняем обе энергии с подстановкой вместо N его значения из (3.7); при этом для Δh воспользуемся выражением (1.11), в котором пренебрежем членом с h_1 и положим $\beta_{22}^{(2)} = (1-\nu_2^2)E_2^{-1}$, $\sigma_y^{(0)} = \sigma_0$, $\sigma_x^{(0)} = 0$; используя далее второе выражение в (1.8), найдем

$$\sigma_0 = \frac{E_2}{1-\nu_2^2} \left\{ \frac{3\gamma w}{r} \left[\frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{(1-\nu_2)E_2} - \frac{\nu_2(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu_2)E} \right] \right\}^{1/2} \quad (4.1)$$

Здесь вторая дробь в квадратных скобках должна быть существенно меньше первой (в противном случае неприменимо используемое приближение). Зависимость величин E , ν и E_2 , ν_2 от объемной концентрации частиц w и E_0 , ν_0 может определяться экспериментально или теоретически (E_0 , ν_0 — модуль Юнга и коэффициент Пуассона матрицы).

Уравнение (4.1) по смыслу аналогично уравнению Гриффитса в теории трещин [4]. Входящая в него величина γ может быть оценена на основе испытаний клеек, содержащих начальные трещины. Вместо γ можно ввести размер такой трещины, что трещины меньшего размера в склейке не влияют на прочность σ_f последней (врожденный дефект в смысле Берри [8]). Исходя из формулы Гриффитса, устанавливается, что по порядку величины размер врожденного дефекта близок к $l_0 = E_0\gamma\sigma_f^{-2}$. Выражая отсюда γ через l_0 и подставляя в (4.1), после простых преобразований находим

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_f}{1-\nu_2^2} \left\{ \frac{3l_0 w E_2}{r E_0} \left[\frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{1-\nu_2} - \frac{\nu_2(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu_2} \frac{E_2}{E} \right] \right\}^{1/2} \quad (4.2)$$

При естественном условии, что l_0 существенно меньше, чем r , величина σ_0 значительно меньше σ_f .

Для того, чтобы рассмотренные тонкие зоны отслоений возникали в материале, его структура должна быть достаточно дефектной. При этом при напряжениях, меньших σ_0 , материал деформируется упруго. Затем начинается и происходит развитие узких полос отслоений, обеспечивающих деформирование материала при почти постоянном $\sigma = \sigma_0$. После за-

вершения процесса отслоения материал снова деформируется упруго, но податливость его значительно больше начальной. Таким образом, величина σ_0 играет роль, аналогичную пределу текучести. Формула (4.2) дает выражение этой величины через структурно-механические характеристики материала.

Аналогично на основе полученных результатов может быть рассмотрен процесс отслоения в однонаправленном композите, когда размер переходной зоны пренебрежимо мал и полоса отслоения распространяется параллельно или перпендикулярно направлению армирования (найденное решение учитывает имеющуюся при этом анизотропию).

Другой областью приложения полученных результатов может быть горная механика. При разработке пласта также можно выделить исходный материал, переходную зону (рабочее пространство, где происходит сама добыча), преобразованный материал (заполнитель выработанного пространства). Соответствующая модель рассмотрена в [9, 10] для случая, когда существенна длина переходной зоны (обзор см. в [11]).

Найденное решение позволяет определить напряженно-деформированное состояние в случае, когда пласт и заполнитель деформируются упруго, а длина рабочей зоны пренебрежимо мала. Картина деформирования при этом изображена на фигуре (а), Δh находится по формуле (1.4). Это решение позволяет также определить возмущение напряженно-деформированного состояния, вызванное внезапным изменением мощности, либо податливости пласта, либо того и другого вместе. Картина деформирования при этом обратна изображенной на фигуре (б) (замена растяжения давлением); Δh находится по формуле (1.11).

В указанных примерах расположение пласта предполагается горизонтальным, изменением силы тяжести при изменениях глубины порядка мощности пласта пренебрегается, однородное вдали от места скачка напряженное состояние определяется вертикальным и горизонтальным горным давлением на данной глубине.

Поступила 28 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
2. Енгов В. М., Салганик Р. Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля. Инж. ж. МТТ, 1968, № 6.
3. Нобл Б. Метод Винера — Хопфа. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
4. Разрушение, т. 2. Математические основы теории разрушения. М., «Мир», 1975 (гл. I—III).
5. Farris R. J. The character of the stress-strain function for highly filled elastomers. Trans. Soc. Rheol., 1968, vol. 12, p. 303.
6. Farris R. J. The influence of vacuole formation on the response and failure of filled elastomers. Trans. Soc. Rheol., 1968, vol. 12, p. 315.
7. Салганик Р. Л. Модель трещиноподобной волны неупругого деформирования в твердом теле (трещина серебра). Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 1.
8. Берри Д. Хрупкость твердых полимеров. В кн.: Разрушение твердых полимеров. М., «Химия», 1971.
9. Баренблатт Г. И., Христианович С. А. Об обрушении кровли при горных выработках. Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 11.
10. Кузнецов С. В., Хапилова Н. С. О внезапном выдавливании разрабатываемого угольного пласта. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3.
11. Петухов И. М., Линьков А. М., Сидоров В. С., Фельдман И. А. Теория защитных пластов. М., «Недра», 1976.