МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1977

УДК 539.32

ЭФФЕКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРУГИХ, ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ, НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Б. П. МАСЛОВ, Л. П. ХОРОШУН

(Киев)

Вычисление макроскопических постоянных неоднородных сред представляет собой весьма сложную математическую задачу. Известные к настоящему времени методы ее решения основаны на предположениях, в той или иной мере упрощающих структуру полей, возникающих в неодородном материале [1–6]. Достаточно полно механические эффекты, обусловленные неоднородностью, могут быть учтены применением статистических моделей [3]. Однако решение соответствующих стохастических уравнений строится, как правило, приближенно из-за отсутствия информации о многоточечных моментных функциях, описывающих свойства среды. Следует отметить, что результаты, полученные в [4–6] на основе различных подходов, количественно совпадают. При этом дисперсии случайных полей в пределах каждого из компонентов оказываются равными нулю. Это дает основание считать гипотезы, используемые в [4–6], эквивалентными гипотезе однородности напряженно-деформированного состояния компонентов.

Здесь предлагается метод определения эффективных характеристик неоднородных, физически нелинейных сред. Решение статистически и физически нелинейной задачи о нахождении поля деформаций получено в пренебрежении флуктуациями случайных полей в пределах каждой фазы композиции.

1. Рассмотрим неограниченную неоднородную среду, в каждой точке которой соотношение между напряжениями и деформациями имеет вид

$$\sigma=(\lambda+\psi)\varepsilon \tag{1.1}$$

где λ — тензор модулей упругости закона Гука, ψ — тензор, характеризующий нелинейные свойства материала и являющийся функцией интенсивности деформаций. Для сокращения записи тензорные индексы в (1.1) опущены.

Считаем, что λ, σ, ε, ψ образуют случайные, статистически однородные эргодические тензорные поля. Тогда для определения эффективных характеристик среды достаточно найти закон связи математических ожиданий напряжений и деформаций.

Поле случайных деформаций можно описать следующим интегральным уравнением [6]:

$$\varepsilon^{(1)}=\langle\varepsilon\rangle+K[(\lambda-L+\psi)\varepsilon]^{(2)} \tag{1.2}$$

где $\varepsilon^{(i)}$ — значение тензора ε в точке $x^{(i)}$ трехмерного пространства, интегральный оператор K действует по правилу

$$K_{jknq}\varphi^{(2)}=\int G_{n(j,k)q}(x^{(1)}-x^{(2)})\varphi^{(2)}dv^{(2)}+\int G_{n(j,k)}(x^{(1)}-x^{(2)})\varphi^{(2)}dS_q^{(2)} \tag{1.3}$$

Здесь v — объем, занимаемый неоднородной средой, dS_q — проекция элемента граничной поверхности S на плоскость, перпендикулярную оси x_q. Тензорная функция Грина G удовлетворяет уравнению

$$L_{jknq}G_{mn,qk}(\mathbf{r})=-\delta_{mj}\delta(\mathbf{r}) \tag{1.4}$$

где L — некоторый постоянный изотропный тензор, $\delta(\mathbf{r})$ — дельта-функция Дирака

Осредним уравнение (1.2) при условии, что точка $x^{(1)}$ принадлежит объему, занимаемому i-фазой $(x^{(1)}\in v_i)$. Пренебрегая флуктуациями случайных полей деформаций в пределах каждой фазы, будем иметь

$$\sum_j [\delta_{ij}-Kp_{ij}^{(2)}(\lambda_j-L+\psi_j)]\varepsilon^j=\langle\varepsilon\rangle,\qquad p_{ij}^{(2)}=p(x^{(2)}\in v_j|x^{(1)}\in v_i)\quad(1.5)$$

Здесь ε^i — средние деформации i-фазы; λ_j, ψ_j — тензоры упругих свойств j-фазы, причем $\psi_j=\psi_j(\varepsilon^j)$. Функцией $p_{ij}^{(2)}$ задана вероятность события $x^{(2)}\in v_j$ при условии, что $x^{(1)}\in v_i$. Суммирование распространяется на все фазы композиции.

Соотношение (1.5) представляет собой записанную в символической форме систему нелинейных алгебраических уравнений относительно средних по фазам деформаций. Решение нелинейной системы (1.5) ищем методом последовательных приближений

$$\varepsilon^i=h_i\langle\varepsilon\rangle,\quad h_i=h_{0i}+H_{(n)i},\quad H_{(n)i}=H_{(n)i}(\langle\varepsilon\rangle)\quad(1.6)$$

где h_{0i} — линейная часть оператора h_i, $H_{(n)i}$ — нелинейная часть, вычисленная в n-приближении.

Из уравнений (1.1), (1.6) получим закон связи макроскопических напряжений и деформаций

$$\langle\sigma\rangle=(\lambda^*+\psi^*)\langle\varepsilon\rangle,\qquad \lambda^*=\sum_j s_j\lambda_jh_{0j},\qquad s_j=\frac{v_j}{v}\quad(1.7)$$

$$\psi^*=\sum_j s_j(\lambda_jH_{(n)j}+\psi_jh_j),\qquad \psi_j=\psi_j(h_j\langle\varepsilon\rangle)$$

Таким образом, эффективные характеристики могут быть вычислены, если известно решение системы (1.5), т. е. найден нелинейный алгебраический оператор h_j. Форма оператора, очевидно, зависит от выбора тензора L и вида условных вероятностей p_{ij}.

Известно [7], что представление тензора L в виде $L=\langle\lambda^{-1}\rangle^{-1}$ приводит к решению, совпадающему с аналогичным результатом, полученным из уравнений совместности. Если положить $L=\langle\lambda\rangle$, то будем иметь решение стохастических уравнений равновесия в обычной форме, когда коэффициентами главной части уравнений являются математические ожидания упругих модулей. Существуют и другие способы выбора тензора L, позволяющие, в частности, определить границы, в которых лежат истинные значения упругих модулей [8].

Функции p_{ij} имеют простой физический смысл. Их аналитические выражения могут быть записаны на основании экспериментальных данных о структуре неоднородности материала. Если ввести дополнительные предположения, то построение условных вероятностей p_{ij} можно выполнить теоретически.

Пусть, например, в объеме v проведена произвольная прямая. Функции p_{ij} на этой прямой будем рассматривать как условные плотности перехода из i в j состояние некоторого случайного марковского процесса. Тогда p_{ij} находятся из системы дифференциальных уравнений [9]:

$$\frac{dp_{ij}(\tau)}{d\tau}=\sum_k \xi_{ik}p_{kj}(\tau),\quad p_{ij}(0)=\delta_{ij},\quad p_{ij}(\infty)=s_j\quad(1.8)$$

где τ — расстояние на прямой; ξ_{ik} — постоянные процесса.

2. В качестве примера рассмотрим композиционный материал, представляющий собой матрицу, упрочненную произвольным образом ориентированными эллипсоидами. Пусть упругие свойства эллипсоидов описываются линейным изотропным тензором λ_e. Символами s_m, λ_m, ψ_m обозначим объемную концентрацию и тензоры упругих характеристик материала матрицы.

Под i-фазой композита $(i=1,2,\ldots,N)$ будем понимать включения, ориентированные в i-направлении; m-фазой назовем материал матрицы. Тогда уравнение (1.5) можно записать в виде

$$\varepsilon^i-\frac{1}{1-s_i}Kp_{ii}[(\lambda_e-L)(\varepsilon^i-s_e\varepsilon^e)-$$
$$-s_m(\lambda_m-L+\psi_m)\varepsilon^m]=\langle\varepsilon\rangle,\qquad s_e=1-s_m \tag{2.1}$$

Здесь использовано марковское свойство функции p_{ij}

$$p_{ij}^{(2)}=p(x^{(2)}\in v_j|x^{(1)}\in v_i)=p(x^{(2)}\overline{\in}v_i|x^{(1)}\in v_i)\times$$
$$\times p(x^{(2)}\in v_j|x^{(2)}\overline{\in}v_i,x^{(1)}\in v_i)=(1-p_{ii})p(x^{(2)}\in v_j|x^{(2)}\overline{\in}v_i)\quad {\scriptstyle(i\neq j)} \tag{2.2}$$

Введем новую систему координат y, в которой направление оси y_3 совпадает с i-направлением волокон. В этой системе условную вероятность p_{ii} можно представить следующим образом [10]:

$$p_{ii}(y)=s_i+(1-s_i)\zeta(y),\qquad \zeta(y)=\exp\left[-\frac{8}{\pi^2(1-s_i)}\left(\sum_{j=1}^{3}k_j^{-2}y_j^2\right)^{1/2}\right] \tag{2.3}$$

где $k_1=k_2$, k_3 — размеры полуосей эллипсоидов.

Принимая во внимание (1.3), (2.3), в системе координат y будем иметь

$$Kp_{ii}=(1-s_i)M \tag{2.4}$$

где M — тензор трансверсально изотропной симметрии, причем

$$M_{1111}=3M_{1122}+bj_2,\quad M_{1122}=\frac{a}{8}(j_2-j_3),\quad M_{1133}=\frac{a}{2}j_3,\quad a=\frac{l+m}{m(l+2m)}$$

$$M_{3333}=(a+2b)j_1-2M_{1133},\quad M_{1313}=M_{1133}+\frac{b}{4}(j_2-2j_1),\quad b=-\frac{1}{2m}$$

$$j_1=j(1-kJ)\quad j_2=1-j_1,\quad j_3=j_1-{}^1\!/_2j^2(2+k^2-3kJ),\quad j=(1-k^2)^{-1},\quad k=k_3/k_1$$
$$J=\begin{cases} j^{1/2}\arcsin(j)^{-1/2} & \text{при}\quad k<1\\ -(-j)^{1/2}\ln[k-(-j)^{-1/2}] & \text{при}\quad k>1\end{cases}$$
$$j_1={}^1\!/_3,\ j_2={}^2\!/_3,\ j_3={}^2\!/_{15}\ \text{при}\ k=1$$

Здесь l, m — компоненты тензора L; k — отношение продольного и поперечного размеров эллипсоидов.

Подставив выражение (2.4) в (2.1), в системе координат y определим средние деформации i-фазы

$$\varepsilon^i=\langle\varepsilon\rangle+s_mRM(L_m-\psi_m)\varepsilon^m,\ R=(I-ML_e)^{-1},\ L_e=\lambda_e-L,\ L_m=\lambda_e-\lambda_m \tag{2.5}$$

Осредняя (2.5) по возможным ориентациям эллипсоидальных волокон, найдем средние деформации включений

$$\varepsilon^e = \langle \varepsilon \rangle + s_m (P - Q) \varepsilon^m, \quad P = \langle RML_m \rangle_\omega, \quad Q = \langle RM\psi_m \rangle_\omega \tag{2.6}$$

где угловыми скобками с индексом ω обозначена операция осреднения по ориентациям.

Из (2.6) определим тензор h_m:

$$h_m = \lim_{n\to\infty} h_{(n)m}, \quad h_{(n)m} = h_{0m} + H_{(n)m}, \quad h_{0m} = (I - s_e P)^{-1}$$

$$H_{(n+1)m} = -s_e h_{0m} Q (h_{(n)m} \langle \varepsilon \rangle) h_{(n)m}$$

Тогда для эффективных тензоров λ^*, ψ^* получим следующие формулы

$$\lambda^* = \lambda_e - s_m L_m h_{0m}, \quad \psi^* = s_m [\lambda_m H_{(n+1)m} + \psi_m (h_{(n)m} \langle \varepsilon \rangle) h_{(n)m}] \tag{2.7}$$

3. Пусть тензор ψ_m имеет вид

$$\psi_{ijnq} = \gamma e_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} D_{ijnq}, \quad e_{ij} = D_{ijnq} \varepsilon_{nq} \tag{3.1}$$

где D_{ijnq} — девиаторная составляющая единичного тензора, γ — постоянная материала.

В этом случае из формул (2.7) для композита, армированного сферическими включениями ($k=1$), следует

$$\overset{*}{\lambda}_{ijnq} = K^* \delta_{ij} \delta_{nq} + \mu^* D_{ijnq}, \quad \overset{*}{\psi}_{ijnq} = \chi^* \langle e_{\alpha\beta} \rangle \langle e_{\alpha\beta} \rangle D_{ijnq}$$

$$K^* = \langle K \rangle - s_e s_m \frac{K_2^2}{l + 2m + K_1}, \quad \mu^* = \langle \mu \rangle - s_e s_m \mu_2^2 \delta, \quad \chi^* = \lim \overset{*}{\gamma}_{(n)}$$

$$\overset{*}{\gamma}_{(n+1)} = 8 s_m v_{(n)}^3 (1 + s_e \mu_2 \delta) \gamma, \quad v_{(n+1)} = v_{(0)} - 2 s_e v_{(n)}^3 \delta \gamma \langle e_{\alpha\beta} \rangle \langle e_{\alpha\beta} \rangle$$

$$\delta = \frac{2(3l + 8m)}{15m(l + 2m) + 2\mu_1 (3l + 8m)}, \quad v_{(0)} = \frac{1}{2} (1 + s_e \mu_2 \delta)$$

$$K_1 = s_m K_e + s_e K_m - K, \quad \mu_1 = s_m \mu_e + s_e \mu_m - m$$

$$K_2 = K_e - K_m, \quad \mu_2 = \mu_e - \mu_m, \quad K = l + {}^2/_3 m \tag{3.2}$$

Выражения для линейно-упругих макроскопических модулей K^*, μ^* совпадают с полученными ранее [4–6]. В случае выбора тензора L в виде $L = \langle \lambda \rangle$ первое приближение нелинейного коэффициента $\gamma_{(1)}^*$ совпадает с соответствующим выражением, полученным в [11], где решение найдено в пренебрежении угловыми составляющими двухточечных моментных функций тензора деформации.

Таким образом расчет эффективных упругих характеристик физически нелинейных композиционных материалов, армированных многонаправленными волокнами, может быть выполнен по формулам (2.7). Погрешность выражений (2.7) обусловлена игнорированием флуктуаций случайных полей в каждой из фаз композиции, что, как показано сравнением результатов, эквивалентно применению гипотез [4–6]. Преимуществом предлагаемого подхода является возможность учета нелинейности компонентов. При этом решение физически нелинейной задачи об определении поля деформации в компоненте найдено в произвольном n-приближении, в том числе и для случая многонаправленных и дискретных армирующих волокон.

Поступила 15 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hashih Z., Shtrikman S.* A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. J. Mech. and Phys. Solids, 1963, vol. 11, No. 2.
2. *Ван Фо Фы Г. А.* Теория армированных материалов с покрытиями. Киев, «Наукова думка», 1971.
3. *Ломакин В. А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М., «Наука», 1970.
4. *Болотин В. В., Москаленко В. Н.* К расчету макроскопических постоянных сильно изотропных композитных материалов. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3.
5. *Фокин А. Г., Шермергор Т. Д.* Вычисление эффективных упругих модулей композиционных материалов с учетом многочисленных взаимодействий. ПМТФ, 1969, № 1.
6. *Хорошун Л. П.* К теории изотропного деформирования упругих тел со случайными неоднородностями. Прикл. механ., 1967, т. 3, вып. 9.
7. *Савин Г. Н., Хорошун Л. П.* К вопросу об упругих постоянных стохастически армированных материалов. В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972.
8. *Ермаков Г. А., Фокин А. Г., Шермергор Т. Д.* Вычисление границ для эффективных постоянных упругости неоднородных материалов. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 5.
9. *Розанов Ю. А.* Случайные процессы. М., «Наука», 1971.
10. *Хорошун Л. П.* Прогнозирование термоупругих свойств материалов, упрочненных однонаправленными дискретными волокнами. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 12.
11. *Маслов Б. П.* Нелинейные упругие свойства стохастически неоднородных сред. Прикл. механ., 1973, т. 9, вып. 8.