МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1977

УДК 539.3

О ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ

Ю. К. ЭНГЕЛЬБРЕХТ

(Таллин)

Рассматриваются проблемы общей теории нелинейных переходных волновых процессов деформации в многомерной постановке. Анализ кинематики волнового фронта и концепция развивающихся волн позволяют вывести уравнение переноса вдоль бихарактеристик в виде квазилинейных уравнений в частных производных. Амплитудные факторы, определенные из уравнений переноса, учитывают нелинейные, диссипативные, дисперсионные и другие эффекты. При помощи метода сепарации начальных уравнений возможно учесть и дифракционную расходимость импульса, генерированного ограниченным на некоторой поверхности воздействием.

Математические модели для описания переходных волновых процессов в сплошных средах с учетом эффектов второго порядка выводятся обычно в виде гиперболо-параболической системы уравнений [1]. Известны асимптотические решения таких систем для частных случаев жидких или газовых сред [2] и плазмы [3]. Для одномерных процессов общая теория построения асимптотических решений развита в [4–6], многомерные процессы рассмотрены в [4, 7].

1. Кинематика. Если диссипативные эффекты являются эффектами второго порядка, то тривиальным разложением можно из основной системы получить гиперболическую систему, которую в дальнейшем будем называть ассоциированной. Форма и движение фронта волны с точностью ассоциированной системы описывается соотношением $t=\varphi(X^\kappa)$, которое определяет точки X^κ, находящиеся в момент времени t на фронте. Функция φ определяется из уравнения эйконала.

Эти понятия являются основными для лучевого метода, согласно которому траектория определенного луча определяется из уравнений эйконала, а амплитудный фактор – из уравнения переноса [8]. Применение лучевого метода приводит к решению уравнения переноса в виде линейного обыкновенного дифференциального уравнения. В нелинейном случае целесообразно построить общие зависимости на базе этих же основных кинематических понятий без введения дополнительных предположений о гармоничности волны.

Общий принцип построения решения основной системы следующий: исходя из кинематики ассоциированной линейной системы, строятся уравнения переноса вдоль выбранных лучей, решения которых позволяют определить амплитудные факторы волнового вектора, а структура волнового вектора определяется, исходя из свойств ассоциированной системы.

По определению развивающейся волны скорости изменения компонент волнового вектора малы, если X^κ движется с поверхностями $\varphi(X^\kappa)=\mathrm{const}$. Поэтому целесообразно ввести в рассмотрение новое независимое переменное $\xi=t-\varphi(X^\kappa)$, которое является мерой дистанции от фронта (при $\xi=0$ имеем $t=\varphi(X^\kappa)$).

Замечая, что ассоциированная система отличается от основной порядком $O(\varepsilon)$, где ε – малый параметр, в дальнейшем будем использовать оценки $O(\varepsilon^m)$, где m – действительное число.

2. Уравнение переноса. Пусть нелинейный переходный волновой процесс в диссипативной среде описывается матричным уравнением

$$I\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+A^\kappa\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X^\kappa}+\varepsilon\sum_{p=2}^{M}B_{rs}^{\alpha\beta}\frac{\partial^p\mathbf{U}}{\partial (X^\alpha)^r\partial (X^\beta)^s}+\mathbf{H}=0 \qquad (2.1)$$

$$\mathbf{U}=\|u_i\|,\quad A^\kappa=\|a_{ij}{}^\kappa\|,\quad B_{rs}{}^{\alpha\beta}=\|b_{rsij}^{\alpha\beta}\|,\quad \mathbf{H}=\|h_i\|$$

$$i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad \alpha,\ \beta=0,\ 1,\ 2,\ 3;\quad K=1,\ 2,\ 3;\quad r+s=p>2$$

где I — единичная матрица, X^K — лагранжевы координаты, $X^0=t$. Коэффициенты уравнения (2.1), вообще говоря, зависят от X^K и $\mathbf{U}$, но в дальнейшем рассматриваются только однородные среды, для которых

$$A^K=A^K(\mathbf{U}),\quad B_{rs}{}^{\alpha\beta}=B_{rs}{}^{\alpha\beta}(\mathbf{U}),\quad \mathbf{H}=\mathbf{H}(X^K,\ \mathbf{U})$$

Исследуем решения системы (2.1) при следующих начальных и краевых условиях:

$$\mathbf{U}(t,\ X^K)_{t=t_0}=\mathbf{\Omega}(X^K),\quad \mathbf{U}(t,\ X^K)\,|_S=\mathbf{\Phi}(X^\alpha) \tag{2.2}$$

где S — определенный контур (обычно $\mathbf{\Omega}=0$).

Введем следующие дополнительные продположения: все члены в уравнении (2.1), являющиеся функциями от $\mathbf{U}$, достаточно гладкие и дифференцируемы по $\mathbf{U}$; возможно разложение около решения ассоциированной системы

$$\mathbf{U}=\mathbf{U}_0+\varepsilon\mathbf{U}_1+\ldots,\quad A^K=A_0{}^K+\varepsilon A_1{}^K(\mathbf{U})+\ldots$$
$$B_{rs}{}^{\alpha\beta}=B_{0rs}^{\alpha\beta}+\varepsilon B_{1rs}^{\alpha\beta}(\mathbf{U})+\ldots,\qquad H=H_0+\varepsilon H_1+\ldots \tag{2.3}$$

Собственные значения матриц $A_0{}^K$ действительны и конечны. Рассмотрим ассоциированную систему

$$I\partial\mathbf{U}_0/\partial t+A_0{}^K\partial\mathbf{U}_0/\partial X^K=0$$

Определим для этой системы фронт волны $t=\varphi(X^K)$ и выберем новые зависимые переменные в виде

$$\xi=\varepsilon^k(t-\varphi(X^K)),\qquad \tau^\nu=\varepsilon^{k+1+m(\nu)}X^\nu \tag{2.4}$$

Здесь ν имеет три значения из совокупности $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, выбор зависит от поставленной задачи (2.2). Показатель k позволяет преобразовать координаты для исследования отдельных участков процесса, например, для очень коротких импульсов $k=-1$, для исследования процесса в целом $k=0$.

Показатель $m(\nu)$ дает оценки скорости изменяемости вдоль одной или другой координаты. Далее рассмотрим основные варианты построения уравнений переноса.

1. Равная скорость изменения по всем координатам. Без потери общности считаем $m(\nu)=0$ при всех ν и сосредоточим внимание на исследовании процесса для больших моментов времени ($k=0$).

Подставляем разложения (2.3) в уравнение (2.1). После перехода к новым переменным (2.4) с учетом изложенного выше относительно показателей $m(\nu)$ и k на основе метода возмущений получим совокупность уравнений

$$L_0(\partial\mathbf{U}_0/\partial\xi)+\mathbf{H}_0=0 \tag{2.5}$$
$$L_1(\partial\mathbf{U}_1/\partial\xi)+M_0(\mathbf{U}_0)+\mathbf{H}_1=0 \tag{2.6}$$
$$L_2(\partial\mathbf{U}_2/\partial\xi)+M_1(\mathbf{U}_1)+N_0(\mathbf{U}_0)+\mathbf{H}_2=0 \tag{2.7}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$L_n=(I-A_0{}^K\varphi_K)\,\partial\mathbf{U}_n/\partial\xi \tag{2.8}$$
$$M_n=(I\delta_{\nu0}+A_0{}^K\delta_{\nu K})\frac{\partial\mathbf{U}_n}{\partial\tau^\nu}-A_1{}^K\varphi_K\frac{\partial\mathbf{U}_n}{\partial\xi}+\sum_{p=2}^{M}B_{0rs}^{\alpha\beta}\xi_\alpha{}^r\xi_\beta{}^s\frac{\partial^p\mathbf{U}_n}{\partial\xi^p} \tag{2.9}$$
$$\varphi_K=\partial\varphi(X^N)/\partial X^K,\qquad \xi_\alpha=\partial\varphi(X^N)/\partial X^\alpha$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера (здесь для простоты записи предполагается, что $\xi_{\alpha\alpha}\sim O(\varepsilon)$).

Из уравнения (2.5) и определения (2.8) вытекает

$$\mathbf{U}_0=\alpha_0(\xi,\ \tau^\nu)\mathbf{m}(\tau^\nu) \tag{2.10}$$

где α_0 — амплитудный фактор, $\mathbf{m}(\tau^\nu)$ — структурный фактор. В простейшем случае $\mathbf{H}_0=0$ имеем $\mathbf{m}(\tau^\nu)=\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — правый собственный вектор матрицы $A_0{}^K$.

Подставляя полученное соотношение (2.10) в уравнение (2.6), с учетом (2.8) и (2.9) получим

$$a_{0\nu}\frac{\partial\alpha_0}{\partial\tau^\nu}+a_1\alpha_0\frac{\partial\alpha_0}{\partial\xi}+\sum_{p=2}^{M}a_{2p}\frac{\partial^p\alpha_0}{\partial\xi^p}+f(\alpha_0)=0 \tag{2.11}$$

$$a_{0\nu}=\mathbf{l}(I\delta_{\nu0}+A_0{}^K\delta_{\nu K})\mathbf{m},\qquad a_1=-\mathbf{l}A_1{}^K(\mathbf{m})\mathbf{m}\varphi_K$$

$$a_{2p}=\mathbf{l}B_{0rs}^{\alpha\beta}\xi_\alpha{}^r\xi_\beta{}^s\mathbf{m},\qquad f(\alpha_0)=\mathbf{l}\mathbf{H}_1$$

Здесь $\mathbf{l}$ — левый собственный вектор матрицы $A_0{}^K$.

Уравнение (2.11) назовем уравнением переноса первого порядка вдоль соответствующей бихарактеристики. В данном обобщенном виде оно содержит, вообще говоря, четыре независимых переменных. Уравнение (2.11) решается при начальном условии

$$\alpha_0(\xi,\ \tau^\nu)\,|_S=\varkappa(\xi,\ \tau^\nu),\qquad \varkappa(\xi,\ \tau^\nu)=\mathbf{l}\boldsymbol{\Phi}(\xi,\ \tau^\nu)\,|_S$$

Нелинейный член в уравнении (2.11) с коэффициентом a_1 характеризует изменение скорости из-за нелинейных эффектов. При $\mathbf{H}_0=0$, т. е. $\mathbf{m}=\mathbf{r}$, нетрудно заметить, что a_1 выражается соотношением

$$a_1=(\lambda_0{}^K-\lambda^K)\varphi_K=\gamma(w_0-w),\qquad \gamma=(\varphi_1{}^2+\varphi_2{}^2+\varphi_3{}^2)^{1/2}$$

где λ^k — скорость движения фронта, w — фазовая скорость. Следовательно, коэффициент a_1 выражает изменение скорости фронта или фазовой скорости, если амплитуда волны изменяется от нуля до определенного значения. Далее, используя такую же процедуру, из уравнения (2.7) выводим уравнение переноса второго порядка относительно $\mathbf{U}_1$.

Уравнения переноса n-го порядка, вообще говоря, содержат функции от решений предыдущего $n-1$-го этапа. Отметим, что при построении уравнений переноса высших порядков для получения правильных результатов необходимо уравнения состояния задавать с требуемой точностью. Например, для корректного построения уравнения переноса второго порядка необходимо удерживать в уравнениях состояния кубические члены и т. д.

Если ввести упрощенное предположение, что фронт является плоским и зависит только от одной координаты X^i, то вместо (2.4) будем иметь

$$\xi=\lambda_0t-X^i,\qquad \tau^\nu=\varepsilon X^\nu \tag{2.12}$$

В этом случае уравнение переноса имеет также вид (2.11), но уже не с четырьмя независимыми переменными. Здесь можно различить три подслучая: а) при $\nu\neq0$, имеем $a_{0i}\neq0$, остальные $a_{0\nu}=0$; б) среди ν есть $\nu=0$, но $\nu\neq i$; имеем $a_{00}\neq0$, остальные $a_{0\nu}=0$; в) среди ν есть $\nu=0$, $\nu=i$; имеем $a_{00}\neq0$, $a_{0i}\neq0$, остальные $a_{0\nu}=0$. Отсюда следует, что предположение (2.12) ведет к менее информативным уравнениям переноса.

2. *Различная скорость изменения по разным координатам.* Такая задача возникает при моделировании распространения локализированного воздействия. В данном случае необходимо разделить как зависимые, так и независимые переменные. Пусть волновой вектор $\mathbf{U}$ представляется в

виде суммы

$\mathbf{U}=\mathbf{V}+\mathbf{W}, \qquad \mathbf{V}=\|v_k\|=\|u_k\| \quad (k=1, 2, \ldots, q), \qquad \mathbf{W}=\|w_j\|=\|u_j\| \quad (j=q+1, \ldots, n).$

В отличие от (2.3) предположим

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}_0+\varepsilon\mathbf{V}_1+\ldots, \qquad \mathbf{W}=\varepsilon^t(\mathbf{W}_0+\varepsilon\mathbf{W}_1+\ldots) \tag{2.13}$$

В соотношениях (2.4) выделим одну переменную

$$\xi=\varepsilon^k(t-\varphi(X^K)), \qquad \tau^i=\varepsilon^{k+1+m(i)}X^i, \qquad \tau^\nu=\varepsilon^{k+1+m(\nu)}X^\nu \tag{2.14}$$

Из системы уравнений (2.1), которая в данном случае имеет вид

$$I\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+P^K\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial X^K}+Q^K\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial X^K}+\varepsilon\sum_{p=2}^{M}G_{rs}^{\alpha\beta}\frac{\partial^p\mathbf{V}}{\partial(X^\alpha)^r\partial(X^\beta)^s}+\mathbf{C}=0$$

$$I\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial t}+R^K\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial X^K}+S^K\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial X^K}+\varepsilon\sum_{p=2}^{M}E_{rs}^{\alpha\beta}\frac{\partial^p\mathbf{W}}{\partial(X^\alpha)^r\partial(X^\beta)^s}+\mathbf{D}=0$$

с учетом (2.13) и (2.14) для $k=0$, $m(i)=0$, $m(\nu)=m\neq 0$ получим

$$\begin{aligned}
&I\frac{\partial\mathbf{V}_0}{\partial\xi}+\varepsilon I\frac{\partial\mathbf{V}_1}{\partial\xi}+\varepsilon^{1+m}I\delta_{\nu0}\frac{\partial\mathbf{V}_0}{\partial\tau^\nu}-P_0{}^i\varphi_i\frac{\partial\mathbf{V}_0}{\partial\xi}-\varepsilon P_0{}^i\varphi_i\frac{\partial\mathbf{V}_1}{\partial\xi}-\\
&-\varepsilon P_1{}^i\varphi_i\frac{\partial\mathbf{V}_0}{\partial\xi}+\varepsilon P_0{}^i\frac{\partial\mathbf{V}_0}{\partial\tau^i}-P_0{}^M\varphi_M\frac{\partial\mathbf{V}_0}{\partial\xi}-\varepsilon P_1{}^M\varphi_M\frac{\partial\mathbf{V}_0}{\partial\xi}-\\
&-\varepsilon P_0{}^M\varphi_M\frac{\partial\mathbf{V}_1}{\partial\xi}+\varepsilon^{1+m}P_0{}^K\delta_{\nu K}\frac{\partial\mathbf{V}_0}{\partial\tau^\nu}-\varepsilon^tQ_0{}^i\varphi_i\frac{\partial\mathbf{W}_0}{\partial\xi}-\\
&-\varepsilon^{1+t}Q_1{}^i\varphi_i\frac{\partial\mathbf{W}_0}{\partial\xi}-\varepsilon^{1+t}Q_0{}^i\varphi_i\frac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial\xi}+\varepsilon^{1+t}Q_0{}^i\frac{\partial\mathbf{W}_0}{\partial\tau^i}-\\
&-\varepsilon^tQ_0{}^M\varphi_M\frac{\partial\mathbf{W}_0}{\partial\xi}-\varepsilon^{1+t}Q_1{}^M\varphi_M\frac{\partial\mathbf{W}_0}{\partial\xi}-\varepsilon^{1+t}Q_0{}^M\varphi_M\frac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial\xi}+\\
&+\varepsilon^{1+t+m}Q_0{}^K\delta_{\nu K}\frac{\partial\mathbf{W}_0}{\partial\tau^\nu}+\varepsilon\sum_{p=2}G_{0rs}^{i\beta}\xi_i{}^r\xi_\beta{}^s\frac{\partial^p\mathbf{V}_0}{\partial\xi^p}=O(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^tI\frac{\partial\mathbf{W}_0}{\partial\xi}+\varepsilon^{1+t}I\frac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial\xi}+\varepsilon^{m+t}I\delta_{\nu0}\frac{\partial\mathbf{W}_0}{\partial\tau^\nu}-\varepsilon^tR_0{}^i\varphi_i\frac{\partial\mathbf{W}_0}{\partial\xi}-\\
&-\varepsilon^{1+t}R_0{}^i\varphi_i\frac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial\xi}+\varepsilon^{1+t+m}R_0{}^i\frac{\partial\mathbf{W}_0}{\partial\tau^i}-\varepsilon^tR_0{}^M\varphi_M\frac{\partial\mathbf{W}_0}{\partial\xi}+\\
&+\varepsilon^{m+t}R_0{}^M\delta_{\nu M}\frac{\partial\mathbf{W}_0}{\partial\tau^\nu}-S_0{}^i\varphi_i\frac{\partial\mathbf{V}_0}{\partial\xi}-\varepsilon S_0{}^i\varphi_i\frac{\partial\mathbf{V}_1}{\partial\xi}-\\
&-S_0{}^M\varphi_M\frac{\partial\mathbf{V}_0}{\partial\xi}-\varepsilon S_0{}^M\varphi_M\frac{\partial\mathbf{V}_1}{\partial\xi}+\varepsilon^{1+m}S_0{}^M\delta_{\nu M}\frac{\partial\mathbf{V}_0}{\partial\tau^\nu}+\\
&+\varepsilon^{1+t}\sum_{p=2}E_{0rs}^{\alpha\beta}\xi_\alpha{}^r\xi_\beta{}^s\frac{\partial^p\mathbf{W}_0}{\partial\xi^p}=O(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

В зависимости от значения показателей m и t, а также от порядка φ_i, φ_M и от значения матричных коэффициентов уравнения (2.15) и (2.16) могут привести к разным уравнениям переноса. Выделим основной случай.

Пусть на границе S задаются ненулевые компоненты вектора $\mathbf{V}$. Из-за связанности уравнений в течение процесса генерируются и компоненты $\mathbf{W}$, что на основе закона сохранения энергии приведет к изменениям вектора $\mathbf{V}$. Аналогично процедуре *1* в первом приближении будем иметь $\mathbf{V}_0=\alpha_0(\xi, \tau^\nu)\mathbf{r}$.

Выделим из уравнения (2.15) оператор $\mathbf{M}_0{}^i$ в виде

$$\mathbf{M}_0{}^i=P_0{}^i\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial \tau^i}-P_1{}^i\varphi_i\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial \xi}+\sum_{p=2} G^{i\beta}_{0rs}\xi_i{}^r\xi_\beta{}^s\frac{\partial^p \mathbf{V}_0}{\partial \xi^p}$$

Если структура уравнений (2.15), (2.16) такова, что в результате процесса не возникают компоненты $\mathbf{W}$, то оператор $\mathbf{M}_0{}^i$ описывает изменение волны $\mathbf{V}_0$ в течение всего процесса и будем иметь $\mathbf{lM}_0{}^i=0$. Эта зависимость является уравнением переноса первого порядка. В общем случае для уравнений (2.15), (2.16) можно при определенных значениях m и t (см. примеры) получить уравнение переноса в виде

$$\frac{\partial}{\partial \eta^\beta}\mathbf{lM}_0{}^i=\mathbf{l}a_{\gamma\delta}\mathbf{r}\frac{\partial^2\alpha_0}{\partial\eta^\gamma\partial\eta^\delta}+\mathbf{l}c_\delta\mathbf{r}\frac{\partial\alpha_0}{\partial\eta^\delta},\qquad \eta^\beta\in\{\tau^\nu,\tau^i,\xi\} \tag{2.17}$$

Уравнение (2.17) является общим многомерным уравнением переноса первого порядка, описывающее изменение импульса из-за дифракционной расходимости. Характер уравнения (2.17) зависит от свойств оператора $\mathbf{M}_0{}^i$, который включает нелинейные, диссипативные, дисперсионные и другие эффекты и, как указано выше, в одномерном случае равняется нулю.

Так как в основе получения уравнения переноса в виде (2.17) лежит сепарация переменных, то уместно назвать данный метод методом сепарации начальных уравнений.

3. Двумерная задача для нелинейного вязкоупругого тела. Следуя изложенной выше методике, введем в рассмотрение два вектора $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$, компоненты которых определяются соотношениями

$$v_1=U_1{}^{\bullet},\quad v_2=U_{1,1},\quad v_3=U_{1,2};\quad w_1=U_2{}^{\bullet},\quad w_2=U_{2,2},\quad w_3=U_{2,1}$$

Здесь U_i ($i=1, 2$) – перемещения, точка обозначает дифференцирование по безразмерному времени и индекс после запятой – дифференцирование по указанной координате X^κ.

Общая система уравнений с точностью математической модели [1] в лагранжевых координатах имеет вид

$$I\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+P^\kappa\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial X^\kappa}+Q^\kappa\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial X^\kappa}+\varepsilon G_{11}{}^{\kappa\circ}\frac{\partial^2\mathbf{V}}{\partial X^\kappa\partial t}+\varepsilon F_{11}{}^{\kappa\circ}\frac{\partial^2\mathbf{W}}{\partial X^\kappa\partial t}=0$$

$$I\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}+R^\kappa\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial X^\kappa}+S^\kappa\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial X^\kappa}=0\quad (\kappa=1,2) \tag{3.1}$$

где диссипацией в направлении X^2 пренебрегаем. Матрицы в уравнениях (3.1) имеют следующие ненулевые компоненты:

$$p_{12}{}^1=-1-\varepsilon c_1v_2,\quad p_{13}{}^2=-k_1-\varepsilon c_2v_2,\quad q_{13}{}^2=-k_2-\varepsilon c_1v_2$$
$$s_{12}{}^2=-k_2-\varepsilon c_2v_2,\quad r_{13}{}^1=-k_1-\varepsilon c_2v_2,\quad r_{12}{}^2=-1-\varepsilon c_1v_2$$

$$p_{21}{}^{1}=p_{31}{}^{1}=r_{31}{}^{1}=r_{21}{}^{2}=(g_{11}{}^{10})_{12}=-1, \qquad (g_{11}{}^{20})_{13}=(f_{11}{}^{10})_{13}=-m_1$$

$$c_1=3(\lambda+2\mu+2\nu_1+2\nu_2+2\nu_3)(\lambda+2\mu)^{-1}, \qquad k_1=\mu(\lambda+2\mu)^{-1}$$

$$c_2=(\lambda+2\mu+\nu_2+{}^3/{}_2\nu_3)(\lambda+2\mu)^{-1}, \qquad k_2=(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)^{-1}$$

$$m_1=\eta(\zeta+{}^4/{}_3\eta)^{-1}, \qquad \varepsilon=(\zeta+{}^4/{}_3\eta)(\rho_0 c_0 L)^{-1}$$

Здесь λ, μ — параметры Ламэ; ν_i ($i=1, 2, 3$) — модули упругости третьего порядка; ζ, η — коэффициенты вязкости.

Исследуем продольную волну в направлении X^1 с безразмерной скоростью $\lambda=1$. Форма новых переменных определяется соотношениями

$$\xi=t-X^1, \qquad \tau_1=\varepsilon X^1, \qquad \tau_2=\varepsilon^m X^2 \tag{3.2}$$

Подставляя (2.13) и (3.2) в уравнения (3.1), получим систему, аналогичную (2.15), (2.16). Анализ системы показывает, что при $m={}^1/{}_2$, $t={}^1/{}_2$ в нулевом приближении $\mathbf{V}_0=\alpha_0(\xi, \tau_1, \tau_2)\mathbf{r}$.

Здесь и далее $\mathbf{r}$, $\mathbf{l}$ — правый и левый собственные векторы матрицы $P_0{}^1$, а в следующем приближении уравнение переноса первого порядка имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(a_{01}\frac{\partial\alpha_0}{\partial\tau_1}+a_1\alpha_0\frac{\partial\alpha_0}{\partial\xi}+a_{22}\frac{\partial^2\alpha_0}{\partial\xi^2}+a_3\frac{\partial^2\alpha_0}{\partial\xi\partial\tau_2}\right)=a_4\frac{\partial^2\alpha_0}{\partial\tau_2{}^2} \tag{3.3}$$

$$a_{01}=\mathbf{l}P_0{}^1\mathbf{r}=1, \qquad a_1=-\mathbf{l}P_1{}^1(\mathbf{r})\mathbf{r}={}^1/{}_2c_1, \qquad a_{22}=-\mathbf{l}G_{011}{}^{10}\mathbf{r}=-{}^1/{}_2$$

$$a_3=\varepsilon^{-1/2}\mathbf{l}P_0{}^2\mathbf{r}=0, \qquad a_4=-\mathbf{l}Q_0{}^2(I-R_0{}^1)^{-1}S_0{}^2\mathbf{r}=-{}^1/{}_2k_2{}^2(1-k_1)^{-1}$$

Другие значения показателей m и t приводят к одномерному уравнению переноса либо к системе уравнений. Поэтому можно предполагать, что в случае среды с малой диссипацией изменение амплитуды вдоль луча следует считать медленным по сравнению с изменением поперек луча. При этом в уравнении (3.3) член с коэффициентом a_3 учитывает влияние сдвиговых волн, а член с коэффициентом a_4 — дифракционную расходимость.

Обратим внимание на то, что в данном случае $a_3=0$ и прямое влияние сдвиговых волн отсутствует. Уравнение переноса решается при начальном условии

$$\alpha_0(\xi, \tau_2)\,|_{\tau_1=\tau}=\mathbf{l}\Phi(\xi, \tau_2)\,[H(\tau_2+b^1)-H(\tau_2-b^1)]$$

где $2b_1$ — ширина начального импульса.

Для сравнения рассмотрим двумерную задачу на базе гидродинамической модели [2]

$$I\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+A^K\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x^K}+\varepsilon\sum_{r,s}B^{rs}\frac{\partial^2\mathbf{V}}{\partial(x^1)^s\partial(x^2)^r}=0$$

$$v_1=\rho\rho_0{}^{-1}, \qquad v_2=uc_0{}^{-1}, \qquad v_3=vc_0{}^{-1}$$

$$A^1=\begin{Vmatrix} v_2 & 1+v_1 & 0 \\ 1+(\gamma-2)v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_2 \end{Vmatrix}, \qquad A^2=\begin{Vmatrix} v_3 & 0 & 1+v_1 \\ 0 & v_3 & 0 \\ 1+(\gamma-2)v_1 & 0 & v_3 \end{Vmatrix}$$

$$B^{20}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 \end{Vmatrix}, \qquad B^{11}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & -k_1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B^{02}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

где u, v — компоненты вектора скоростей по направлениям x^1, x^2; k_i — коэффициенты вязкости; γ — показатель адиабаты. Следуя изложенной методике, положим

$$v_i = v_{i0} + \varepsilon v_{i1} + \ldots \quad (i=1,2), \qquad v_3 = \varepsilon^t (v_{30} + \varepsilon v_{31} + \ldots)$$

Тогда, после перехода к новым переменным $\xi = t - x^1$, $\tau_1 = \varepsilon x^1$, $\tau_2 = \varepsilon^m x^2$ получим уравнение переноса в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\partial \alpha_0}{\partial \tau_1} + a_1 \alpha_0 \frac{\partial \alpha_0}{\partial \xi} + a_{22} \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \xi^2}\right] = a_4 \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \tau_2{}^2} \tag{3.4}$$

$$a_1 = -(\gamma+1)/2\varepsilon, \qquad a_{22} = -a_4 = -{}^1/_2$$

Уравнение (3.4) найдено при $m={}^1/_2$, $t={}^3/_2$. Отсюда приходим к заключению, что величина поперечной скорости в гидродинамической модели меньше по сравнению с величиной поперечной скорости, определенной по модели твердого тела.

Как и в случае модели (3.1), другие значения m и t приводят или к одномерному уравнению переноса, или к системам уравнений (в данном случае $\alpha_0 \equiv v_1$). Уравнение (3.4) получено в [2] при помощи прямого преобразования уравнений для $m={}^1/_2$, $t={}^3/_2$.

Изложенный метод имеет прямое сходство с методом распространяющихся волн в математической физике (волновое уравнение приводится к каноническому виду). В случае учета нелинейных, диссипативных, дисперсионных и других эффектов задача сводится к решению уравнений переноса, которые содержат также каноническую часть линейного волнового уравнения.

Поэтому можно данный метод определения амплитуд волнового вектора из уравнений переноса назвать методом развивающихся волн.

Поступила 9 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beevers C. E., Engelbrecht J.* Constitutive rate-dependent theory of thermoviscoelasticity. Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1975, т. 24, № 4.
2. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М., «Наука», 1975.
3. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
4. *Островский Л. А., Пелиновский Е. Н.* О приближенных уравнениях для волн в средах с малыми нелинейностью и дисперсией. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
5. *Taniuti T.* Reductive perturbation method and far fields of wave equations. Suppl. Progr. Theoret. Phys., 1974, No. 55.
6. *Jeffrey A., Kakutani T.* Weak non-linear dispersive waves: a discussion centered around the Korteweg-de Vries equation. SIAM Rev., 1972, vol. 15, No. 4.
7. *Germain P.* Progressive waves. Jahrbuch Dtsch. Ges. Luft- und Raumfahrt e. V. (DGLR), 1971, Köln, 1972.
8. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., «Наука», 1972.