

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ  
С СИСТЕМОЙ ДВУХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

А. Э. БАБАЕВ, В. Д. КУБЕНКО

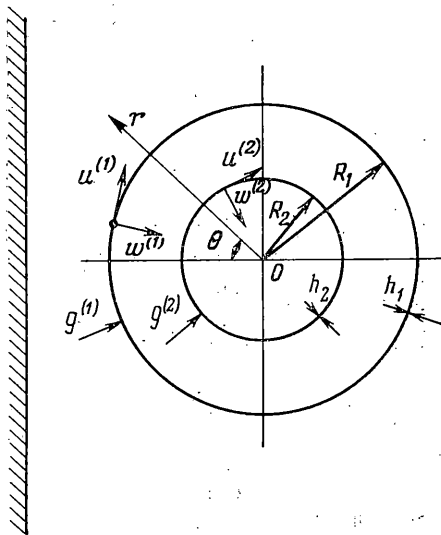
(Киев)

В настоящее время наиболее полно исследовано гидроупругое поведение пустых оболочек, погруженных в безграничную акустическую среду и подверженных действию внешних волн давления. Кроме периодических публикаций, эти вопросы изложены в монографиях [1, 2].

Решение задач нестационарного взаимодействия двух упругих сферических и цилиндрических оболочек с акустическим наполнителем приведено в [3]. В [4] рассмотрены переходные процессы в замкнутых сосудах при действии внутренних волновых источников. Однако гидроупругое поведение сложных оболочечных систем при их взаимодействии со слабыми ударными волнами изучено недостаточно.

Здесь исследуются переходные процессы, возникающие при действии на систему двух упругих центрально-симметричных сферических оболочек плоской волны давления. Приближенное решение аналогичной задачи для двух коаксиальных цилиндрических оболочек дано в [5].

1. Рассматриваемая оболочечная система (фиг. 1) помещена в безграничное пространство идеальной сжимаемой жидкости, свойства которой описываются плотностью  $\rho_1$  и скоростью распространения звука  $c_1$ . Объем между оболочками также заполнен жидкостью, поведение которой характеризуется постоянными  $\rho_2$  и  $c_2$ . В момент времени  $t=0$  на наружную оболочку действует плоская слабая ударная волна.



Фиг. 1

Оболочки предполагаются тонкими и их движение описывается линейными уравнениями теории упругих оболочек [6]:

$$L_{11}^{(1,2)} u^{(1,2)} + L_{12}^{(1,2)} w^{(1,2)} = \gamma_1^{(1,2)} \frac{\partial^2 u^{(1,2)}}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

$$L_{21}^{(1,2)} u^{(1,2)} + L_{22}^{(1,2)} w^{(1,2)} = \gamma_1^{(1,2)} \frac{\partial^2 w^{(1,2)}}{\partial t^2} - \gamma_2^{(1,2)} q^{(1,2)}$$

$$\gamma_1^{(1,2)} = \frac{\rho^{(1,2)} (1 - \nu_{1,2}^2) c_1^2 R_{1,2}^2}{E_{1,2} R_1^2} \quad \gamma_2^{(1,2)} = \frac{\rho_1 (1 - \nu_{1,2}^2) c_1^2 R_{1,2}^2}{E_{1,2} R_1 h_{1,2}}$$

Здесь  $u^{(1,2)}$  и  $w^{(1,2)}$  — тангенциальная и нормальная составляющие вектора перемещений точек срединной поверхности,  $q^{(1,2)}$  — суммарное нор-

мальное давление,  $E_{1,2}$  — модуль Юнга,  $\nu_{1,2}$  — коэффициент Пуассона,  $\rho^{(1,2)}$  — плотность материала оболочки,  $h_{1,2}$  и  $R_{1,2}$  — ее толщина и радиус;  $L_{ij}^{(1,2)}$  — известные дифференциальные операторы. Верхние или нижние индексы 1, 2 характеризуют принадлежность соответственно к внешней и внутренней оболочкам (верхние индексы стоят в скобках). Ниже приведены выражения для дифференциальных операторов

$$\begin{aligned} L_{11}^{(1,2)} &= (1 + \varepsilon_{1,2}) \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - (\nu_{1,2} + \operatorname{ctg}^2 \theta) \right] \\ L_{12}^{(1,2)} &= \varepsilon_{1,2} \left[ \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (\nu_{1,2} + \operatorname{ctg}^2 \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right] - (1 + \nu_{1,2}) \frac{\partial}{\partial \theta} \\ L_{22}^{(1,2)} &= -\varepsilon_{1,2} \left[ \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (1 + \nu_{1,2} + \operatorname{ctg}^2 \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + \right. \\ &\quad \left. + (2 - \nu_{1,2} + \operatorname{ctg}^2 \theta) \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + (1 + \nu_{1,2}) \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} + 1 \right] \\ L_{22}^{(1,2)} &= -\varepsilon_{1,2} \left[ \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + (1 + \nu_{1,2} + \operatorname{ctg}^2 \theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \right. \\ &\quad \left. - (2 - \nu_{1,2} + \operatorname{ctg}^2 \theta) \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] - 2(1 + \nu_{1,2}) \\ \varepsilon_{1,2} &= 1/12 (h_{1,2}/R_{1,2})^2 \end{aligned}$$

где  $\theta$  — угловая сферическая координата.

Возмущенное движение жидкости во внешнем пространстве можно представить в виде суперпозиции волн: падающей, отраженной и излученной внешней оболочкой. Потенциалы скорости указанных волн будем обозначать через  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Колебание внутреннего объема, создаваемое упругими объектами, описывается потенциалом скорости излученных волн  $\varphi_3$ . Неизвестные функции  $\varphi_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) определяются из решения волнового уравнения, которое в сферических координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta} \right) = \left( \delta_{1i} + \delta_{2i} + \frac{c_1^2}{c_2^2} \delta_{3i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

При записи операторов  $L_{ij}^{(1,2)}$  и соотношения (1.2) учтена осевая симметрия рассматриваемой задачи.

Давления  $q^{(1)}$  и  $q^{(2)}$  связаны с потенциалами скорости известными соотношениями

$$q^{(1)} = - \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \right] \Big|_{r=R_1}, \quad q^{(2)} = - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \Big|_{r=R_2/R_1} \quad (1.3)$$

При выводе уравнений (1.1)–(1.3) использовались безразмерные величины: составляющие вектора перемещений точек срединной поверхности наружной и внутренней оболочек  $u^{(1,2)}$ ,  $w^{(1,2)}$  и радиальная координата  $r$  были отнесены к радиусу наружной оболочки  $R_1$ , нормальное давление  $q^{(1)}$  и  $q^{(2)}$  — к величине  $\rho_1 c_1^2$  и время  $t$  — к  $R_1/c_1$ .

На границе контакта оболочек с жидкостью выполняются условия

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = - \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = - \frac{\partial w^{(1)}}{\partial t}$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} \right|_{r=R_2/R_1} = - \frac{\partial w^{(2)}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Кроме того, потенциалы скорости отраженных и излученных волн  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  ограничены при удалении на бесконечность.

До момента взаимодействия падающей волны с внешней оболочкой система находится в состоянии покоя ( $t=0$ )

$$u^{(1,2)} = \frac{\partial u^{(1,2)}}{\partial t} = w^{(1,2)} = \frac{\partial w^{(1,2)}}{\partial t} = \varphi_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = 0 \quad (i=1,2,3) \quad (1.5)$$

2. При решении задачи неизвестные функции ищутся в виде рядов по собственным формам колебаний

$$u^{(1,2)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(1,2)} \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}, \quad w^{(1,2)} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n^{(1,2)} P_n(\cos \theta)$$

$$\varphi_i = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{ni} P_n(\cos \theta), \quad q^{(1,2)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n^{(1,2)} P_n(\cos \theta) \quad (2.1)$$

где  $P_n$  — полиномы Лежандра.

Далее, ряды (2.1) подставляются в исходные соотношения, и полученные формулы трансформируются с помощью интегрального преобразования Лапласа по времени [7]. В результате будем иметь формулировку задачи в области изображений

$$[\gamma_1^{(1,2)} s^2 + \lambda_1^{(1,2)}] u_n^{*(1,2)} + \lambda_2^{(1,2)} w_n^{*(1,2)} = 0 \quad (2.2)$$

$$\lambda_3^{(1,2)} u_n^{*(1,2)} + [\gamma_1^{(1,2)} s^2 + \lambda_4^{(1,2)}] w_n^{*(1,2)} = \gamma_2^{(1,2)} q_n^{*(1,2)}$$

$$\frac{d^2 \varphi_{ni}^*}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi_{ni}^*}{dr} - \left[ \frac{n(n+1)}{r^2} + \left( \delta_{i1} + \delta_{i2} + \frac{c_1^2}{c_2^2} \delta_{i3} \right) s^2 \right] \varphi_{ni}^* = 0$$

$$q_n^{*(1)} = -s \left[ \varphi_{n0}^* + \varphi_{n1}^* + \varphi_{n2}^* - \frac{\rho_2}{\rho_1} \varphi_{n3}^* \right] \Big|_{r=R_1}, \quad q_n^{*(2)} = - \frac{\rho_2}{\rho_1} s \varphi_{n3}^* \Big|_{r=R_2/R_1}$$

$$\left. \frac{d\varphi_{n1}^*}{dr} \right|_{r=R_1} = - \left. \frac{d\varphi_{n0}^*}{dr} \right|_{r=R_1}, \quad \left. \frac{d\varphi_{n2}^*}{dr} \right|_{r=R_1} = \left. \frac{d\varphi_{n3}^*}{dr} \right|_{r=R_1} = -s w_n^{*(1)}$$

$$\left. \frac{d\varphi_{n3}^*}{dr} \right|_{r=R_2/R_1} = -s w_n^{*(2)}$$

$$\lambda_1^{(1,2)} = (1 + \varepsilon_{1,2}) (n^2 + n - 1 + \nu_{1,2}), \quad \lambda_2^{(1,2)} = 1 + \nu_{1,2} + \varepsilon_{1,2} (n^2 + n - 1 + \nu_{1,2})$$

$$\lambda_3^{(1,2)} = (n^2 + n) [1 + \nu_{1,2} + \varepsilon_{1,2} (n^2 + n - 1 + \nu_{1,2})]$$

$$\lambda_4^{(1,2)} = 2(1 + \nu_{1,2}) + \varepsilon_{1,2} (n^2 + n) (n^2 + n - 1 + \nu_{1,2})$$

Здесь звездочкой обозначены трансформированные по Лапласу функции,  $s$  — параметр преобразования.

В результате решения волновых уравнений с учетом граничных условий и условий на бесконечности определим выражения для потенциалов

скоростей отраженных и излученных волн

$$\varphi_{n1}^* = -\frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{Z_1(s)} K_{n+1/2}(sr) \left. \frac{d\varphi_{n0}^*}{dr} \right|_{r=1}, \quad \varphi_{n2}^* = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{s}{Z_1(s)} K_{n+1/2}(sr) w_n^{*(1)} \quad (2.3)$$

$$\varphi_{n3}^* = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{sZ_1(\alpha_2 s) I_{n+1/2}(\alpha_1 sr) - sZ_2(\alpha_2 s) K_{n+1/2}(\alpha_1 sr)}{Z_1(\alpha_2 s) Z_2(\alpha_1 s) - Z_1(\alpha_1 s) Z_2(\alpha_2 s)} w_n^{*(1)}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{r}} \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^{1/2} \frac{sZ_1(\alpha_1 s) I_{n+1/2}(\alpha_1 sr) - sZ_2(\alpha_1 s) K_{n+1/2}(\alpha_1 sr)}{Z_1(\alpha_2 s) Z_2(\alpha_1 s) - Z_1(\alpha_1 s) Z_2(\alpha_2 s)} w_n^{*(2)}$$

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{c_2}, \quad \alpha_2 = \frac{c_1}{c_2} \frac{R_2}{R_1}, \quad Z_1(x) = xK'_{n+1/2}(x) - \frac{1}{2} K_{n+1/2}(x)$$

$$Z_2(x) = xI'_{n+1/2}(x) - \frac{1}{2} I_{n+1/2}(x)$$

где  $I_{n+1/2}$  и  $K_{n+1/2}$  — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода.

Разложение потенциала скорости, описывающего плоскую слабую ударную волну, в ряд по полиномам Лежандра в области изображений имеет вид [1]:

$$\varphi_0^* = -Q(s) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{s\sqrt{sr}} e^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) I_{n+1/2}(sr) P_n(\cos \theta) \quad (2.4)$$

где функция  $Q(s)$  характеризует закон изменения давления за фронтом волны.

После подстановки (2.3), (2.4) в исходные соотношения и ряда преобразований задача сводится к решению системы двух уравнений относительно прогибов внешней и внутренней оболочек.

$$\begin{aligned} & \{ [1+M_1^*(s)] - [1+M_2^*(s)] e^{-2\tau_0 s} \} w_n^{*(1)} - \\ & - \{ M_3^*(s) e^{-2\tau_0 s} \} w_n^{*(2)} = M_4^*(s) - M_5^*(s) e^{-2\tau_0 s} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\{ [1+N_1^*(s)] - [1+N_2^*(s)] e^{-2\tau_0 s} \} w_n^{*(2)} = \{ N_3^*(s) e^{-\tau_0 s} \} w_n^{*(1)}$$

$$\begin{aligned} M_1^*(s) = & \frac{a_n^{(1)} s^2 + b_n^{(1)}}{s^4 + d_n^{(1)} s^2} \frac{f_1(-\alpha_1, s)}{f_1(\alpha_1, s)} + \frac{f_1(-\alpha_1, s) - f_1(\alpha_1, s)}{f_1(\alpha_1, s)} + \\ & + A_1 \frac{f_2(1, s) f_1(-\alpha_1, s)}{f_1(1, s) f_1(\alpha_1, s)} + A_2 \frac{f_2(-1, s)}{f_1(\alpha_1, s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2^*(s) = & \frac{a_n^{(1)} s^2 + b_n^{(1)}}{s^4 + d_n^{(1)} s^2} \frac{f_1(-\alpha_2, s)}{f_1(\alpha_2, s)} + \frac{f_1(-\alpha_2, s) - f_1(\alpha_2, s)}{f_1(\alpha_2, s)} + \\ & + A_1 \frac{f_2(1, s) f_1(-\alpha_2, s)}{f_1(1, s) f_1(\alpha_2, s)} - A_2 \frac{f_2(\alpha_1, s) f_1(-\alpha_2, s)}{f_1(\alpha_1, s) f_1(\alpha_2, s)} \end{aligned}$$

$$M_3^*(s) = A_3 \frac{s^{2n+1}}{f_1(\alpha_1, s) f_1(\alpha_2, s)}, \quad M_4^*(s) = A_4 \frac{s^n f_1(-\alpha_1, s)}{s^2 f_1(1, s) f_1(\alpha_1, s)} Q(s)$$

$$M_5^*(s) = A_4 \frac{s^n f_1(-\alpha_2, s)}{s^n \Gamma_1(1, s) \Gamma_1(\alpha_2, s)} \varrho(s)$$

$$N_1^*(s) = \frac{a_n^{(2)} s^2 + b_n^{(2)}}{s^4 + d_n^{(2)} s^2} \frac{f_1(-\alpha_1, s)}{\Gamma_1(\alpha_1, s)} + \frac{f_1(-\alpha_1, s) - f_1(\alpha_1, s)}{\Gamma_1(\alpha_1, s)} + B_1 \frac{f_1(-\alpha_1, s) f_2(\alpha_2, s)}{\Gamma_1(\alpha_1, s) \Gamma_1(\alpha_2, s)}$$

$$N_2^*(s) = \frac{a_n^{(2)} s^2 + b_n^{(2)}}{s^4 + d_n^{(2)} s^2} \frac{f_1(-\alpha_2, s)}{\Gamma_1(\alpha_2, s)} + \frac{f_1(-\alpha_2, s) - f_1(\alpha_2, s)}{\Gamma_1(\alpha_2, s)} - B_1 \frac{f_2(-\alpha_2, s)}{\Gamma_1(\alpha_2, s)}$$

$$N_3^*(s) = B_2 \frac{s^{2n+1}}{\Gamma_1(\alpha_1, s) \Gamma_1(\alpha_2, s)}, \quad \tau_0 = \frac{c_1}{c_2} \left( 1 - \frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$f_1(k, s) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(n+j-1)! (n^2+n+j^2+j)}{j! (n-j+1)! 2^j} k^{-j} s^{n+1-j}, \quad f_2(k, s) = \sum_{j=0}^n \frac{(n+j)!}{j! (n-j)! 2^j} k^{-j} s^{n-j}$$

$$A_1 = \frac{c_1^2 \rho_1^2}{E_1 \rho^{(1)}}, \quad A_2 = \frac{c_1^2 \rho_1 \rho_2}{E_1 \rho^{(1)}}, \quad A_3 = 2 \frac{c_1^3 \rho_1 \rho_2}{c_2 E_1 \rho^{(1)}} \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2$$

$$A_4 = \frac{\rho_1 R_1}{\rho^{(1)} h_1} (2n+1), \quad B_1 = \frac{c_1^2 \rho_1 \rho_2 h_1 R_2}{E_1 \rho^{(2)} h_2 R_1}, \quad B_2 = 2 \frac{c_1^3 \rho_1 \rho_2 h_1}{c_2 E_1 \rho^{(2)} h_2}$$

$$a_n^{(1,2)} = \frac{\lambda_4^{(1,2)}}{\gamma_1^{(1,2)}}, \quad b_n^{(1,2)} = \frac{\lambda_1^{(1,2)} \lambda_4^{(1,2)} - \lambda_2^{(1,2)} \lambda_3^{(1,2)}}{[\gamma_1^{(1,2)}]^2}, \quad d_n^{(1,2)} = \frac{\lambda_1^{(1,2)}}{\gamma_1^{(1,2)}}$$

Обращение уравнений (2.5) производилось с помощью теоремы о свертке оригиналов, а инверсия функций  $M_i^*(s) - M_5^*(s)$  и  $N_i^*(s) - N_3^*(s)$  — на основе теории вычетов. В результате задача свелась к совместному решению системы двух интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно неизвестных функций  $w_n^{(1)}$  и  $w_n^{(2)}$ :

$$w_n^{(1)}(t) + \int_0^t M_1(t-x) w_n^{(1)}(x) dx - w_n^{(1)}(t-2\tau_0) - \int_0^{t-2\tau_0} M_2(t-2\tau_0-x) w_n^{(1)}(x) dx +$$

$$+ \int_0^{t-\tau_0} M_3(t-\tau_0-x) w_n^{(2)}(x) dx = M_4(t) - M_5(t-2\tau_0) \tag{2.6}$$

$$w_n^{(2)}(t) + \int_0^t N_1(t-x) w_n^{(2)}(x) dx - w_n^{(2)}(t-2\tau_0) - \int_0^{t-2\tau_0} N_2(t-2\tau_0-x) w_n^{(2)}(x) dx =$$

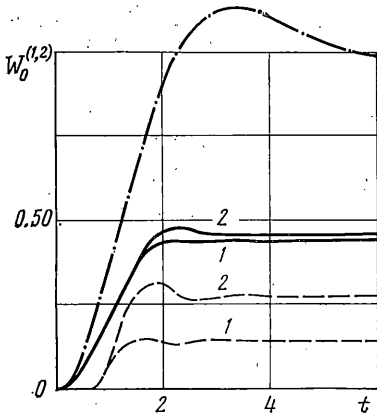
$$= \int_0^{t-\tau_0} N_3(t-\tau_0-x) w_n^{(1)}(x) dx$$

При таком подходе переход в область оригиналов может быть проведен точно, что в отличие от приближенных методов, справедливых в начальной стадии взаимодействия, позволяет учесть влияние повторных отражений на величину искомого прогиба. Непосредственное решение системы уравнений (2.5) относительно  $w_n^{*(1)}$  и  $w_n^{*(2)}$  с последующим обращением полученных формул на основе теории вычетов является чрезвычайно трудоемкой задачей, ибо связано с необходимостью вычисления корней весьма громоздких трансцендентных уравнений. В данном случае знаменателями функций  $M_i^*(s)$  и  $N_j^*(s)$  являются многочлены, и их обращение не вызывает принципиальных затруднений.

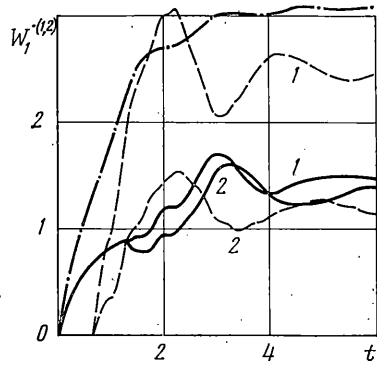
Система уравнений (2.6) решалась численно. Область интегрирования разбивалась на отрезки. Изменением функций  $w_n^{(1)}$  и  $w_n^{(2)}$  на каждом шаге интегрирования пренебрегали. Интегралы от ядер вычислялись в квадратурах. При этом задача сводилась к совместному решению двух систем линейных алгебраических уравнений с матрицами треугольного вида.

Указанный метод позволяет рассматривать процесс взаимодействия на практически любом интервале. Кроме того, данная схема решения весьма удобна при вычислении таких характеристик движения, как скорость и ускорение. Для этого достаточно функцию  $Q(s)$  положить равной соответственно  $sQ(s)$  и  $s^2Q(s)$ .

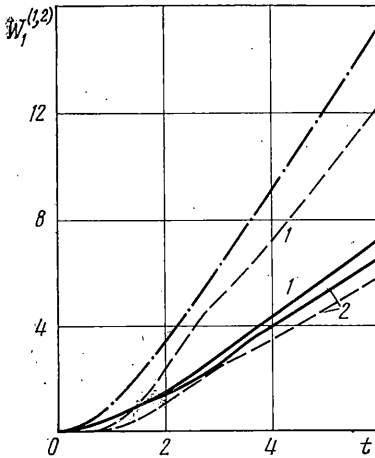
3. Численные результаты были получены для случая, когда давление в падающей волне изменялось по ступенчатому закону ( $Q=1/s$ ). Отношение характеристик внутренней и внешней сред принималось равным  $c_2/c_1=0.807$ ,  $\rho_2/\rho_1=0.800$ , что соответствует заполнению межоболочечного объема спиртом, а внешнего пространства — водой.



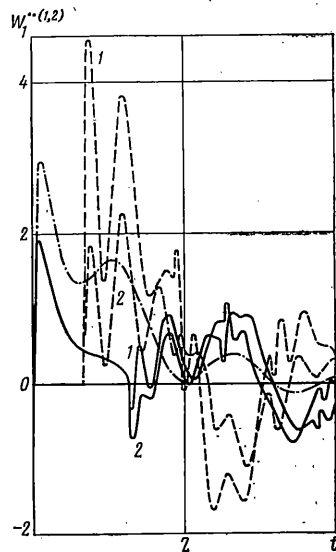
Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3



Фиг. 5

Расчеты проводились для стальных оболочек ( $R_2/R_1=0.5$ ,  $h_1/R_1=0.005$ ). Значения перемещений  $W_n^{(1)} = w_n^{(1)}/w_0$  (сплошные линии) и  $W_n^{(2)} = w_n^{(2)}/w_0$  (пунктирные линии) приведены на Фиг. 2, 3 ( $n=0,1$ ), где  $w_0 = [\rho_1 c_1^2 (1-\nu_1) R_1] / 2E_1 h_1$  — прогиб внешней

оболочки при всестороннем сжатии единичной нагрузкой. Кривые 1, 2 на фиг. 2 соответствуют  $h_2/R_2=0.01, 0.005$ , а на фиг. 3 —  $h_2/R_2=0.01, 0.04$ .

Соответствующие эпюры скоростей и ускорений (точкой обозначены производные по времени) при  $n=1$  представлены на фиг. 4, 5 (кривые 1, 2 соответствуют  $h_2/R_2=0.01, 0.04$ ).

Для сравнения на всех фигурах приведены численные результаты для полой наружной оболочки (штрихпунктирные линии).

Из приведенных графиков видно, что переходные процессы для оболочечной системы и полой оболочки существенно отличаются. Отличие носит как количественный, так и качественный характер и обусловлено действием излученных волн, распространяющихся в объеме между оболочками.

Для нулевой формы колебаний наличие системы оболочек и межоболочечной жидкости приводит к значительному понижению прогибов  $w_0^{(1,2)}$  по сравнению с пустой оболочкой.

Анализ поступательного движения рассматриваемого объекта ( $n=1$ ) показывает, что большие перемещения присущи более легким оболочкам. Поэтому перемещение  $w_1^{(2)}$  для  $h_2/R_2=0.01$  (внутренняя оболочка легче наружной) с некоторого момента времени превышает перемещение  $w_1^{(1)}$ . Для оболочек с близкими массами ( $h_2/R_2=0.04$ ) эти значения разнятся мало.

Необходимо отметить, что если для незаполненной оболочки скорость нарастает почти монотонно, то для рассматриваемой системы указанные кривые имеют ярко выраженные экстремумы, причем для внутренней оболочки они достигаются несколько раньше, чем для внешней. Это вызвано отличием геометрических размеров отражающих поверхностей.

Взаимовлияние упругих оболочек приводит к появлению больших отрицательных ускорений, что не наблюдается в случае пустой оболочки. Кроме того, в момент прихода вторично отраженных волн величина ускорения резко изменяется. С течением времени отмеченные перепады сглаживаются.

Полученные числовые результаты соответствуют наиболее характерным формам движения упругих оболочек, описывающим гидростатическое обжатие рассматриваемой системы и ее поступательное перемещение.

Поступила 12. IV 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Горшков А. Г. Нестационарная гидроупругость оболочек. Л., «Судостроение», 1974.
2. Мнев Е. Н., Перцев А. К. Гидроупругость оболочек. Л., «Судостроение», 1970.
3. Кубенко В. Д. Нестационарное деформирование заполненной жидкостью оболочки под действием слабых ударных волн. Прикл. механ., 1975, т. 11, вып. 6.
4. Бабаев А. Э., Гузь А. Н., Кубенко В. Д. Определение нестационарных нагрузок при действии внутренних волновых источников. В сб.: Избранные проблемы прикладной механики. М., ВИНТИ, 1974.
5. Вороненко Е. Я. Задача нестационарной гидроупругости для системы двух цилиндрических оболочек. В сб.: Теория пластин и оболочек. М., «Наука», 1971.
6. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
7. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление, т. 2. М., «Высшая школа», 1975.