МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1977

УДК 539.3 : 534.1

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ЧАСТОТ КОРОТКОВОЛНОВЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗАМКНУТОЙ ОБОЛОЧКИ

А. Л. ПОПОВ

(Москва)

Методы асимптотического интегрирования уравнений, содержащих в своих коэффициентах большой частотный параметр, широко используются при изучении дифракции коротких волн [1–3]. В предлагаемой статье на основе одного из них — метода эталонных задач – строится рекуррентный процесс интегрирования системы уравнений свободных квазипоперечных колебаний замкнутой оболочки произвольного очертания для такой последовательности собственных частот и функций, которой соответствуют колебания, сосредоточенные в окрестностях определенных линий на срединной поверхности, названных криволинейными осями колебаний. Обнаружено, что такие формы колебаний существуют в диапазонах высоких и средних частот. Соответствующие асимптотические формулы построены с точностью до величин порядка $O(h_*)$, где h_* – приведенная полутолщина оболочки.

Показано, что необходимым геометрическим условием, которому в обоих диапазонах частот должна удовлетворять ось коротковолновых колебаний, является ее совпадение с геодезической линией. В диапазоне средних частот к нему добавляется требование экстремальности кривизны срединной поверхности вдоль геодезической. Условие достаточности связывается с существованием на выбранной геодезической действительного периодического решения уравнения Бабича – Лазуткина – Якубовича [1, 2].

В качестве примера получено решение задачи о высокочастотных колебаниях оболочки в форме трехосного эллипсоида, сосредоточенных в окрестностях ее экваторов.

1. Коротковолновые колебания оболочек описываются уравнениями быстро меняющегося напряженно-деформированного состояния. Примем, что формы колебаний в основном определяются нормальным перемещением, т. е. ограничимся рассмотрением квазипоперечных колебаний (по классификации, приведенной в [4]), когда в уравнениях опущены инерционные члены, связанные с тангенциальными деформациями. Запишем эти уравнения в обозначениях [5], считая, что срединная поверхность оболочки отнесена к изотермическим координатам α, β, совпадающим с линиями кривизны

$$h_*^2\Delta\Delta W-\Delta_1 C-\lambda^2 W=0,\qquad \Delta_1 W+\Delta\Delta C=0$$

$$\Delta=\frac{1}{H^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right),\qquad \Delta_1=\frac{1}{H^2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{R_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right]$$

$$W=2Ehw,\qquad h_*^2=h^2[3(1-\nu^2)]^{-1},\qquad \lambda^2=\gamma(Eg)^{-1}\omega^2 \tag{1.1}$$

Решения системы (1.1) будем искать в диапазонах высоких и средних частот. Рассмотрим сначала диапазон высоких частот, определяемый неравенством $\lambda^2\gg\max(R_1^{-2}, R_2^{-2})$, в силу которого на первых этапах интегрирования уравнений можно не учитывать члены, содержащие радиусы кривизн. При этом из системы (1.1) выделяется отдельное уравнение относительно W

$$\Delta\Delta W-\Omega^4 W=0,\qquad \Omega^4=\lambda^2 h_*^{-2} \tag{1.2}$$

Построим асимптотическое решение уравнения (1.2), сосредоточенное в окрестности некоторой кривой на срединной поверхности оболочки. Для выяснения характера искомого решения воспользуемся методом эталонных задач, развитым в [3] применительно к динамике оболочек с выпуклыми границами. К простейшему эталонному уравнению для изучаемых интегралов (1.2) приводит задача о коротковолновых колебаниях сферы радиуса R, сосредоточенных вблизи ее экватора.

Введем общепринятые изотермические координаты α, β на сфере; α- и β-линиями будут растянутые определенным образом параллели и меридианы. Выберем экватор с координатой $\alpha=0$. Разложим в его окрестности квадрат коэффициента Ламе $H^2=R^2\,\mathrm{ch}^{-2}\alpha$ в ряд Маклорена и пренебрежем членами порядка $O(\alpha^4)$ и выше по сравнению с единицей. Тогда для интегралов (1.2), сосредоточивающихся вблизи экватора $\alpha=0$, получим уравнение

$$W_{,\alpha\alpha}+W_{,\beta\beta}+\Omega^2R^2(1-\alpha^2)W=0$$

допускающее аналитическое решение по методу разделения переменных [2]. Это решение имеет вид

$$W_q^\circ=D_q(2^{1/2}\Omega^{1/2}R^{1/2}\alpha)\exp\{\pm i\Omega R[1-(2q+1)/(\Omega R)]^{1/2}\beta\} \tag{13}$$

где $D_q(z)$ — функция Эрмита, удовлетворяющая уравнению

$$D_q''(z)+(q+{}^1/_2-z^2/4)D_q(z)=0,\quad z=(2\Omega R)^{1/2}\alpha \tag{1.4}$$

Функция $D_q(z)$ осциллирует при $|z|\leqslant\sqrt{2(2q+1)}$ и экспоненциально затухает при $|z|>\sqrt{2(2q+1)}$, но только в том случае, когда q — натуральное число [6] $(q=1,2,\ldots)$.

По аналогии с решением эталонной задачи представим интегралы уравнения (1.2), соответствующие высокочастотным колебаниям, сосредоточенным в окрестности некоторой кривой на срединной поверхности замкнутой оболочки произвольной формы, в виде

$$W=D_q(2^{1/2}p^{1/2}\Psi)\exp(ip\Phi) \tag{1.5}$$

где p — большой частотный параметр, Ψ, Φ — неизвестные функции.

Окрестность кривой S, служащей осью коротковолновых колебаний, зададим в естественной системе координат (s,n): s — длина дуги S, отсчитываемая от начальной точки $s=0$, а n — координата, ортогональная к s ($n=0$ на S). Переход от изотермических координат α, β к естественным координатам s, n осуществляется по формулам

$$\alpha(s,n)=\alpha(s)+n\beta'(s),\qquad \beta(s,n)=\beta(s)-n\alpha'(s)$$

где $\alpha=\alpha(s)$, $\beta=\beta(s)$ — параметрическое уравнение кривой S.

Подставим (1.5) в (1.2). Сокращая на экспоненциальные множители и учитывая линейную независимость функций D_q, D_q', а также связь между D_q'' и D_q из уравнения Эрмита (1.4), получим систему двух уравнений относительно функций Φ и Ψ. Выпишем ее в координатах s, n

$$\begin{gathered}p^2[\Psi^2(\nabla\Psi)^2-(\nabla\Phi)^2]+p[i\Delta\Phi-(2q+1)(\nabla\Psi)^2]+\Omega^2=0\\ 2ip(\nabla\Phi\nabla\Psi)+\Delta\Psi=0\end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\nabla=H^{-1}\left(a^{-1/2}\mathbf{e}_s\frac{\partial}{\partial s}+\mathbf{e}_n\frac{\partial}{\partial n}\right),\qquad a=\left(1+\frac{n}{\rho}\right)^2$$

$$\Delta=H^{-2}\left\{a^{-1}\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{\partial^2}{\partial n^2}+a^{-1/2}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(a^{-1/2}\right)\frac{\partial}{\partial n}+\frac{\partial}{\partial s}\left(a^{1/2}\right)\frac{\partial}{\partial s}\right]\right\}$$

где $\rho=\rho(s)$ — радиус кривизны кривой S в «плоскости» координат α, β.

Неизвестные функции Φ, Ψ и приведенную частоту Ω ищем в виде асимптотических разложений по обратным степеням p, а коэффициенты этих разложений и параметр Ламе H, зависящие от координаты n, представим рядами Маклорена по n в узкой полосе $|n|<1$, охватывающей ось колебаний S

$$\Psi=\Sigma\Psi_{jk}p^{-j}n^k,\ \Phi=\Sigma\Phi_{jk}p^{-j}n^k\ {\scriptstyle (j,\,k=0,\,1,\,2,\dots)},\ \Omega^2=p^2+\varkappa_1p+\Sigma\varkappa_{-j}p^{-j},\ H=\Sigma H_kn^k \tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в (1.6) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях p и n, получим рекуррентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно Ψ_{jk}, Φ_{jk} и $\varkappa_j$. Рассмотрим решение уравнений двух первых приближений по p, которых достаточно для определения частот собственных колебаний с точностью $O(p^{-1})$.

Уравнения первого приближения для членов, пропорциональных n^0, имеют вид

$$\Psi_{00}{}^2(\Psi_{00,s}^2+\Psi_{01}{}^2)-\Phi_{00,s}^2-\Phi_{01}{}^2+H_0{}^2=0,\quad \Phi_{00,s}\Psi_{00,s}+\Phi_{01}\Psi_{01}=0 \tag{1.8}$$

Осциллирующие интегралы (1.5) сосредоточиваются, согласно свойствам функции Эрмита $D_q(t)$, $t=(2p)^{1/2}\Psi$, в окрестности линии $t(\alpha,\beta)=0$. Совместим с этой линией начало координаты n. Тогда из разложений (1.6) следует, что $\Psi_{00}=0$. Во втором уравнении (1.7) остается произведение $\Psi_{01}\Phi_{01}=0$. Если взять $\Psi_{01}=0$, то придем к противоречию с эталонным решением (1.3) для сферы. Поэтому полагаем $\Phi_{01}=0$ и из первого уравнения (1.8) сразу находим

$$\Phi_{00}=\pm\int_0^s H_0(\tau)\,d\tau \tag{1.9}$$

В случае замкнутой оболочки вместо граничных условий необходимо ставить условие периодичности. Для коротковолновых форм колебаний вида (1.5) с учетом (1.7) условие периодичности при $n=0$ запишется в форме

$$p\int_0^L \Phi_{00,s}\,ds+\int_0^L \Phi_{10,s}\,ds+\ldots=2\pi M \tag{1.10}$$

где L — длина кривой S, $M\gg1$ — целое число. Подставляя в это условие выражение (1.9) и разрешая его относительно p, получим в первом приближении

$$p=2\pi M\left(\int_0^L H_0(s)\,ds\right)^{-1} \tag{1.11}$$

Из второго и последующих приближений (1.10) определятся коэффициенты $\varkappa_{-j+2}$ разложения Ω^2 по степеням p ($j=1, 2, \ldots$).

Выпишем далее уравнения первого приближения с членами, пропорциональными n^k ($k=1, 2$), которые используются при определении частоты с указанной выше точностью

$$\rho^{-1}+H_1H_0{}^{-1}=0,\quad \Phi_{00,s}\Psi_{01,s}+2\Phi_{02}\Psi_{01}=0$$

$$F_{,ss}+K(s)F=F^{-3},\quad F(s)=H_0{}^{1/2}(s)\,\Psi_{01}{}^{-1}(s)$$

$$K(s)=\{H^2_{0,s}-2H_0[H_{0,ss}+4(H_2+H_1\rho^{-1})]\}(2H_0)^{-2} \tag{1.12}$$

Первое уравнение (1.12) представляет собой геометрическое условие, которому должна удовлетворять линия S на срединной поверхности замкнутой оболочки, чтобы в ее окрестности могли возникнуть коротковолновые колебания типа (1.5). Покажем, что это условие определяет геодезические линии на срединной поверхности оболочки. Для этого найдем геодезическую кривизну оси колебаний S. В координатах (s, n) линия S была задана параметрически в виде $n=0$. При таком задании S ее геодезическая кривизна находится по формуле [7]

$$\varkappa=A_{2,n}(A_1A_2)^{-1}|_{n=0}$$

где A_1, A_2 — коэффициенты первой квадратичной формы. Согласно (1.6)

$$A_1(s,n)=H(s,n), \qquad A_2(s,n)=(1+n\rho^{-1}(s))H(s,n)$$

Подставляя эти выражения с учетом (1.7) в формулу для $\varkappa$, получим, что условие $\varkappa=0$, определяющее положение геодезической линии, совпадает с первым уравнением (1.6).

Уравнение во второй строке (1.12) приведено к хорошо изученному общему виду [1, 2]; его аналитическое решение строится для широкого класса периодических коэффициентов $K(s+L)=K(s)$, т. е. может быть найдено для оболочки любой заданной формы. Ниже будет получено решение этого уравнения для оболочки в форме трехосного эллипсоида. В общем случае считаем, что уравнение (1.12) относительно $F(s)$ решено и функция $F(s)$ известна. Зная $F(s)$, из (1.12) находим выражение для Ψ_{01} и Φ_{02}

$$\Psi_{01}=H_0^{1/2}F^{-1}, \quad \Phi_{02}=H_0[F_{,s}(2F)^{-1}-H_{0,s}(4H_0)^{-1}] \tag{1.13}$$

На границах области осцилляции аргумент $(2p)^{1/2}\Psi$ функции Эрмита, входящей в (1.5), принимает значения $\pm(2q+1)^{1/2}$. Исходя из этого, с учетом выражений (1.11), (1.13) и равенства Ψ_{00} нулю можно определить в линейном приближении ширину области осцилляции по формуле

$$|2n_*|=\left[2(2q+1)\int\limits_0^L H_0(\tau)d\tau\right]^{1/2}(\pi MH_0(s))^{-1/2}F(s) \tag{1.14}$$

в которой $M\gg1$ — целое число, а под q подразумеваются начальные члены натурального ряда чисел $1, 2, \ldots$. Из (1.14) видно, что ширина области осцилляции интегралов (1.5) имеет порядок $O(M^{-1/2})$. Этот результат согласуется с выводами [2].

Выпишем уравнение второго приближения по p, содержащее коэффициент $\varkappa_1$. На оси колебаний (при $n=0$) это уравнение имеет вид

$$2\Phi_{10,s}+[(2q+1)\Psi_{01}^2-i(\Phi_{00,ss}+2\Phi_{02})-\varkappa_1]\Phi_{00,s}^{-1}=0 \tag{1.15}$$

Используя второе приближение условия периодичности (1.10), почленно проинтегрируем (1.15) по замкнутому контуру S с учетом (1.9), (1.13) и периодичности по s функций $H_0(s)$ и $F(s)$. После ряда преобразований получим

$$\varkappa_1=(2q+1)\int\limits_0^L F^{-2}(s)ds\left(\int\limits_0^L H_0(s)ds\right)^{-1} \quad (q=1,2,\ldots) \tag{1.16}$$

Подставляя значения (1.11) и (1.16) в разложение (1.7) для Ω^2, определим частоты собственных коротковолновых колебаний с точностью порядка $O(M^{-1})$. Построение высших приближений выполняется по аналогичной процедуре.

2. В качестве примера рассмотрим коротковолновые колебания, сосредоточенные в окрестности экваторов замкнутой оболочки в форме трехосного эллипсоида с полуосями $a_i^{1/2}$ $(i=1,2,3)$. Пусть для определенности $a_1>a_2>a_3>0$.

Изотермические координаты α, β введем по формулам [7]

$$\alpha=\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\left(\frac{\xi}{\Pi(a_i-\xi)}\right)^{1/2}d\xi,\quad \beta=\int\limits_{\eta_0}^{\eta}\left(\frac{-\eta}{\Pi(a_i-\eta)}\right)^{1/2}d\eta \quad (i=1,2,3) \tag{2.1}$$

представляющим собой «растяжение» обычных криволинейных координат ξ, η, совпадающих с линиями кривизны эллипсоида.

Выберем экватор $\xi=a_1$, опирающийся на среднюю и меньшую оси эллипсоида. Совместим с ним начало координаты α, т. е. положим $\xi_0=a_1$ (при этом $a_3\leqslant\eta\leqslant a_2$). Кривая $\alpha=0$ удовлетворяет геометрическому условию (1.12), так как является геодезической. Следовательно, в окрестности экватора $\xi=a_1$ могут существовать осциллирующие решения (1.5) уравнения (1.2) и применимы найденные ранее общие формулы для коэффициентов разложений (1.7). В данном случае ось коротковолновых колебаний совпадает с координатной линией β. Поэтому нет необходимости в переходе к системе (s, n); разложения по степеням n заменяются разложениями по степеням α, а роль текущей дуги s исполняет координата β.

В результатах первого приближения важное значение имеет интеграл (1.9). Этот интеграл в координатах (2.1) принимает вид

$$\Phi_{00}=\frac{1}{2}\int\limits_{\beta_0}^{\beta}[a_1-\eta(\beta)]^{1/2}\,d\beta \tag{2.2}$$

Начало отсчета β может быть выбрано произвольно. Положим $\beta_0=0$ при $\eta=\eta_0=a_3$. В подынтегральном выражении (2.2) перейдем к переменной η, а затем к $\varphi=\arcsin[(1-a_2^{-1}\eta)^{1/2}b^{-1}]$, $b=(1-a_3/a_2)^{1/2}$. В результате (2.2) приводится к табличной форме эллиптического интеграла второго рода

$$\Phi_{00}=a_2[E(\pi/2, b)-E(\varphi, b)] \tag{2.3}$$

Приведем решение уравнения (1.12) относительно функции F. В координатах (2.1) оно может быть записано в форме

$$F_{,\beta\beta}-(f_{,\beta}+f^2)F=F^{-3}-c_*^{-4}H_0^{-2}F,\qquad f=(2H_0)^{-1}H_{0,\beta}$$
$$H_0=(a_1-\eta)^{1/2}/2,\qquad c_*=(16a_1)^{-1}(a_1-a_2)(a_1-a_3)$$

Действительные функции $F(\beta)$, удовлетворяющие этому уравнению, определяются следующим образом:

$$F(\beta)=\pm c_*\varphi(\beta),\quad \varphi(\beta)=\exp\left[\int f(\beta)\,d\beta\right]=H_0^{1/2}(\beta) \tag{2.4}$$

где $\varphi(\beta)$ — одно из решений уравнения $\varphi_{,\beta\beta}-(f_{,\beta}+f^2)\varphi=0$.

Подставим (2.3) и (2.4) в (1.16) и совершим замены переменных интегрирования, как в формуле (2.2). После ряда преобразований найдем

$$\varkappa_1=4(2q+1)a_2E^{-1}c_*^{-2}[(1-a_2a_1^{-1})\Pi-K],\qquad m=b^2(a_1a_2^{-1}-1)^{-1}$$

где $K=K(\pi/2, b)$, $E=E(\pi/2, b)$, $\Pi=\Pi(\pi/2, b, m)$ — соответственно полные эллиптические интегралы первого, второго, третьего рода.

Следовательно, выражение для приведенной частоты собственных коротковолновых колебаний оболочки в форме трехосного эллипсоида может быть записано в виде

$$\Omega_{q,M}=\frac{\pi}{2a_2^{1/2}E}\left\{M+\frac{4(2q+1)}{\pi a_2^{1/2}c_*^2}\left[\frac{\Pi}{1-a_2a_1^{-1}}-K\right]+O(M^{-1})\right\}$$

Если взять отношение $a_1:a_2:a_3=3:2:1$, $q=1$, то [8]:

$$b=2^{-1/2},\quad m=1,\quad K=1.85,\quad E=1.35,\quad \Pi=1.275$$

$$\Omega_{q,M}=\pi(2E)^{-1}a_2^{-1/2}[M+0.546+O(M^{-1})]$$

Тогда при $M\sim10^2$ погрешность определения частоты двумя приближениями составит не более 0.01%.

Подставляя (2.4) в выражение (1.14), получим формулу для ширины области осцилляции решения W

$$|2\alpha_*|=2^{3/2}(2q+1)^{1/2}(a_2E^2)^{1/4}c_*(\pi M)^{-1/2}$$

из которой следует, что величина $|2\alpha_*|$ постоянна вдоль экватора $\xi=a_1$.

Аналогичные выкладки, проделанные для значения $\eta=a_3$, показали, что коротковолновые колебания сосредоточиваются также в окрестности экватора, опирающегося на среднюю и наибольшую оси эллипсоида. Для экватора, опирающегося на наибольшую и наименьшую оси эллипсоида, выкладки приводят к чисто мнимой ширине зоны осцилляции, что равносильно ее отсутствию.

3. Приступим к рассмотрению диапазона средних частот квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью, когда частоты по величине имеют порядок главных кривизн срединной поверхности оболочки. Напряженное состояние в этом диапазоне описывается полными уравнениями (1.1).

Характер интегралов системы (1.1) в произвольной замкнутой оболочке выясняется, как и в диапазоне высокочастотных колебаний, из решений $W(\alpha,\beta)$, $C(\alpha,\beta)$ эталонной задачи о колебаниях в окрестности экватора сферической оболочки радиуса R. Эти решения выражаются через интегралы (1.3) по формулам

$$W=-\Omega^{-2}W_q^{\circ},\quad C=-b\Omega^{-4}W_q^{\circ},\quad b=R^{-1},\quad \Omega=h_*^{-1/2}(\lambda^2-b^2)^{1/4}\tag{3.1}$$

Из сравнительного анализа выражений (3.1) и (1.3) заключаем, что решение системы (1.1) в окрестности некоторой оси на срединной поверхности замкнутой оболочки произвольной формы следует искать в виде (p — большой параметр)

$$W=\Phi D_q[(2p)^{1/2}\Psi]e^{ipf},\qquad C=FD_q[(2p)^{1/2}\Psi]e^{ipf}\tag{3.2}$$

где F, Ψ, f, Φ — неизвестные функции. Построим эти решения для случая, когда ось коротковолновых колебаний совпадает с линией кривизны. Совместим с ней начало координаты α. Представим неизвестные функции F, Ψ, f, Φ, квадрат приведенной частоты λ^2, а также величины R_1^{-1}, R_2^{-1}, H^{-2} в виде асимптотических разложений

$$\Phi=\sum\Phi_{jk}p^{-j}\alpha^k,\quad F=p^{-2}\sum F_{jk}p^{-j}\alpha^k,\quad \Psi=\Sigma\Psi_{jk}p^{-j}\alpha^k\tag{3.3}$$

$$f=\Sigma f_k\alpha^k,\quad \lambda^2=\Sigma\lambda_j^2p^{-j},\quad H^{-2}=\Sigma a_k\alpha^k,\quad R_l^{-1}=\Sigma b_{lk}\alpha^k\qquad (j,k=0,1,2,\ldots;\ l=1,2)$$

Изменяемость решения системы (1.1), в сущности, задана; поэтому параметр p известен: $p=h_*^{-1/2}$ [3].

Подставляя (3.2), затем (3.3) в (1.1) и приравнивая нулю коэффициенты при линейно-независимых функциях D_q и D_q', одинаковых степенях p

и α, получим рекуррентную систему уравнений относительно Φ_{jk}, F_{jk}, Ψ_{jk}, f_k, λ_j^2 $(j, k=0, 1, \ldots)$. Как и в предыдущих разделах, ограничимся рассмотрением уравнений двух приближений, достаточных для определения частоты собственных колебаний с точностью $O(p^{-2})$, $p^{-2}=h_*$.

Уравнения первого приближения (при $j=0$) для членов, пропорциональных α^0, имеют вид

$$\Phi_{00}[a_0^2(f_1^2+\overset{2}{f}_{0,\beta})^2-\lambda_0^2]+F_{00}a_0(f_1^2b_{20}+\overset{2}{f}_{0,\beta}b_{10})=0$$

$$\Phi_{00}(f_1^2b_{20}+\overset{2}{f}_{0,\beta}b_{10})-F_{00}a_0(f_1^2+\overset{2}{f}_{0,\beta})^2=0 \qquad (3.4)$$

$$[2a_0\Phi_{00}(f_1^2+\overset{2}{f}_{0,\beta})+b_{20}F_{00}]f_1\Psi_{01}=0, \quad [b_{20}\Phi_{00}-2a_0F_{00}(f_1^2+\overset{2}{f}_{0,\beta})]f_1\Psi_{01}=0$$

Здесь, как и раньше, в силу выбора системы координат $\Psi=0$ при α^0.

Третье и четвертое уравнения (3.4) удовлетворяются при $f_1=0$. Функции $F_{00}\neq\Phi_{00}\neq0$, иначе будет противоречие с эталонными интегралами (3.1). Рассматривая поэтому первые два уравнения (3.4) как однородную алгебраическую систему относительно Φ_{00} и F_{00}, из условия ее разрешимости получим соотношения

$$a_0^2\overset{4}{f}_{0,\beta}-\lambda_0^2+b_{10}^2=0, \quad b_{10}\Phi_{00}-a_0\overset{2}{f}_{0,\beta}F_{00}=0 \qquad (3.5)$$

Наложим условия периодичности вдоль линии кривизны ($\alpha=0$, $0\leqslant\beta\leqslant L$) на величины, входящие в первое соотношение (3.5)

$$\int_0^L a_0^{-1/2}(\beta)\,[\lambda_0^2-b_{10}^2(\beta)]^{1/4}\,d\beta=\pm2\pi Mh_*^{1/2} \qquad (3.6)$$

Большое целое число M выбираем таким, чтобы коэффициент λ_0^2 имел порядок величины $O(M^0)$. В общем виде явно выразить λ_0 из (3.6) не удается, однако при заданных параметрах a_0, b_{10}, т. е. для конкретной формы оболочки, интеграл в (3.6) может быть взят и вычислено соответствующее ему значение λ_0^2. По известному коэффициенту λ_0^2 из (3.5) находится и $f_{0,\beta}$.

Уравнения первого приближения, образованные из членов, пропорциональных α^1, имеют вид

$$a_0\overset{4}{f}_{0,\beta}(2a_1\Phi_{00}+a_0\Phi_{01})-\lambda_0^2\Phi_{01}+\overset{2}{f}_{0,\beta}[a_0b_{10}F_{01}+F_{00}(a_0b_{11}+a_1b_{10})]=0$$

$$[a_0b_{10}\Phi_{01}+\Phi_{00}(a_0b_{11}+a_1b_{10})]-a_0\overset{2}{f}_{0,\beta}(2a_1F_{00}+a_0F_{01})=0 \qquad (3.7)$$

$$2a_0\overset{2}{f}_{0,\beta}\Phi_{00}(2f_2\Psi_{01}+f_{0,\beta}\Psi_{01,\beta})+F_{00}(2\Psi_{01}f_2b_{20}+\Psi_{01,\beta}f_{0,\beta}b_{10})=0$$

$$\Phi_{00}(2\Psi_{01}f_2b_{20}+\Psi_{01,\beta}f_{0,\beta}b_{10})-2a_0F_{00}\overset{2}{f}_{0,\beta}(2f_2\Psi_{01}+f_{0,\beta}\Psi_{01,\beta})=0$$

В первых двух уравнениях (3.7) проведем следующие преобразования: сначала в первом уравнении используем соотношения (3.5), затем из обоих уравнений исключим члены $(b_{10}\Phi_{01}-a_0f_{0,\beta}F_{01})$. После приведения подобных получим одно уравнение $a_0a_1\overset{4}{f}_{0,\beta}+b_{11}b_{10}=0$, которое удовлетворяется при $a_1=b_{11}=0$ (условие $a_1=0$ определяет геодезическую). Эти равенства дают геометрические условия симметрии и экстремальности кривизны, которым должна удовлетворять линия кривизны, чтобы служить осью коротковолновых колебаний типа (3.2).

Из третьего и четвертого уравнений (3.7) исключим члены $(2\Psi_{01}f_2b_{20}+\Psi_{01,\beta}f_{0,\beta}b_{10})$ и, учитывая (3.5), найдем соотношение

$$\lambda_0(2f_2\Psi_{01}+f_{0,\beta}\Psi_{01,\beta})=0 \qquad (3.8)$$

связывающее функции Ψ_{01} и f_2. Для определения Ψ_{01} и f_2 привлечем необходимые уравнения первого приближения, составленные для членов, пропорциональных α^2

$$2a_0 f_{0,\beta}^2 g_1 \Phi_{00} + g_2 F_{00} - x b_{10} = 0, \quad g_2 \Phi_{00} - 2a_0 f_{0,\beta}^2 g_1 F_{00} + a_0 x f_{0,\beta}^2 = 0$$

$$x = a_0 F_{00} f_{0,\beta}^2 - b_{10}\Phi_{02}, \quad g_1 = a_0(\Psi_{01}^4 - 4f_2^2 - 2f_{0,\beta} f_{2,\beta}) - a_2 f_{0,\beta}$$

$$g_2 = a_0(b_{20}\Psi_{01}^4 - 4f_2^2 b_{20} - 2f_{0,\beta} f_{2,\beta} b_{10} - b_{12} f_{0,\beta}^2) - a_2 b_{10} f_{0,\beta}^2$$

Структура этих уравнений позволяет перейти к одному уравнению, одновременно исключив x и g_2. Проделав необходимые выкладки, получим

$$[(b_{10}\Phi_{00} + a_0 f_{0,\beta}^2 F_{00})(b_{10} F_{00} + a_0 f_{0,\beta}^2 \Phi_{00}) - 2a_0 b_{10} f_{0,\beta}^2 (F_{00}^2 + \Phi_{00}^2)] g_1 = 0$$

Это уравнение удовлетворяется при $g_1 = 0$, т. е. когда

$$a_0(\Psi_{01}^4 - 4f_2^2 - 2f_{0,\beta} f_{2,\beta}) - a_2 f_{0,\beta}^2 = 0$$

Подставляя в это соотношение f_2 из (3.8) и производя замену $\varphi = f_{0,\beta}^{1/2}\Psi_{01}^{-1}$, приходим к уравнению

$$\varphi_{,\beta\beta} + K(\beta)\varphi = \frac{1}{\varphi^3}, \quad K(\beta) = \frac{a_2}{a_0} - \frac{1}{4}\left(\frac{f_{0,\beta\beta}}{f_{0,\beta}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{f_{0,\beta\beta}}{f_{0,\beta}}\right)_{,\beta}$$

совпадающему по форме с одним из уравнений (1.12). Решение его находится для конкретной формы оболочки при помощи методов, описанных в [1, 2] и п. 2, и в общем случае может считаться известным. Тогда функции Ψ_{01} и f_2 определяются по формулам, совпадающим по виду с (1.13)

$$\Psi_{01} = \frac{f_{0,\beta}^{1/2}}{\varphi}, \quad f_2 = \frac{f_{0,\beta}}{2}\left(\frac{\varphi_{,\beta}}{\varphi} - \frac{1}{2}\frac{f_{0,\beta\beta}}{f_{0,\beta}}\right) \tag{3.9}$$

Выражение для ширины области осцилляции в первом приближении будет таким же, что и (1.14), если в нем поменять s, F, H_0 на β, φ, $f_{0,\beta}$ соответственно.

Таким образом, влияние кривизны срединной поверхности замкнутой оболочки ощутимо уже в первом приближении функции f, Ψ, F, Φ и частоты λ_0^2. Для определения второго приближения частоты выпишем из рекуррентной системы, получающейся в результате подстановки (3.2), (3.3) в (1.1), необходимые уравнения второго приближения по p с членами, пропорциональными α^0

$$a_0^2\Phi_{10} f_{0,\beta}^3 - 2i f_{0,\beta}^2 [2a_0 f_{0,\beta}\Phi_{00,\beta} + a_{0,\beta}\Phi_{00} f_{0,\beta} + 3a_0\Phi_{00}(f_{0,\beta\beta} + 2f_2) +$$
$$+ i a_0 (2q+1)\Phi_{00}\Psi_{01}^2] - 2i a_0 b_{20} f_2 F_{00} + a_0 b_{10} F_{10} f_{0,\beta}^2 -$$
$$- i a_0 [2b_{10} F_{00,\beta} f_{0,\beta} + F_{00}(b_{10} f_{0,\beta})_{,\beta} + i(2q+1) b_{20} F_{00}\Psi_{01}^2] - \lambda_0^2\Phi_{10} - \lambda_1^2\Phi_{00} = 0$$

$$2i a_0 b_{20} f_2 \Phi_{00} - a_0 b_{10}\Phi_{10} f_{0,\beta}^2 + i a_0 [2b_{10} f_{0,\beta}\Phi_{00,\beta} + \Phi_{00}(b_{10} f_{0,\beta})_{,\beta} +$$
$$+ i(2q+1) b_{20}\Phi_{00}\Psi_{01}^2] + a_0^2 F_{10} f_{0,\beta}^3 - 2i a_0 f_{0,\beta}^2 [2a_0 f_{0,\beta} F_{00,\beta} + a_{0,\beta} F_{00} f_{0,\beta} +$$
$$+ 3a_0 F_{00}(f_{0,\beta\beta} + 2f_2) + i a_0 (2q+1) F_{00}\Psi_{01}^2] = 0$$

Исключая в этих уравнениях члены $(a_0 f_{0,\beta}^2 F_{10} - b_{10}\Phi_{10})$, после ряда преобразований приходим к одному уравнению

$$2b_{10}[(2q+1)\Psi_{01}^2(b_{20} - b_{10}) + 2f_2(3b_{10} - b_{20})] + \lambda_1^2 f_{0,\beta}^2 -$$

$$-2a_0f_{0,\beta}[2a_0f_{0,\beta}\Phi_{00,\beta}\Phi_{00}^{-1}+a_{0;\beta}f_{0,\beta}+3a_0(f_{0,\beta\beta}+2f_2)-a_0(2q+1)\Psi_{01}^2]=0$$

Проинтегрировав его почленно вдоль всей линии кривизны с учетом однозначности a_0, b_{10}, Φ_{00}, $f_{0,\beta}$, получим выражение для коэффициента λ_1^2,

$$\lambda_1^2=\frac{2(2q+1)}{I}\int_0^L\frac{\lambda_0^2+b_{10}(b_{20}-2b_{10})}{\lambda_0^2-b_{10}^2}\frac{d\beta}{\varphi^2},\quad I=\int_0^L\frac{d\beta}{a_0^2f^3_{0,\beta}}$$

которое вместе с (3.6) определяет частоту собственных коротковолновых колебаний в окрестности экстремальной линии кривизны (экватора срединной поверхности замкнутой оболочки) с точностью до величин порядка $O(h_*)$.

Построение дальнейших приближений не представляет принципиальных трудностей.

Поступила 14 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабич В. М., Лазуткин В. Ф.* О собственных функциях, сосредоточенных вблизи замкнутой геодезической. В сб.: Проблемы математической физики, вып. 2. Изд-во ЛГУ, 1967.
2. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., «Наука», 1972.
3. *Чернышев Г. Н.* Асимптотический метод исследования коротковолновых колебаний оболочек. ПММ, 1975, т. 39, вып. 2.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Классификация интегралов динамических уравнений линейной двумерной теории оболочек. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
5. *Гольденвейзер А. Л.* Некоторые математические проблемы линейной теории упругих оболочек. Успехи матем. наук, 1960, т. 15, вып. 5 (95).
6. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 3, ч. 2. М., «Наука», 1969.
7. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
8. *Byrd P. F., Friedman M. D.* Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists. Springer-Verlag, Berlin, 1954.