

ОПТИМИЗАЦИЯ ПО ВЕСУ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ С ПЕРЕМЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ
ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА ЧАСТОТУ КОЛЕБАНИЙ

И. С. АДАМОВИЧ, Р. Б. РИКАРДС

(Рига)

Оптимальному проектированию конструкций из армированных как однородных, так и неоднородных материалов посвящено ряд исследований [1-5]. Задачи об оптимальном распределении неоднородных свойств конструкций могут быть сформулированы в терминах теории оптимального управления и решены с помощью ее математического аппарата [3, 5].

Однако в случае сложных конструкций, поведение которых описывается системой дифференциальных уравнений высокого порядка в частных производных, для решения вышеуказанных оптимизационных задач можно применить и другой путь. Он основывается на использовании в оптимизации конструкций метода конечных элементов. При этом оптимизируемая конструкция разбивается на конечные элементы, каждый из которых характеризуется постоянными или изменяющимися по заданному закону величинами. Они меняются от элемента к элементу, что и позволяет учесть неоднородность свойств. После такой дискретизации конструкция рассчитывается методом конечных элементов, и полученное условие, содержащее оптимизируемые параметры, является ограничением к основной задаче оптимизации, которая сводится далее к задаче нелинейного программирования и решается ее методами.

Предлагаемый подход к решению задач об оптимальном распределении переменных свойств конструкций позволяет оптимизировать конструкции различной формы, при различных граничных условиях с большим числом параметров оптимизации.

Этим методом получен оптимальный проект цилиндрической оболочки с переменной жесткостью материала при ограничении на частоту собственных колебаний. Переменная жесткость создается за счет изменения по длине оболочки угла армирования. Результаты оптимизации сравниваются с результатами оптимизации такой же оболочки, но при постоянном угле армирования.

1. Рассмотрим ортотропную цилиндрическую оболочку длины L , радиуса R и толщины h , изготовленную из армированного пластика и работающую в режиме колебаний. Пусть оболочка армирована слоями трех типов: продольными, поперечными и под углом $\pm\beta$ к продольной оси. Требуется определить такое расположение армирующих волокон, чтобы вес оболочки при выполнении ограничения на частоту собственных колебаний был минимальным.

В качестве исходных характеристик материала примем модуль упругости и коэффициент Пуассона связующего и арматуры E_c , E_a , ν_c , ν_a и объемный коэффициент армирования μ . Будем изменять жесткость материала, меняя углы армирования и относительное количество волокон (равное отношению количества волокон под заданным углом к общему количеству); причем будем считать, что слои, расположенные под фиксированным углом 0° , содержат относительное количество волокон θ_1 . Слои, образующиеся путем спиральной намотки под переменным по длине оболочки углом $\pm\beta$, содержат относительное количество волокон θ_2 ; армирующие слои, расположенные под углом 90° , характеризуются величиной θ_3 . Таким образом, изменение жесткости по длине оболочки получается за счет изменения по длине угла спиральной намотки $\pm\beta$.

За критерий качества принимаем вес оболочки

$$G = 2\pi R L h [\mu \gamma_a + (1 - \mu) \gamma_c] \quad (1.1)$$

где γ_a, γ_c — объемный вес арматуры и связующего.

Разобьем оболочку по длине на N цилиндрических элементов и в качестве параметров оптимизации выберем следующие величины: β^i ($i = 1, \dots, N/2$) характеризуют изменение жесткости по длине (рассматриваются только симметричные граничные условия); θ_1, θ_2, h — оптимизируемые, но постоянные по длине оболочки параметры. Величина θ_3 определяется как $\theta_3 = 1 - \theta_1 - \theta_2$ и поэтому не входит в число оптимизируемых параметров. Вектор оптимизируемых параметров x , определяющий проект оболочки, имеет вид $x = \{h, \theta_1, \theta_2, \beta^1, \dots, \beta^{N/2}\}$. В качестве ограничений к задаче примем следующие:

геометрические и структурные ограничения

$$1 - \theta_1 \geq 0 \quad (\theta_1 \geq 0), \quad 1 - \theta_2 \geq 0 \quad (\theta_2 \geq 0), \quad 1 - \theta_1 - \theta_2 \geq 0, \quad h \geq h_{\min} \quad (1.2)$$

ограничение на частоту собственных колебаний

$$\omega_*(x) - \omega \geq 0 \quad (1.3)$$

где $\omega_*(x)$ — собственная критическая частота, зависящая от оптимизируемых параметров; ω — некоторая заданная частота. На β^i накладывать ограничений не требуется, так как в настоящее время с помощью спиральной намотки можно расположить армирующий элемент под любым углом.

Таким образом, поставлена следующая оптимизационная задача. Требуется найти $\min G$ (1.1) при выполнении геометрических и структурных ограничений (1.2) и физических ограничений (1.3).

Она содержит $N/2 + 3$ параметров оптимизации x и семь ограничений (1.2) и (1.3). Одновременно с этой задачей решается еще одна оптимизационная задача для однородной по длине оболочки при $\beta = \text{const}$ с параметрами оптимизации $x_1 = \{h, \theta_1, \theta_2\}$, т. е. задача об отыскании $\min G$ (1.1) при геометрических и структурных ограничениях (1.2) и ограничении на частоту собственных колебаний (1.3) $\omega_*(x_1) - \omega \geq 0$.

Этим определяется не только общий выигрыш в весе оболочки при ее оптимизации, но и выигрыш, получаемый исключительно за счет изменения угла армирования по длине оболочки, т. е. за счет создания неоднородного материала.

Обе оптимизационные задачи являются задачами нелинейного математического программирования. Для их решения используется метод проектируемых градиентов Розена.

2. Для определения $\omega_*(x)$ применим метод конечных элементов, который, как показано в [6], приводит в этом случае к уравнению

$$|K - \omega^2 M| = 0 \quad (2.1)$$

где $[K], [M]$ — матрицы жесткости и масс конструкции в общей системе координат. Наименьшее значение ω^2 из (2.1) будет критической частотой.

Рассмотрим далее колебания около невозмущенного состояния равновесия. Определим состояние равновесия системы из условия, что первая вариация полной энергии в состоянии равновесия должна быть равна нулю

$$\delta(U + \Omega) = 0 \quad (2.2)$$

где U — потенциальная энергия деформаций оболочки, Ω — потенциальная энергия внешней нагрузки.

Для многослойной оболочки, изготовленной из материала, подчиняющегося обобщенному закону Гука, ее потенциальную энергию деформаций

определяет следующий функционал:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^{ij} e_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V A^{ijkl} e_{kl} e_{ij} dV \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (2.3)$$

Здесь σ^{ij} — компоненты тензора напряжений, e_{ij} — компоненты тензора деформаций, A^{ijkl} — компоненты тензора жесткости.

Пусть x^i ($i=1, 2, 3$) — система криволинейных нормальных координат в трехмерном пространстве с осями x^α ($\alpha=1, 2$) на срединной поверхности оболочки и осью x^3 , направленной по нормали к срединной поверхности. Применяя кинематическую гипотезу Кирхгофа — Лява для всего многослойного композита в целом [4, 7], получим следующие соотношения для полных деформаций:

$$e_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta} + x^3 k_{\alpha\beta}, \quad e_{\alpha 3} = 0, \quad e_{33} = 0, \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (2.4)$$

Здесь $\Omega_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора деформаций срединной поверхности, $k_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора искривлений [8]:

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (v_{\alpha\parallel\beta} + v_{\beta\parallel\alpha}) - b_{\alpha\beta} w \\ k_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} [\gamma_{\alpha\parallel\beta} + \gamma_{\beta\parallel\alpha} - \Phi (b_\beta^\lambda \varepsilon_{\alpha\lambda} - b_\alpha^\lambda \varepsilon_{\beta\lambda})] \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $b_{\alpha\beta}$ — компоненты второго тензора поверхности; $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — двумерные ε -тензоры; $v = \{v_\alpha, w\}$ — компоненты вектора перемещений срединной поверхности; $\gamma_\alpha = -\{w, \alpha + b_{\alpha\nu} v_\nu\}$ — компоненты вектора ротации нормали; $\Phi = \frac{1}{4} \varepsilon^{\alpha\beta} (v_{\beta\parallel\alpha} - v_{\alpha\parallel\beta})$ — инвариант, характеризующий ротацию вокруг нормали; знак параллельности означает ковариантное дифференцирование в метрике срединной поверхности.

Подставляя (2.4) в (2.3), получим энергию деформаций для многослойной оболочки, состоящей из K слоев

$$U = \frac{1}{2} \int_S \{Q^{\alpha\beta\gamma\delta} \Omega_{\gamma\delta} \Omega_{\alpha\beta} + 2B^{\alpha\beta\gamma\delta} \Omega_{\gamma\delta} k_{\alpha\beta} + D^{\alpha\beta\gamma\delta} k_{\gamma\delta} k_{\alpha\beta}\} ds \quad (2.6)$$

$$(Q^{\alpha\beta\gamma\delta}, B^{\alpha\beta\gamma\delta}, D^{\alpha\beta\gamma\delta}) = \int_{-h/2}^{h/2} C^{\alpha\beta\gamma\delta} (1, x^3, (x^3)^2) dx^3 \quad (2.7)$$

где $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — компоненты тензора жесткости слоев в координатном базисе e_i , совпадающем с координатным базисом системы координат оболочки (x^α, x^3) . Подставим (2.5) в (2.6) и перейдем от континуальной системы на дискретную, представив поле перемещений для цилиндрического конечного элемента в виде [9]:

$$\begin{aligned} u &= (a_1 + a_2 x^1) \cos(ny/R), \quad v = (a_3 + a_4 x^1) \sin(ny/R) \\ w &= [a_5 + a_6 x^1 + a_7 (x^1)^2 + a_8 (x^1)^3] \cos(ny/R) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь n — число волн в окружном направлении; u, v, w — физические компоненты вектора перемещений срединной поверхности; коэффициенты a_j выражаются через неизвестные узловые перемещения.

После интегрирования по площади конечного элемента из условия (2.2) получим матрицу жесткости цилиндрического конечного элемента с многослойной структурой материала. Здесь она не приводится, поскольку имеет громоздкий вид.

Матрицу масс для рассматриваемого конечного элемента определим по формуле [6]:

$$[M] = \int_V [c]^t [m] [c] dV, \quad [m] = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

где m — масса единицы объема элемента, а матрица $[c]$ определяет связь между компонентами перемещений для произвольной точки конечного элемента и компонентами узловых перемещений элемента.

Рассмотрим связь жесткостных характеристик многослойного композита со структурными параметрами материала θ_k и β_k . Выделим ортотропный элементарный слой и совместим его оси симметрии с координатным базисом e_i' . Тогда упругие характеристики слоя в осях его асимметрии будут определяться по известным формулам теории армирования [4]:

$$E_1' = E_c(1-\mu) + E_a\mu, \quad \nu_{12} = \nu_c(1-\mu) + \nu_a\mu \quad (2.9)$$

$$E_2' = \frac{[1+(n'-1)\mu]E_a}{[1+n'(1-\mu)][1+(n'-1)\mu] - (n'\nu_c - \nu_a)^2\mu(1-\mu)}$$

$$G_{12}' = [m'(1+\mu) + (1-\mu)][m'(1-\mu) + (1+\mu)]^{-1}G_c$$

$$n' = E_a/E_c, \quad G_c = 1/2E_c(1+\nu_c)^{-1}, \quad m' = n'(1+\nu_c)/(1+\nu_a)$$

где E_1' , E_2' , G_{12}' , ν_{12}' — жесткостные характеристики ортотропного слоя в его осях симметрии x_1' , x_2' .

Все характеристики, кроме E_2' , вычисленные по этим формулам, согласуются с экспериментальными данными. Формула для E_2' дает несколько заниженные значения. Из технических характеристик (2.9) по известным формулам можно получить компоненты матрицы жесткости для элементарного слоя.

Пересчитаем компоненты тензора жесткости слоя от базиса e_i' к базису e_i :

$$C^{\alpha\beta\gamma\delta} = C^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} l_{\alpha'}^{\alpha} l_{\beta'}^{\beta} l_{\gamma'}^{\gamma} l_{\delta'}^{\delta}, \quad l_{\alpha'}^{\alpha} = \begin{vmatrix} \cos \beta_k & \sin \beta_k \\ -\sin \beta_k & \cos \beta_k \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

где $l_{\alpha'}^{\alpha}$ — направляющие косинусы.

Представим компоненты тензора жесткости многослойного материала в следующем виде:

$$A^{\alpha\beta\gamma\delta} = Q^{\alpha\beta\gamma\delta}/h \quad (2.11)$$

и определим относительное количество слоев k -го типа как $\theta_k = [x_{(k)}^3 - x_{(k-1)}^3]/h$, где $x_{(k)}^3$ — внешняя от центра кривизны координата k -го слоя.

Подставляя (2.7) и (2.10) в (2.11), найдем выражения для компонент тензора жесткости K -слоистого композита

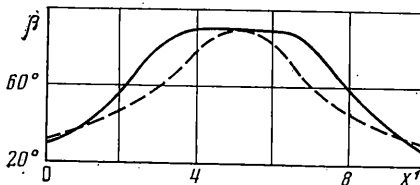
$$A^{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_{k=1}^K \theta_k C_{(k)}^{\alpha\beta\gamma\delta} l_{\alpha'}^{\alpha} l_{\beta'}^{\beta} l_{\gamma'}^{\gamma} l_{\delta'}^{\delta}$$

Если количество слоев K велико, то можно принять, что материал однородный по толщине и компоненты тензора мембранно-изгибной жесткости приближенно равны нулю ($B^{\alpha\beta\gamma\delta} \approx 0$), а компоненты тензора изгибной жесткости $D^{\alpha\beta\gamma\delta} \approx h^3 A^{\alpha\beta\gamma\delta}/12$.

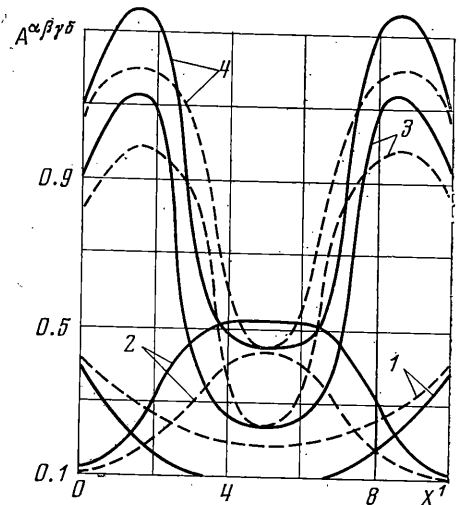
Как показали расчеты и сравнение с экспериментальными данными, эти соотношения практически выполняются уже при $K \geq 7$. Сформируем многослойный пакет в виде множества пар элементарных слоев, причем используем слой трех типов: слой под углом 0° , под углом $\pm\beta$, переменным по длине оболочки ($\beta \in [0; \pi/2]$) и под углом 90° . В этом случае в осях оболочки имеем макрооднородный ортотропный материал. Путем управления структурными параметрами материала можно достичь желаемого изменения жесткости оболочки.

3. Численные расчеты проводились для оболочки со следующими параметрами: $L=100$ см, $R=100$ см, $\nu_a=0.21$, $\nu_c=0.35$, $E_a=860\,000$ кгс/см², $E_c=35\,000$ кгс/см², $\mu=0.6$, что соответствует данным стекло-эпоксидного композита. Наименьшее собственное значение $\omega_*(x)$ определялось при разных n . Наименьшее из полученных значений является критической собственной частотой.

При определении $\omega_*(x)$ были просчитаны 2 варианта с $N=10$ и с $N=20$. Так как полученные значения различались незначительно (приблизительно 3%), то оптимизация проводилась при $N=10$, и, таким образом, оптимизационная задача содержала 8 параметров оптимизации $x = \{h, \theta_1, \theta_2, \beta^1, \beta^2, \beta^3, \beta^4, \beta^5\}$, 6 гео-



Фиг. 1



Фиг. 2

метрических и структурных ограничений (1.2) и физическое ограничение (1.3).

Задача оптимизации решалась методом проекции градиента, причем использовались различные начальные точки x_0 в допустимой области. Из любой начальной точки x_0 во всех вариантах решения получен один и тот же вектор проекта x_* . Таким образом, с некоторой вероятностью можно утверждать, что рассматриваемая задача принадлежит к классу выпуклых задач и найденное локальное решение x_* совпадает с глобальным.

θ_1^*	θ_2^*	h^*	β^1	β^2	β^3	β^4	β^5	θ_1	θ_2	h	δ
0	0.33	0.813	31°	45°	66°	89°	90°	0.03	0.917	0.647	20%
0.165	0.835	0.737	33°	43°	58°	68°	88°	0.231	0.796	0.572	22%

Результаты оптимизации представлены в таблице, при $\omega=651$, заданная частота ($g\mu$); параметры со звездочкой θ_1^* , θ_2^* , h^* относятся к оптимальной однородной оболочке ($\beta_1=0^\circ$, $\beta_2=\beta=45^\circ$, $\beta_3=90^\circ$), а остальные — к оптимальной неоднородной оболочке; δ — выигрыш в весе в сравнении с оптимальной однородной оболочкой. В первой строке таблицы приведены данные для случая шарнирного опирания оболочек: $u=v=w=0$ при $x^1=0, L$. Во второй — для случая жесткого защемления: $u=v=w=-\partial w/\partial x^1=0$ при $x^1=0, L$.

При этом к граничным условиям добавляются условия симметрии: $u_2^{(5)} = (\partial w/\partial x^1)_2^{(5)} = 0$ (верхний индекс означает номер элемента, нижний индекс — номер узла в элементе).

(верхний индекс означает номер элемента, нижний индекс — номер узла в элементе).

Как видно из таблицы, выигрыш в весе при использовании переменного угла армирования по сравнению с оптимальной оболочкой при постоянном угле армирования в зависимости от граничных условий составляет 20–22%.

На фиг. 1 представлены траектории для угла намотки β , а на фиг. 2 — соответствующие траектории для компонент тензора жесткости. Сплошные кривые соответствуют случаю шарнирного опирания, а пунктирные — случаю жесткого защемления. Кривые 1, 2, 3, 4 на фиг. 2 относятся соответственно к компонентам $A^{1111}/10^6$, $A^{2222}/10^6$, $A^{1122}/10^5$, $A^{1212}/10^5$. Траектории получены путем соединения значений переменных в середине конечного элемента.

Из анализа траекторий следует, что компонента тензора жесткости A^{1111} как в случае шарнирного опирания, так и в случае жесткого защемления имеет наибольшее значение у опор. Это означает, что опора оболочки в основном работает на изгиб в направлении x^1 . Коэффициент A^{2222} принимает экстремальное значение в средней части оболочки, т. е. эта часть работает в основном на изгиб в направлении окружности. Для модуля сдвига A^{1212} точка экстремума находится в интервале $0.2 \div 0.25 L$ от опор. В этих местах стенка оболочки при деформировании работает на сдвиг и кручение.

Заметим, что траектории для коэффициентов жесткости качественно согласуются с траекториями модулей упругости большеберцовой кости человека, определенных экспериментально в [10, 11]. Таким образом, применяя при проектировании конструкции те принципы (в данном случае неоднородность материала), которые лежат в основе конструкций, созданных природой путем эволюции, удается улучшить качество, т. е. уменьшить вес конструкции.

Поступила 12 VII 1976.

ЛИТЕРАТУРА

1. Prager W. On a problem of optimal design. In: Non-homogeneity in elasticity and plasticity. New York — London — Paris. Pergamon Press, 1959.
2. Брызгалов Г. И. К рациональному проектированию анизотропных плоских тел со слабым связующим. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 4.
3. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М., «Наука», 1975.
4. Рикардс Р. Б., Тетерс Г. А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига, «Зинатне», 1974.
5. Петрова И. С., Рикардс Р. Б. Оптимизация стержня с переменным модулем упругости. Механика полимеров, 1974, № 2.
6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., «Мир», 1975, стр. 541.
7. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М., «Наука», 1974.
8. Sanders J. L. Non-linear theories for thin shells. Quart. Appl. Math., 1963, vol. 21, No. 1, p. 21—36.
9. Navaratna D. R., Pian T. H. H., Witner E. A. Stability analysis of shells of revolution by the finite-element method. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 2. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 2.)
10. Кнегс И. В., Пфафрод Г. О., Саулгозис Ю. Ж. и др. Деформативность и прочность компактной костной ткани при кручении. Механика полимеров, 1973, № 5.
11. Кнегс И. В., Саулгозис Ю. Ж., Янсон Х. А. Деформативность и прочность компактной костной ткани при растяжении. Механика полимеров, 1974, № 3.