

О ВЛИЯНИИ ПОДКРЕПЛЯЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ НА КОЭФФИЦИЕНТ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ВЕРШИНЕ ОСТРОЙ ТРЕЩИНЫ

А. А. МОВЧАН

(Москва)

Методом конечных элементов решается задача о подкрепленной пластинке с трещиной при плоском напряженном состоянии. Исследуются различные способы передачи нагрузки на пластинку. Получено, что наиболее безопасным является нагружение пропорционально жесткостям элементов. В случае равномерного нагружения обнаружено явление конструкционного охрупчивания.

1. Подкрепляющие элементы в виде прямолинейных ребер жесткости оказывают существенное влияние на зависимость коэффициента интенсивности напряжений от длины трещины. В [1-3] установлено, что подкрепляющий элемент, перпендикулярный линии трещины, может сделать ее развитие устойчивым на определенном диапазоне длин трещины. В этих работах рассматривалась бесконечная пластина с центральной трещиной, растягиваемая на бесконечности. Влияние подкрепляющего элемента моделировалось действием сосредоточенных сил, величина которых задавалась и не менялась с продвижением трещины. В [4] учитывалась упругость подкрепляющих элементов, а величина сосредоточенных сил находилась из решения задачи. Однако полученные решения справедливы лишь для случая, когда длина трещины и расстояние между ребрами жесткости много меньше размеров пластины.

Кроме того, в данной упрощенной постановке задачи не учитывалось влияние таких факторов, как способ передачи нагрузки на пластину и сопротивление изгибу подкрепляющих элементов. Поэтому в данной работе задача решается численно при помощи метода конечных элементов. Скорость высвобождения упругой энергии G и коэффициент интенсивности напряжений K_I вычисляются при помощи метода податливости [5]

$$G = -\partial P / \partial a, K_I = \sqrt{EG} \quad (1.1)$$

где P — значение функционала Лагранжа для тела с трещиной, a — длина трещины, E — модуль упругости. Величина $P(a)$ определяется для ряда последовательных длин трещины, после чего G в первом соотношении (1.1) находится через центральные конечные разности.

2. Для дискретизации плоской задачи теории упругости (плоское напряженное состояние) применялись треугольные конечные элементы с линейным распределением смещений. Энергия деформаций элементов равна [6]:

$$U = \frac{ES}{2(1-\nu^2)} (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu\epsilon_x\epsilon_y + 2(1-\nu)\epsilon_{xy}^2) \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2S} \sum_{i=1}^3 A_i u_i, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2S} \sum_{i=1}^3 B_i v_i, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{4S} \sum_{i=1}^3 B_i u_i + A_i v_i \quad (2.2)$$

$$A_1 = y_2 - y_3, \quad A_2 = y_3 - y_1, \quad A_3 = y_1 - y_2$$

$$B_1 = x_3 - x_2, \quad B_2 = x_1 - x_3, \quad B_3 = x_2 - x_1$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ — компоненты тензора деформаций; S — площадь треугольного элемента; x_i, y_i — декартовы координаты узлов элемента, занумерованных против часовой стрелки; u_i, v_i — компоненты вектора узловых смещений в той же системе координат; v — коэффициент Пуассона.

Для решения дискретной задачи модифицированным методом сопряженных градиентов [7] достаточно уметь вычислять градиент энергии деформаций по узловым смещениям для всего упругого тела. Из (2.1) и (2.2) получаются следующие выражения для градиента энергии деформаций треугольного элемента:

$$\partial U / \partial u_i = 1/2 (A_i \sigma_x + B_i \sigma_{xy}), \quad \partial U / \partial v_i = 1/2 (B_i \sigma_y + A_i \sigma_{xy}) \quad (2.3)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ — компоненты тензора напряжений в треугольном элементе, получающиеся из деформаций (2.2) по обычному закону Гука для плоского напряженного состояния.

Компоненты градиента энергии деформаций в каждом узле для системы элементов вычисляются путем суммирования соответствующих производных, вычисленных по (2.3) только для треугольников, имеющих данный узел вершиной.

Предполагается, что энергия деформаций подкрепляющего элемента в виде прямолинейного ребра жесткости состоит из энергии деформаций растяжения и изгиба. Для вычисления градиента энергии деформации растяжения ребро жесткости делится на конечные элементы с линейным распределением продольных смещений. Энергия деформаций такого элемента имеет вид

$$U = \Omega E_1 (v_{i+1} - v_i)^2 / l \quad (2.4)$$

Здесь E_1, Ω — модуль упругости материала ребра жесткости и площадь его поперечного сечения; l — длина элемента; v_{i+1}, v_i — продольные смещения узловых точек элемента. Для энергии изгиба аналогично получим

$$U = 1/2 I E_1 (w_{i+1} + w_{i-1} - 2w_i)^2 / l^3 \quad (2.5)$$

Здесь I — момент инерции ребра жесткости в плоскости пластины, w_{i+1}, w_{i-1}, w_i — узловые поперечные смещения. Из (2.4) и (2.5) определяются компоненты градиента энергии деформаций подкрепляющего элемента

$$\partial U / \partial v_i = E_1 \Omega (2v_i - v_{i+1} - v_{i-1}) / l$$

$$\partial U / \partial w_i = E_1 I (w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}) / l^3$$

которые в процессе решения задачи суммируются с соответствующими компонентами градиента энергии деформаций пластины.

3. При помощи метода конечных элементов задача минимизации функционала Лагранжа сводится к дискретной задаче нахождения минимума функции многих переменных вида

$$P(\mathbf{x}) = 1/2 \mathbf{x}^T [K] \mathbf{x}^T - \mathbf{F} \mathbf{x}^T = \min_{\mathbf{x}} \quad (3.1)$$

где $[K]$ — положительно-определенная матрица жесткости системы элементов, аппроксимирующих упругое тело, x — искомый вектор-строка узловых перемещений, знак T в верхнем индексе означает операцию транспонирования; F — заданный вектор узловых сил.

Матрица $[K]$ имеет ленточную структуру с весьма слабо заполненной лентой. Для достаточно точного решения задач с сильно изменяющейся плотностью энергии деформаций (каковыми являются задачи о трещинах) необходимо брать густую сетку конечных элементов, что приводит к матрице $[K]$ большой размерности. С этим связаны две основные трудности в решении таких задач методом конечных элементов: хранение ленты матрицы $[K]$ требует большого объема памяти машины, и само решение занимает много машинного времени.

Существующие универсальные алгоритмы решения (3.1) (метод Гаусса, метод сопряженных градиентов и т. д.) построены весьма нераационально в отношении этих двух аспектов — в них сложно учесть редкую заполненность ленты матрицы $[K]$. Однако метод сопряженных градиентов можно так модифицировать, чтобы устранить эти недостатки [7].

Метод сопряженных градиентов [8] существует в двух модификациях, различающихся по тому, как решается задача одномерной минимизации функции (3.1) в направлении, задаваемом вектором D :

$$\min_{\gamma} P(x + \gamma D) \tag{3.2}$$

В первом варианте (3.2) решается численно, что значительно экономит память машины, но существенно удлиняет время счета. Второй вариант считает гораздо быстрее, так как значение γ для (3.2) находится по конечным формулам, однако в эти формулы входят операции умножения векторов на матрицу $[K]$.

Поэтому при использовании второй модификации необходимо хранить в памяти машины ленту матрицы, состоящую в основном из нулей, и проводить много лишних действий с этими нулями. Этого можно избежать, если заменить умножение матрицы $[K]$ на вектор вычислением градиента квадратичной части $P_1(x) = x[K]x^T$ функции $P(x)$ (3.1), поскольку для произвольного вектора y выполняется соотношение

$$\text{grad } P_1(y) = [K]y^T \tag{3.3}$$

После такой замены система ортогональных R и сопряженных D векторов вместе с искомым вектором решения x задачи (3.1) вычисляются в следующем итерационном процессе [7]:

$$R^{i+1} = R^i - \gamma \text{ grad } P_1(D^i), \quad x^{i+1} = x^i + \gamma D^i \tag{3.4}$$

$$\gamma = \frac{\|R^i\|^2}{\|D^i\|_k^2}, \quad D^{i+1} = R^{i+1} + \beta D^i$$

$$\beta = \frac{\|R^{i+1}\|^2}{\|R^i\|^2}, \quad \|D^i\|_k^2 = (D^i, \text{ grad } P_1(D^i))$$

Здесь $\|D^i\|$ — обычная евклидова норма вектора, $\|D^i\|_k$ — норма в энергетическом пространстве, связанном с положительно-определенной матрицей $[K]$, круглые скобки означают скалярное произведение векторов.

Поскольку вектор невязки $R = F - \text{grad } P_1(x)$ на любом шаге итерационного процесса (3.4) ортогонален соответствующему приближению искомого вектора x , то, начиная с первой итерации при нулевом начальном приближении, выполняется дискретный аналог теоремы Клайперона: $\|x\|_k^2 = (F, x)$. Поэтому минимальное значение $P(x)$ в (3.1), которое подставляется в (1.1), вычисляется по формуле $P = -0.5(F, x)$ без дополнительной

потери точности при неточном определении минимизирующего вектора x .

Этот факт весьма важен, поскольку процесс минимизации (3.1) по значению функции сходится быстрее, чем по компонентам минимизирующего вектора.

Для оценки точности и скорости сходимости процесса (3.4) была решена задача о растяжении напряжением σ , перпендикулярным оси трещины симметричной квадратной пластинки толщиной h , размерами $w \times w$ с центральной трещиной длины $2a$ на различных регулярных сетках конечных элементов размерности $r \times r$.

При использовании таких сеток максимальное число ненулевых элементов в каждой строке ленты матрицы $[K]$ не зависит от r (в данной задаче оно равно 14). Результаты решения приведены ниже:

r	N	M	λ	δ	μ
7	84	56	8.14	0.09	0.36
9	144	73	8.11	0.071	0.355
11	220	90	8.18	0.06	0.36
13	312	108	8.3	0.052	0.364
15	420	124	8.27	0.045	0.36
17	544	139	8.17	0.04	0.36
21	840	173	8.24	0.033	0.363
25	1200	208	8.32	0.027	0.351

Метод сопряженных градиентов для решения задачи (3.1) в отсутствие ошибок округления должен сходиться к точному решению задачи не более, чем за N итераций, где N — число неизвестных [8].

В третьем столбце приведены значения числа итераций M , необходимые для получения минимального значения $P(x)$ с машинной точностью (восемь значащих цифр) для различных сеток, размерность которых указана в первом столбце, а число неизвестных — во втором столбце. Как видно, M значительно меньше N и коррелирует не с N , а пропорционально $r \approx \sqrt{0.5N}$

$$M = \lambda r \quad (3.5)$$

Значения $\lambda = M/r$ приведены в четвертом столбце. Численные эксперименты показывают, что зависимость (3.5) свойственна задачам (3.1) с независимым от r максимальным числом ненулевых элементов в каждой строке ленты $[K]$; коэффициент λ зависит от вида задачи (для задач рассматриваемого типа $\lambda = 8.3$).

Число арифметических операций, которое необходимо выполнить на одной итерации (3.4), пропорционально r^2 ; следовательно, общее число арифметических операций, необходимое для решения (3.1), будет с учетом (3.5) пропорционально r^3 . В то же время, число операций, необходимое для решения задачи (3.1) методом Гаусса при работе с лентой $[K]$, пропорционально r^4 ; для обычного метода сопряженных градиентов число операций также пропорционально r^4 . Это свидетельствует о преимуществе в быстрейшем процессе (3.4) перед стандартными методами решения (3.1) для задач, дискретизированных при помощи метода конечных элементов.

Что касается необходимого объема памяти, то процесс (3.4) требует $8r^2$ ячеек, в то время как оба упомянутых выше метода используют $16r^2$ ячеек только для хранения в памяти одного блока ленты матрицы $[K]$.

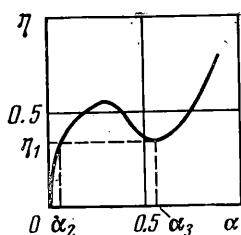
Даже если дискретная задача (3.1) решена точно, результирующее значение функционала Лагранжа будет занижено по абсолютной величине по сравнению с точным за счет ошибок самой дискретизации.

В пятом столбце приведены значения относительных ошибок δ в вычислении K_I на соответствующих сетках при $a/w = 0.5$. За точное принималось значение K_I , полученное в [9] методом граничных коллокаций.

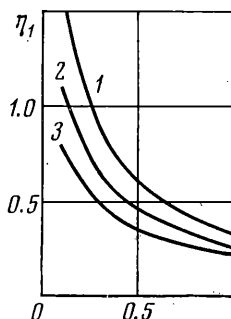
Во многих работах, посвященных вычислению K_I методом податливости, высказывалось предположение о том, что ошибка в вычислении K_I определяется количеством узлов Q конечно-элементной сетки, расположенных на берегу трещины. В шестом столбце приведены значения величины $\mu = Q\delta$. Сравнительное постоянство этой величины позволяет утверждать, что, по крайней мере, для сеток рассматриваемого вида выполняется равенство $\delta = \mu/Q$, где $\mu = \text{const}$.

Как видно из приведенных результатов численного эксперимента, для получения достаточно точного решения на равномерной сетке необходимо решать задачу большой размерности. Численные эксперименты показали, что сгущением сетки у вершины трещины можно значительно улучшить точность решения, особенно для коротких трещин. В частности, за счет местного сгущения на сетке с $N=220$ можно получить K_I с точностью в пределах $\delta=0.06$, что соответствует решению на равномерной сетке размерностью 21×21 с $N=840$. Во всех дальнейших исследованиях использовались именно такие сетки.

4. При помощи описанной процедуры были построены диаграммы зависимости безразмерного коэффициента интенсивности напряжений $\eta = K_I / (\sigma \sqrt{w})$ от безразмерной длины трещины $\alpha = a / w$. Предполагается,



Фиг. 1



Фиг. 2

что пластина подкреплена по всей ее длине двумя симметрично расположенными ребрами жесткости с площадью поперечного сечения Ω ($\omega = \Omega / (hw)$), моменты инерции ребер равны I ($i = 1000I / (hw^3)$). Подкрепляющие элементы перпендикулярны линии трещины и отстоят от оси симметрии пластины на расстоянии a_1 ($\alpha_1 = a_1 / w$).

Типичная кривая $\eta(\alpha)$ для $\alpha_1=0.4$, $\omega=0.7$, $i=0.1$ приведена на фиг. 1. Эта кривая делит плоскость параметров (α, η) на три области.

Если точка (α, η_c) , где $\eta_c = K_c / (\sigma \sqrt{w})$, находится в области *A* над кривой $\eta(\alpha)$, то такая трещина развиваться не будет. Область *B*, лежащая ниже прямой $\eta = \eta_1$, и кривой $\eta = \eta(\alpha)$, представляет область катастрофического разрушения.

Если же точка (α, η_c) находится в области *C*, то длина трещины будет увеличиваться, пока точка, описывающая состояние системы, не встретит падающий участок кривой $\eta(\alpha)$. Здесь трещина остановится и при небольшом увеличении нагрузки будет развиваться устойчиво. Следовательно, при переходе η через η_1 критическая длина трещины скачком меняется от малого значения α_2 до α_3 .

На фиг. 2 приведены графики зависимости η_1 от α_1 и ω . Кривая 1 соответствует $\alpha_1=0.7$, 2 — $\alpha_1=0.5$, 3 — $\alpha_1=0.3$. При уменьшении α_1 значение η_1 уменьшается, однако при этом уменьшаются размеры области *C*; меньше становится скачок критических длин трещины $\alpha_3 - \alpha_2$, получающийся при переходе η через η_1 . При приближении α_1 к единице область *C* также уменьшается, а η_1 увеличивается. При помощи графика, изображенного на фиг. 2, можно подбирать параметры подкрепляющего элемента так, чтобы для заданных σ и K_c выполнялось условие $\eta_c > \eta_1$.

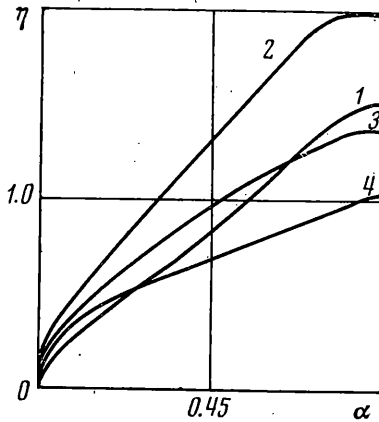
Вид кривой $\eta = \eta(\alpha)$ зависит от способа передачи нагрузки на пластину. Предыдущие результаты относятся к равномерному нагружению. На фиг. 3 приведены кривые $\eta = \eta(\alpha)$ для $\alpha_1=1$, $\omega=0.7$ при различных способах передачи нагрузки.

Кривая 1 соответствует распределению нагрузки по горизонтальным кромкам образца пропорционально жесткостям элементов. При этом в отсутствие трещины деформации всех элементов пластины и ребер жесткости одинаковы. Такое нагружение часто реализуется в элементах конструкций.

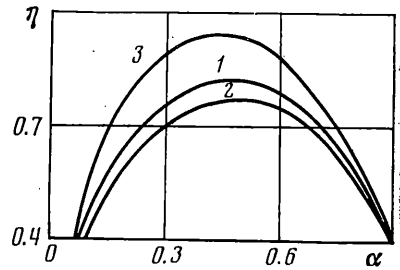
Кривые 2, 3, 4 соответствуют приложению нагрузки через параллельный трещине подкрепляющий элемент с $i=0, 100, 1000$ соответственно. Из графика следует, что для коротких трещин выгоднее всего нагружение пропорционально жесткостям, однако при наличии трещин средней длины нагружение через достаточно мощный поперечный подкрепляющий элемент безопаснее.

В задачах о разрушении упругопластических тел весьма важным является вопрос о том, как при данной длине трещины произойдет потеря несущей способности, за счет квазихрупкого разрушения или вследствие общей текучести.

Если трещина достаточно коротка или мало неразрушенное сечение, то



Фиг. 3



Фиг. 4

будет реализовываться второй из указанных механизмов. Для промежуточных длин трещины в пластинках достаточно больших размеров будет иметь место квазихрупкое разрушение. Границу между этими областями можно найти из условия равенства разрушающих напряжений, полученных по обоим критериям.

Если σ_1 — напряжение в ребре жесткости, то $\sigma_1/\sigma_0 = K(\alpha)$. Здесь $K(\alpha)$ меняется с изменением α , ω , но не зависит в силу линейности задачи от σ_0 . Из условия равновесия верхней части пластины получим

$$\sigma_3 = \frac{\sigma(1-K(\alpha)\omega)}{1-\alpha}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{w-a} \int_a^w \sigma_y(x,0) dx \quad (4.1)$$

Полагая в (4.1) $\sigma_3 = \sigma_s$, где σ_s — предел текучести материала пластины, находим значение приложенного напряжения σ_1 , при котором все неразрушенное сечение переходит в пластическую область

$$\sigma_1 = [(1-\alpha)\sigma_s] / [1-K(\alpha)\omega]$$

Предельное значение приложенного напряжения σ_2 по критерию квазихрупкого разрушения $K_1 = K_c$ определяется по формуле $\sigma_2 = w^{-1/2} K_c / \eta(\alpha)$.

Приравнявая σ_1 и σ_2 , получим уравнение искомой границы

$$K_c / \sigma_s \sqrt{w} = \eta = [\eta(\alpha)(1-\alpha)] / [1-K(\alpha)\omega] \quad (4.2)$$

Численный анализ кривых (4.2) для случая $\alpha_1 = 1$ показывает, что при равномерном нагружении с увеличением ω интервал значений α , соответствующих квазихрупкому разрушению, увеличивается. Это явление можно классифицировать как конструкционное охрупчивание пластины.

В то же время при нагружении пропорционально жесткостям элементов подобное явление не имеет места, различие между кривыми для $\omega = 0.1$ и $\omega = 0.7$ не превосходит 1%. На фиг. 4 приведены графики кривых (4.2). Кривые 1 и 2 соответствуют равномерному нагружению с ω , равными соответственно 0.1 и 0.7, кривая 3 — нагружению пропорционально жесткостям.

Таким образом, при нагружении пропорционально жесткостям меньше предельная нагрузка для фиксированной длины трещины и уже интервал квазихрупкого

разрушения. Кроме того, при таком нагружении увеличение мощности подкрепляющих элементов не приводит к охрупчиванию пластины.

Автор весьма признателен Ю. Н. Работнову за полезные замечания, высказанные при обсуждении работы.

Поступила 12 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов Е. А., Паргон В. З. О влиянии подкрепляющих элементов на распространение трещин. ПМТФ, 1961, № 5.
2. Паргон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. М., «Наука», 1974.
3. Bloom J. M., Sanders I. L. The effect at a riveted stringer on the stress in a cracked sheet. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1966, vol. 33, No. 3. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1966, т. 33, № 3.)
4. Черепанов Г. П., Мирсалимов В. М. О воздействии ребер жесткости на развитие трещины. Изв. АН АзербССР. Сер. физ.-техн. наук, 1969, № 1.
5. Watwood V. B. The finite element method for prediction of crack behavior. Nuclear Engng and Design, 1969, vol. 11, No. 2.
6. Кудрявцев Б. А., Паргон В. З., Песков Ю. А., Черепанов Г. П. О локальной пластической зоне вблизи конца щели. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 1.
7. Fried I. A gradient computational procedure for the solution of large problems, arising from the finite element method. Internat. J. Num. Meth. Engng, 1970, vol. 2, No. 4.
8. Поллак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. М., «Мир», 1974.
9. Bowie O. L., Neal D. M. A note on the central crack in a uniformly stressed strip. Engng Fracture Mech., 1970, vol. 2, No. 2.