

О НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ ГЛАДКОЙ ТРУБЫ И СОСНОГО БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО СЛОИСТОГО ЦИЛИНДРА

В. Н. ГАВРИЛКИН, А. К. ПРИВАРНИКОВ

(Днепропетровск)

При нагружении составного цилиндра по конечному участку боковой поверхности внутренним или внешним давлением может нарушаться контакт между его отдельными (слабо сцепленными) коаксиальными слоями [1, 2]. Результаты численных расчетов показывают, что нарушение контакта происходит, как правило, между теми соседними слоями, ближайший из которых к нагруженной боковой поверхности цилиндра имеет меньшую жесткость на изгиб, чем более удаленный. Возникает задача об определении областей контакта смежных слоев составного цилиндра и контактных давлений на них.

Работа посвящена решению задачи такого типа в следующей постановке. На конечном участке внутренней поверхности бесконечного слоистого цилиндра приложена осесимметричная нормальная нагрузка, внешняя поверхность цилиндра не нагружена. Начальные напряжения и массовые силы отсутствуют. Первый внутренний слой составного цилиндра может отставать от следующего, трения между ними нет. Между другими слоями реализуется либо условие полного сцепления, либо условие свободного проскальзывания без отставания в обоих случаях. Любой коаксиальный слой цилиндра, являясь однородным и изотропным, имеет постоянную толщину. Считая известным число поясов контакта первого слоя со вторым, надо определить их границы и контактные напряжения.

Рассматриваемая задача сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода с неизвестными пределами интегрирования. Сформулированы условия, которым должно удовлетворять решение этого уравнения.

1. Пусть в бесконечный n -слойный цилиндр $r_1^i \leq r \leq r_n^e$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, $-\infty < z < \infty$ свободно без зазора вставлена гладкая упругая однородная и изотропная труба $r_0^i \leq r \leq r_0^e$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, $-\infty < z < \infty$ постоянной толщины h .

К конечной системе поясов $a_i \leq z \leq b_i$ ($i=1, 2, \dots, N$) внутренней поверхности трубы приложена осесимметричная нормальная нагрузка $q(z)$. В области меридионального сечения совокупность участков контакта трубы с многослойным цилиндром обозначим S

$$S = \bigcup_{h=1}^m [s_h, l_h] \quad (-\infty < s_1 < l_1 < \dots < s_m < l_m < \infty) \quad (1.1)$$

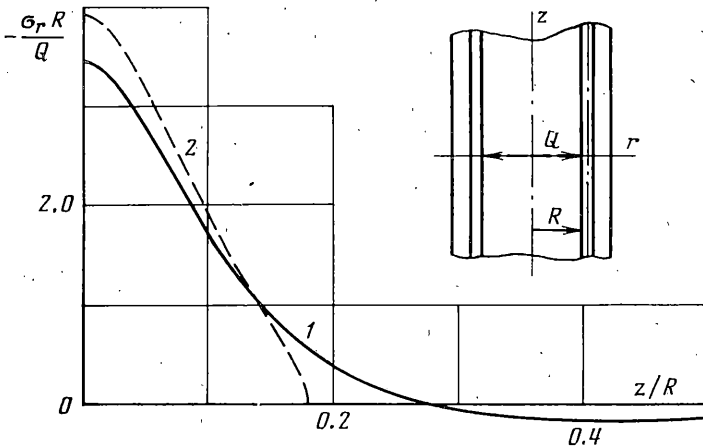
Укажем один из способов отыскания числа участков контакта. Необходимо решить задачу (для заданных граничных условий) с учетом двусторонней связи между трубой и цилиндром, определив нормальные напряжения σ_r на поверхности их контакта. Число m участков, где найденные напряжения σ_r отрицательны, в первом приближении будет соответствовать искомому количеству зон контакта при односторонней связи трубы с цилиндром (методика определения напряженного состояния многослойных цилиндров описана в [3]).

В качестве примера на фигуре приведен график распределения нормальных напряжений на наружной поверхности трубы, помещенной в цилиндр и нагруженной изнутри сосредоточенным радиальным усилием интенсивности Q (кривая 1). В этом примере $m=1$ и, как показывают расчеты, отставание наблюдается в случае, когда

$$[G_0 h_0^3 (1-\nu_1)] [G_1 h_1^3 (1-\nu_0)]^{-1} < 1,$$

где h_i , G_i , ν_i — соответственно толщина, модуль сдвига и коэффициент Пуассона трубы ($i=0$) и цилиндра ($i=1$).

Считая известным число участков контакта, перейдем к решению более сложной задачи — определению их границ и контактных напряжений.



Условимся в дальнейшем функции, переменные и константы, относящиеся к k -му слою цилиндра, снабжать индексом k , а у соответствующих величин, относящихся к трубе, индекс опускать.

Отнесем каждый коаксиальный слой рассматриваемого тела к местной системе безразмерных цилиндрических координат

$$\rho = \frac{r-R}{R}, \quad \xi = \frac{z}{R} \quad (-\lambda \leq \rho \leq \lambda, \quad -\infty < \xi < \infty) \quad (1.2)$$

$$\rho_k = \frac{r-R_k}{R_k}, \quad \xi_k = \frac{z}{R_k} \quad (-\lambda_k \leq \rho_k \leq \lambda_k, \quad -\infty < \xi_k < \infty)$$

где R , $\lambda = h/2R$ — радиус срединной поверхности и относительная полутолщина трубы.

Условия сопряжения трубы с цилиндром запишем в виде (штрих обозначает дифференцирование по ξ)

$$u_1'(-\lambda_1, \xi) = u'(\lambda, \xi), \quad \xi \in S \quad (1.3)$$

$$\tau_{rz}(-\lambda_1, \xi) = \tau_{rz}(\lambda, \xi) = 0 \quad (-\infty < \xi < \infty) \quad (1.4)$$

$$-\sigma_r(-\lambda_1, \xi) = \sigma_r(\lambda, \xi) = -q_c(\xi), \quad \xi \in S; \quad \sigma_r(-\lambda_1, \xi) = \sigma_r(\lambda, \xi) = 0, \quad \xi \in S \quad (1.5)$$

Здесь $q_c(\xi)$ — искомое контактное давление.

Чтобы удовлетворить условию (1.3), необходимо иметь формулы для производных по переменной ξ от радиальных перемещений точек внутренней поверхности многослойного цилиндра и наружной поверхности гладкой трубы. Для составного цилиндра, внешняя поверхность которого не на-

гружена, а на поверхности $\rho_1 = -\lambda_1$ напряжение $\sigma_r(\xi_1) = -q_1(\xi_1)$ при $\xi_1 \in S_1$ и $\tau_{rz}(\xi_1) = 0$ для $-\infty < \xi_1 < \infty$, согласно [2] имеем

$$\frac{2\pi G_1}{\kappa_1 R_1} u_1'(-\lambda_1, \xi_1) = \int_{S_1} \frac{q_1(x) dx}{x - \xi_1} - \frac{1}{\kappa_1} \int_{S_1} q_1(x) F_1(x - \xi_1) dx$$

$$F_1(t) = \int_0^{\infty} [\kappa_1 - L_n(p)] \sin ptdp, \quad \kappa_1 = 2(1 - \nu_1) \quad (1.6)$$

где $L_n(p)$ — известная функция, отражающая конструктивные особенности n -слойного цилиндра и характеризующая способность его к деформированию в радиальном направлении (функция податливости).

Как в случае гладких слоев, так и при полном их сцеплении функция $L_n(p)$ — непрерывная, ограниченная вместе со своими производными любого порядка на полуоси $p \geq 0$, т. е. $L_n(p) \in C^\infty[0, \infty)$.

Далее $L_n(p) = O(p)$ при $p \rightarrow 0$, $L_n(p) = \kappa_1 + O(p^{-1})$ при $p \rightarrow \infty$.

Отметим, что первый интеграл в правой части (1.6) понимается в смысле главного значения по Коши.

Чтобы построить аналогичную формулу для трубы, рассмотрим предварительно случай нагружения граничных поверхностей $\rho = -\lambda$ и $\rho = \lambda$ соответственно радиальными кольцевыми сосредоточенными усилиями Q и P . Пусть нагрузка Q приложена в сечении $\xi = \xi$, а P — в сечении $\xi = \eta$. Используя методику и результаты [2, 3], получим следующее выражение для $u'(\lambda, \xi)$:

$$u'(\lambda, \xi) = \frac{P}{2\pi G} \left[\frac{\kappa}{\xi - \eta} - F(\xi - \eta) \right] - \frac{\kappa Q}{2\pi G} T(\xi - \xi) \quad (1.7)$$

$$F(t) = \int_0^{\infty} [\kappa - L(p)] \sin ptdp, \quad T(\tau) = \int_0^{\infty} \alpha Z(p) \sin p\tau dp, \quad Z(p) = \frac{E(p)}{D(p)}$$

$$L(p) = \kappa \beta B(p) / D(p), \quad E(p) = \beta Y_{10} - \alpha Y_{01}$$

$$D(p) = (\kappa + \alpha^2) A(p) + (\kappa + \beta^2) (\alpha^2 Y_{01}^2 - 1) - \alpha^2 \beta^2 Y_{00}^2$$

$$A(p) = \beta^2 Y_{10}^2 - (\kappa + \beta^2) Y_{11}^2 - 1, \quad B(p) = (\kappa + \alpha^2) Y_{11}^2 - \alpha^2 Y_{01}^2 + 1$$

$$Y_{ij} = I_i(\alpha) K_j(\beta) - (-1)^{i+j} I_j(\beta) K_i(\alpha) \quad (i, j=0, 1)$$

$$\alpha = p(1 - \lambda), \quad \beta = p(1 + \lambda), \quad \kappa = 2(1 - \nu)$$

где $I_i(x)$, $K_i(x)$ — соответственно функции Бесселя мнимого аргумента и функции Макдональда. Свойства этих функций позволяют установить, что $Z(p) > 0$ при $p \geq 0$, кроме того

$Z(p) \in C^\infty[0, \infty)$, $Z(p) = O(1)$ при $p \rightarrow 0$; $Z(p) = O(e^{-sp})$ при $p \rightarrow \infty$, $s > 0$

На основании принципа независимости действия сил полученный результат легко обобщить на случай произвольного закона нормального нагружения боковых поверхностей гладкой трубы. Так, для граничных условий вида

$$\rho = -\lambda \quad \sigma_r(\xi) = \begin{cases} -q(\xi), & \xi \in S_0 \\ 0, & \xi \in S_0 \end{cases} \quad S_0 = \bigcup_{i=1}^N [a_i, b_i] \quad (1.8)$$

$$\rho = \lambda \quad \sigma_r(\xi) = \begin{cases} -q_1(\xi), & \xi \in S_1 \\ 0, & \xi \in S_1 \end{cases} \quad (1.9)$$

будем иметь

$$\frac{2\pi G}{\kappa R} u'(\lambda, \xi) = - \int_{s_1} \frac{q_1(\eta) d\eta}{\eta - \xi} + \frac{1}{\kappa} \int_{s_1} q_1(\eta) F(\eta - \xi) d\eta + \int_{s_0} q(\xi) T(\xi - \zeta) d\xi \quad (1.10)$$

Соотношения (1.6), (1.10) дают возможность составить интегральное уравнение задачи о неполном контакте трубы с многослойным цилиндром.

Пусть изнутри труба нагружена по закону (1.8). Удовлетворяя условиям (1.5), подставим выражения (1.6) и (1.10) в равенство (1.3). В итоге относительно искомой функции $q_c(\xi)$ получим сингулярное интегральное уравнение первого рода

$$\int_s \frac{q_c(\eta) d\eta}{\eta - \xi} - \Delta_1 \int_s q_c(\eta) K(\eta - \xi) d\eta = \kappa \Delta_1 g(\xi), \quad \xi \in S \quad (1.11)$$

$$K(x) = F(x) + \mu \frac{G}{G_1} F_1(\mu x), \quad \mu = \frac{R}{R_1}$$

$$g(\xi) = \int_{s_0} q(\xi) T(\xi - \zeta) d\xi, \quad \Delta_1 = \frac{G_1}{\kappa G_1 + \kappa_1 G}$$

При выводе уравнения (1.11) необходимо предварительно в (1.6) сделать замену $\zeta = \mu \zeta_1$, $\eta = \mu \eta$ и учесть, что $u' = \mu u'_1$.

В силу свойств функции $L_n(p)$ интегралы для $F_1(t)$ и $F(t)$ равномерно сходятся относительно $t \geq 0$, поэтому функции $F_1(t)$ и $F(t)$ являются непрерывными и дифференцируемыми, причем их производные конечны. Отсюда заключаем, что ядро $K(\eta - \xi)$ интегрального уравнения (1.11) удовлетворяет условию Гельдера по обоим переменным и, следовательно, для любой интегрируемой функции $q_c(\eta)$ интеграл

$$\int_s q_c(\eta) K(\eta - \xi) d\eta \in H_{\epsilon}^{-1}(S) \quad (\epsilon \geq 1)$$

где $H_r^{\gamma}(S)$ — класс функций, r -я производная которых удовлетворяет условию Гельдера с показателем $0 < \gamma \leq 1$ в области S .

Используя свойства функции $Z(p)$, аналогично доказывается, что $g(\xi) \in H_{\epsilon}^{-1}(S_0)$, $\epsilon \geq 1$. Таким образом, к сингулярному уравнению (1.11) можно применить метод регуляризации Карлемана — Векуа [4]. Разыскивая решение, ограниченное вблизи концов s_k, l_k ($k=1, 2, \dots, m$), в результате регуляризации приходим к следующему интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$\varphi(\xi) - \int_s \varphi(\eta) K_*(\xi, \eta) d\eta = \frac{\Delta_1 \kappa}{\pi^2} \int_s \frac{g(t) dt}{(t - \xi) X(t)}, \quad \xi \in S \quad (1.12)$$

$$\varphi(\xi) = \frac{q_c(\xi)}{X(\xi)}, \quad K_*(\xi, \eta) = \frac{\Delta_1}{\pi^2} X(\eta) \int_s \frac{K(t - \eta)}{(t - \xi) X(t)} dt$$

$$X(\xi) = i^{2m-2k+1} \prod_{h=1}^m |\xi - s_h|^{1/2} |\xi - l_h|^{1/2}, \quad \xi \in [s_k, l_k]$$

Поскольку индекс искомого решения уравнения (1.11) равен $-m$, то новая неизвестная функция $\varphi(\xi)$ должна удовлетворять условиям раз-

решимости этого уравнения [4]

$$\int_s \frac{\xi^k}{X(\xi)} \left[\kappa g(\xi) + \int_s \varphi(\eta) X(\eta) K(\eta - \xi) d\eta \right] d\xi = 0 \quad (k=0, 1, \dots, m-1) \quad (1.13)$$

Недостающие m условий для определения $2m$ границ участков контакта вытекают из очевидного факта: в области контакта должно выполняться равенство радиальных перемещений точек наружной поверхности трубы и соответствующих точек внутренней поверхности составного цилиндра. Отсюда следует, что

$$\int_{s_k}^{l_k} [u_1(-\lambda_1, \xi) - u(\lambda, \xi)] d\xi = 0 \quad (k=1, 2, \dots, m) \quad (1.14)$$

Приближенное решение уравнения (1.12) можно получить методом конечных сумм, заменяя интегралы по отрезкам $[s_k, l_k]$ квадратурными формулами наивысшей алгебраической степени точности с весовой функцией $(\xi - s_k)^{1/2} (l_k - \xi)^{1/2}$ [5]. Для вычисления несобственных интегралов в (1.6) и (1.7) удобно применить метод Файлона [6] или родственный ему метод [5].

Отметим, что задача о неполном контакте нагруженной извне трубы, в которую вложен составной цилиндр, решается аналогично.

2. Проиллюстрируем предлагаемую методику на примере нагружения трубы по окружности $\rho = -\lambda$, $\xi = 0$ усилием Q (Q — погонная нормальная нагрузка). Для определения границ участка контакта $[-l, l]$ и контактных напряжений $\sigma_r(\lambda, \xi)$ получим следующее интегральное уравнение:

$$\varphi(\xi) - \int_0^l \sqrt{l^2 - \eta^2} \varphi(\eta) K(\xi, \eta) d\eta = \omega(\xi), \quad \xi \in [0, l] \quad (2.1)$$

$$\varphi(\xi) = \sigma_r(\xi) R Q^{-1} (l^2 - \xi^2)^{-1/2} \quad (2.2)$$

$$\omega(\xi) = \frac{\Delta_1 \kappa}{\pi^2} \int_{-l}^l \frac{T(t) - T(\xi)}{(t - \xi) \sqrt{l^2 - t^2}} dt \quad (2.3)$$

$$K(\xi, \eta) = \frac{\Delta_1}{\pi^2} \int_{-l}^l \frac{\psi(t, \xi) - \psi(\xi, \eta)}{(t - \xi) \sqrt{l^2 - t^2}} dt \quad (2.4)$$

$$\psi(\tau, \xi) = F(\tau + \xi) + F(\tau - \xi) + \mu G \{F_1[\mu(\tau + \xi)] + F_1[\mu(\tau - \xi)]\} / G_1 \quad (2.5)$$

Так как область контакта симметрична, а функции $F(t)$, $F_1(t)$ и $T(\tau)$ четные, то условия (1.13) выполняются автоматически. Условие (1.14) принимает вид

$$\int_0^l \sqrt{l^2 - \eta^2} \varphi(\eta) v(\eta) d\eta = \kappa (1 - \lambda) \int_0^\infty \frac{Z(p)}{p} \sin pl dp \quad (2.6)$$

$$v(\eta) = \int_0^\infty \frac{L(p)}{p^2} [\sin p(l - \eta) + \sin p(l + \eta)] dp +$$

$$+ \mu \frac{G}{G_1} \int_0^\infty \frac{L_n(p)}{p^2} [\sin p\mu(l - \eta) + \sin p\mu(l + \eta)] dp$$

В уравнения (2.1) и (2.6) величина Q не входит, поэтому ширина пояса контакта трубы с цилиндром не зависит от интенсивности приложенной нагрузки.

Алгоритм решения задачи реализован в АЛГОЛ-программе, составленной для ЭВМ. В качестве соосных с трубой цилиндров рассматривались: гладкий цилиндр толщиной h_1 ($n=1$)

$$L_1(p) = \kappa_1(1-\lambda_1)pA_1(p)/D_1(p)$$

двуслойный цилиндр общей толщиной h_1 с одинаковыми гладкими слоями ($n=2$).

Для построения функции податливости $L_2(p)$ воспользуемся рекуррентной зависимостью, полученной в [3]:

$$L_2(p) = \kappa_1 \alpha_1 \frac{(Y_{11}^1)^2 D_2(p) + \Delta A_1(p) A_2(p)}{B_1(p) D_2(p) + \Delta D_1(p) A_2(p)}, \quad \Delta = \frac{\kappa_2 G_1}{\kappa_1 G_2}$$

Функции $A_k(p)$, $B_k(p)$, $D_k(p)$ и Y_{11}^1 определяются по формулам п. 1, в которых величины κ и λ необходимо заменить соответствующими параметрами для k -го слоя ($k=1, 2$).

С целью упрощения процесса численного решения задачи по заданной величине l определялось отношение G/G_1 . Значения функции $\varphi(\xi) (l^2 - \xi^2)^{1/2}$ вычислялись в семи точках отрезка $[0, l]$. Указанными точками являются узлы квадратурной формулы наивысшей алгебраической степени точности с весовой функцией Якоби $\zeta_0^{1/2} (\zeta_0 = 1 - \zeta/l)$.

При замене интегралов (2.3) и (2.4) квадратурными суммами использована весовая функция Якоби $(1-t_0^2)^{-1/2}$ для 20 узлов ($t_0 = t/l$).

G/G_1	$n=1$	$n=2$	$n=1$	$n=2$
0	1.025	1.025	5.20	5.20
0.5	1.097	1.061	4.32	4.26
1.0	1.134	1.080	3.72	3.68
1.5	1.156	1.092	3.30	3.25
2.0	1.173	1.102	2.98	2.93
2.5	1.186	1.109	2.70	2.64
3.0	1.197	1.114	2.46	2.42
3.5	1.206	1.118	2.28	2.24
4.0	1.212	1.121	2.11	2.08
5.0	1.218	1.126	1.87	1.84

Приведенные в таблице результаты вычислений для двух вариантов иллюстрируют зависимость значений параметра d (отношение полудлины площадки контакта к толщине трубы) и величины $\sigma_* = -\sigma_r(\lambda, 0)R/Q$ (в последних двух столбцах) от отношения G/G_1 в случае $\nu = \nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $h = 0.16R$, $h_1 = 0.6R_1$, $G_1/G_2 = 1$.

На фигуре представлены графики распределения нормальных напряжений по длине половины участка контакта трубы и однослойного цилиндра при полном (кривая 1) и неполном (кривая 2) контакте между ними. Кривые 1 и 2 соответствуют значениям $\nu = \nu_1 = 0.3$, $h = 0.16R$, $h_1 = 0.6R_1$, $G/G_1 = 0.85$.

Анализ результатов численных расчетов позволяет сделать следующие выводы.

Ширина пояса контакта трубы с цилиндром не может быть меньше двух толщин стенки трубы и в широком (представляющем практический интерес) диапазоне отношения G/G_1 изменяется незначительно.

Большему значению отношения G/G_1 при прочих неизменных параметрах соответствует больший по длине участок контакта и меньшее максимальное напряжение σ_r . При этом кривая распределения контактных давлений становится все более пологой (напряжения выравниваются).

Для одних и тех же значений ν , ν_1 и отношения G/G_1 с уменьшением h при сохранении значений h_1 и R_1 (или уменьшении h_1 при постоянных h и R) пояс контакта сужается, а максимальное напряжение σ_r увеличивается. Изменение этих величин происходит весьма медленно.

При фиксированных значениях h , h_1 , R и G/G_1 изменение величины коэффициента Пуассона сказывается слабо. Но характер этого влияния таков, что длина участка контакта будет большей при $\nu > \nu_1$ и меньшей при $\nu < \nu_1$. Причем с ростом отношения G/G_1 эта разность по абсолютной величине в первом случае медленно возрастает, а во втором — убывает.

Увеличение числа одинаковых гладких слоев в составном цилиндре при сохранении его общей толщины и значений h , R , ν , G/G_1 приводит к уменьшению длины участка контакта и почти не сказывается на величине максимальных контактных напряжений σ_r .

Поступила 14 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартыросян З. А. О контактных напряжениях осесимметрично нагруженного полого составного цилиндра. Изв. АН АрмССР. Механика, 1973, т. 26, № 4.
2. Гаврилкин В. Н., Петришин В. И. Осесимметричная контактная задача для бесконечного многослойного цилиндра с произвольным числом участков контакта. В сб.: Устойчивость и прочность элементов конструкций. Изд-во Днепропетровск. ун-та, 1973.
3. Гаврилкин В. Н. К вопросу о решении первой и второй основных граничных задач для многослойных цилиндров. В сб.: Устойчивость и прочность элементов конструкций. Изд-во Днепропетровск. ун-та, 1973.
4. Мухомелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968, стр. 512.
5. Крылов В. И., Шульгина А. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М., «Наука», 1966, стр. 372.
6. Грангер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. М., Изд-во иностр. лит., 1956, стр. 204.