МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1977

УДК 539.3

ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В. М. ДАРЕВСКИЙ

(Москва)

Приводится точное решение задачи об изгибе прямоугольной пластинки со свободными краями, лежащей на упругом винклеровском основании, под действием симметричной нагрузки. Оно является обобщением решения менее сложной задачи об изгибе квадратной пластинки, полученного в [1].

1. Пусть прямоугольная пластинка толщиной h лежит на упругом основании с коэффициентом постели k. Поместим начало прямоугольных координат x, y в центре пластинки; длины ее сторон, параллельных осям x, y, обозначим через $2a$, $2b$. Положим, что на пластинку действует нормальная нагрузка $q(x, y)$, симметричная относительно координатных осей.

При свободных краях пластинки ее прогиб w определяется из уравнения

$$w_{x^4}^{(4)}+2w_{x^2y^2}^{(4)}+w_{y^4}^{(4)}+(k/D)w=q/D \tag{1.1}$$

с учетом граничных условий

$$M_x|_{x=\pm a}=Q_x|_{x=\pm a}=M_y|_{y=\pm b}=Q_y|_{y=\pm b}=0 \tag{1.2}$$

Здесь D — цилиндрическая жесткость пластинки, M_x, M_y и Q_x, Q_y — изгибающие моменты и обобщенные перерезывающие усилия.

Введем безразмерные переменные $x_*=\pi x/a$, $y_*=\pi y/b$ и выразим при помощи известных формул M_x, M_y, Q_x, Q_y через w. Тогда вместо (1.1), (1.2) будем иметь (ν — коэффициент Пуассона)

$$w_{x_*^4}^{(4)}+2c^{-2}w_{x_*^2y_*^2}^{(4)}+c^{-4}w_{y_*^4}^{(4)}+k_*w=p \tag{1.3}$$

$$w_{x_*^2}''+\nu c^{-2}w_{y_*^2}''=0,\quad w_{x_*^3}'''+(2-\nu)c^{-2}w_{y_*^2x_*}'''=0 \quad \text{при} \quad x_*=\pm\pi \tag{1.4}$$

$$c^{-2}w_{y_*^2}''+\nu w_{x_*^2}''=0,\quad c^{-2}w_{y_*^3}'''+(2-\nu)w_{x_*^2y_*}'''=0 \quad \text{при} \quad y_*=\pm\pi$$

$$c=\frac{b}{a},\quad k_*=\frac{ka^4}{\pi^4D},\quad p=p(x_*,y_*)=\frac{k_*}{k}q\left(\frac{a}{\pi}x_*,\frac{b}{\pi}y_*\right)$$

Для определения w воспользуемся методом, изложенным в [2], полагая, что w удовлетворяет условиям его применимости при реальной нагрузке. Согласно [2] и с учетом симметрии задачи величина w находится при помощи двух представлений [1]

$$w=A_0+A_1x_*^2+A_2x_*^4+\sum_m a_m\cos mx_*+\sum_n c_n\cos ny_*+x_*^2\sum_n a_n^{(2)}\cos ny_*+$$
$$+x_*^4\sum_n a_n^{(4)}\cos ny_*+\sum_m\sum_n a_{mn}\cos mx_*\cos ny_* \tag{1.5}$$

[1] Индексы суммирования принимают значения $1, 2, \ldots$.

$$w=B_0+B_1y_*^2+B_2y_*^4+\sum_m b_m\cos mx_*+\sum_n d_n\cos ny_*+y_*^2\sum_m b_m^{(2)}\cos mx_*+$$
$$+y_*^4\sum_n b_m^{(4)}\cos mx_*+\sum_m\sum_n b_{mn}\cos mx_*\cos ny_*$$

Ряды с коэффициентами a_m, a_{mn} можно почленно дифференцировать четыре раза по x_*, а ряды с коэффициентами d_n, b_{mn} — по y_*; они позволяют определять соответственно $w(\pm\pi, y_*)$, $w_{x_*}'(\pm\pi, y_*)$, $w_{x_*^2}''(\pm\pi, y_*)$, $w_{x_*^3}'''(\pm\pi, y_*)$ и $w(x_*, \pm\pi)$, $w_{y_*}'(x_*, \pm\pi)$, $w_{y_*^2}''(x_*, \pm\pi)$, $w_{y_*^3}'''(x_*, \pm\pi)$.

Из (1.5) имеем

$$w_{x_*^2}''=2A_1+12A_2x_*^2-\sum_m m^2a_m\cos mx_*+2\sum_n a_n^{(2)}\cos ny_*+$$
$$+12x_*^2\sum_n a_n^{(4)}\cos ny_*-\sum_m\sum_n m^2a_{mn}\cos mx_*\cos ny_*$$
$$w_{y_*^2}''=2B_1+12B_2y_*^2-\sum_n n^2d_n\cos ny_*+2\sum_m b_m^{(2)}\cos mx_*+ \tag{1.6}$$
$$+12y_*^2\sum_m b_m^{(4)}\cos mx_*-\sum_m\sum_n n^2b_{mn}\cos mx_*\cos ny_*$$

Для определения смешанных производных, входящих в (1.3), (1.4), производные $w_{x_*^2}''$, $w_{y_*^2}''$ представим в другой форме [2]:

$$w_{x_*^2}''=C_0+C_1y_*^2+\sum_m \alpha_m\cos mx_*+\sum_n \gamma_n\cos ny_*+$$
$$+y_*^2\sum_m \alpha_m^{(2)}\cos mx_*+\sum_m\sum_n \alpha_{mn}\cos mx_*\cos ny_*$$
$$w_{y_*^2}''=D_0+D_1x_*^2+\sum_m \beta_m\cos mx_*+\sum_n \delta_n\cos ny_*+ \tag{1.7}$$
$$+x_*^2\sum_n \delta_n^{(2)}\cos ny_*+\sum_m\sum_n \beta_{mn}\cos mx_*\cos ny_*$$

Ряды с коэффициентами γ_n, α_{mn} можно дифференцировать почленно два раза по y_*, а ряды с коэффициентами β_m, β_{mn} — по x_*; они позволяют определять соответственно $w_{x_*^2}''(x_*, \pm\pi)$, $w_{x_*^2y_*}'''(x_*, \pm\pi)$ и $w_{y_*^2}''(\pm\pi, y_*)$, $w_{y_*^2x_*}'''(\pm\pi, y_*)$. Из (1.7) следует

$$w_{x_*^2y_*^2}^{(4)}=2C_1-\sum_n n^2\gamma_n\cos ny_*+2\sum_m \alpha_m^{(2)}\cos mx_*-$$
$$-\sum_m\sum_n n^2\alpha_{mn}\cos mx_*\cos ny_*$$

$$w^{(4)}_{y_*^2 x_*^2} = 2D_1 - \sum_m m^2 \beta_m \cos m x_* + 2\sum_n \delta_n^{(2)} \cos n y_* -$$
$$- \sum_m \sum_n m^2 \beta_{mn} \cos m x_* \cos n y_* \tag{1.8}$$

Полагая, что нагрузка может быть представлена двойным рядом Фурье, будем иметь

$$p = \frac{1}{2} p_0 + \sum_m p_m \cos m x_* + \sum_n q_n \cos n y_* + \sum_m \sum_n p_{mn} \cos m x_* \cos n y_*$$

Подставляя в уравнение (1.3) выражения для $w^{(4)}_{x_*^4}$, $w^{(4)}_{y_*^4}$, $w^{(4)}_{x_*^2 y_*^2}$, разложение для p и выражение для w из первого равенства (1.5) с заменой x_*^2, x_*^4 их рядами Фурье (см. ниже), в результате сравнения коэффициентов получим следующие равенства:

$$k_* A_0 + \frac{\pi}{3} k_* A_1 + \left(24 + \frac{\pi^4}{5} k_*\right) A_2 + 24c^{-4} B_2 + 4c^{-2} C_1 = \frac{1}{2} p_0$$

$$24c^{-4} b_m^{(4)} + (m^4 + k_*) a_m + 4c^{-2} \alpha_m^{(2)} + 4\frac{(-1)^m}{m^2} k_* A_1 +$$
$$+ 8\frac{(-1)^m}{m^2}\left(\pi^2 - \frac{6}{m^2}\right) k_* A_2 = p_m \tag{1.9}$$

$$\left(24 + \frac{\pi^4}{5} k_*\right) a_n^{(4)} + \frac{\pi^2}{3} k_* a_n^{(2)} + c^{-4} n^4 d_n - 2c^{-2} n^2 \gamma_n + k_* c_n = q_n$$

$$8\frac{(-1)^m}{m^2}\left(\pi^2 - \frac{6}{m^2}\right) k_* a_n^{(4)} + 4\frac{(-1)^m}{m^2} k_* a_n^{(2)} +$$
$$+ (m^4 + k_*) a_{mn} + n^4 c^{-4} b_{mn} - 2c^{-2} n^2 \alpha_{mn} = p_{mn}$$

Заменяя в (1.6), (1.7) величины x_*^2, y_*^2 их рядами Фурье

$$x_*^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_m \frac{(-1)^m}{m^2} \cos m x_*, \quad y_*^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_n \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n y_* \tag{1.10}$$

и приравнивая затем соответствующие выражения в (1.6), (1.7), получим

$$2A_1 + 4\pi^2 A_2 = C_0 + \frac{\pi^2}{3} C_1, \quad 48\frac{(-1)^m}{m^2} A_2 - m^2 a_m = \alpha_m + \frac{\pi^2}{3} \alpha_m^{(2)}$$

$$2a_n^{(2)} + 4\pi^2 a_n^{(4)} = 4\frac{(-1)^n}{n^2} C_1 + \gamma_n \tag{1.11}$$

$$48\frac{(-1)^m}{m^2} a_n^{(4)} - m^2 a_{mn} = 4\frac{(-1)^n}{n^2} \alpha_m^{(2)} + \alpha_{mn}$$

$$2B_1 + 4\pi^2 B_2 = D_0 + \frac{\pi^2}{3} D_1, \quad 48\frac{(-1)^n}{n^2} B^2 - n^2 d_n = \delta_n + \frac{\pi^2}{3} \delta_n^{(2)} \tag{1.12}$$

$$2b_m^{(2)}+4\pi^2 b_m^{(4)}=4\frac{(-1)^m}{m^2}D_1+\beta_m, \quad 48\frac{(-1)^n}{n^2}b_m^{(4)}-n^2 b_{mn}=4\frac{(-1)^m}{m^2}\delta_n^{(2)}+\beta_{mn}$$

Аналогично, заменяя в (1.5) величины x_*^2, y_*^2 рядами (1.10), а x_*^4, y_*^4 рядами

$$x_*^4=\frac{\pi^4}{5}+8\sum_m \frac{(-1)^m}{m^2}\left(\pi^2-\frac{6}{m^2}\right)\cos mx_*$$

$$y_*^4=\frac{\pi^4}{5}+8\sum_n \frac{(-1)^n}{n^2}\left(\pi^2-\frac{6}{n^2}\right)\cos ny_*$$

будем иметь

$$\begin{gathered}
A_0+\frac{\pi^2}{3}A_1+\frac{\pi^4}{5}A_2=B_0+\frac{\pi^2}{3}B_1+\frac{\pi^4}{5}B_2\\
4\frac{(-1)^m}{m^2}\left[A_1+2\left(\pi^2-\frac{6}{m^2}\right)A_2\right]+a_m=b_m+\frac{\pi^2}{3}b_m^{(2)}+\frac{\pi^4}{5}b_m^{(4)}\\
4\frac{(-1)^n}{n^2}\left[B_1+2\left(\pi^2-\frac{6}{n^2}\right)B_2\right]+d_n=c_n+\frac{\pi^2}{3}a_n^{(2)}+\frac{\pi^4}{5}a_n^{(4)}\\
4\frac{(-1)^m}{m^2}\left[a_n^{(2)}+2\left(\pi^2-\frac{6}{m^2}\right)a_n^{(4)}\right]+a_{mn}=\\
=4\frac{(-1)^n}{n^2}\left[b_m^{(2)}+2\left(\pi^2-\frac{6}{n^2}\right)b_m^{(4)}\right]+b_{mn}
\end{gathered} \tag{1.13}$$

Так как правые части равенств (1.8) должны быть одинаковыми, то

$$C_1=D_1, \quad 2\alpha_m^{(2)}=-m^2\beta_m, \quad 2\delta_n^{(2)}=-n^2\gamma_n, \quad n^2\alpha_{mn}=m^2\beta_{mn} \tag{1.14}$$

Наконец, из граничных условий (1.4), в которых $w_{x_*^2}''(\pm\pi, y_*)$, $w_{x_*^3}'''(\pm\pi, y_*)$, $w_{x_*^2 y_*}''(x_*, \pm\pi)$ и $w_{y_*^2}''(x_*, \pm\pi)$, $w_{y_*^3}'''(x_*, \pm\pi)$, $w_{y_*^2 x_*}'''(\pm\pi, y_*)$, находятся соответственно из первых и вторых равенств (1.6), (1.7), получим две группы равенств

$$\begin{gathered}
2A_1+12\pi^2 A_2-\sum_m(-1)^m m^2 a_m+\nu c^{-2}\left(D_0+\pi^2 D_1+\sum_m(-1)^m\beta_m\right)=0\\
2a_n^{(2)}+12\pi^2 a_n^{(4)}-\sum_m(-1)^m m^2 a_{mn}+\nu c^{-2}\left(\delta_n+\pi^2\delta_n^{(2)}+\sum_m(-1)^m\beta_{mn}\right)=0\\
12A_2+(2-\nu)c^{-2}D_1=0, \quad 12a_n^{(4)}+(2-\nu)c^{-2}\delta_n^{(2)}=0
\end{gathered} \tag{1.15}$$

$$\begin{gathered}
c^{-2}\left(2B_1+12\pi^2 B_2-\sum_n(-1)^n n^2 d_n\right)+\nu\left(C_0+\pi^2 C_1+\sum_n(-1)^n\gamma_n\right)=0\\
c^{-2}\left(2b_m^{(2)}+12\pi^2 b_m^{(4)}-\sum_n(-1)^n n^2 b_{mn}\right)+\nu\left(\alpha_m+\pi^2\alpha_m^{(2)}+\sum_n(-1)^n\alpha_{mn}\right)=0\\
12c^{-2}B_2+(2-\nu)C_1=0, \quad 12c^{-2}b_m^{(4)}+(2-\nu)\alpha_m^{(2)}=0
\end{gathered} \tag{1.16}$$

2. Второе и четвертое граничные условия (1.4) получены в результате замены крутящих моментов презывающими усилиями. При такой замене в углах пластинки образуются сосредоточенные силы, пропорциональные значениям $w_{x_* y_*}''$ в этих углах.

Так как упругое основание не может вызывать сосредоточенных реакций, то в углах рассматриваемой пластинки величина $w''_{x_*y_*}$ должна равняться нулю. Поэтому функция $w'_{x_*}(\pm\pi, y_*)$ не только сама должна иметь при $y_* = \pm\pi$ одинаковые значения (в силу симметрии $w(x_*, y_*)$), но и ее производная $w''_{x_*y_*}(\pm\pi, y_*)$ (поскольку в углах пластинки $w''_{x_*y_*}=0$).

Следовательно, при периодическом (с периодом 2π) продолжении функции $w(x_*, y_*)$ за пределы квадрата $-\pi \leqslant x_*$, $y_* \leqslant \pi$ функция $w'_{x_*}(\pm\pi, y_*)$ должна быть всюду непрерывной вместе со своей производной $w''_{x_*y_*}(\pm\pi, y_*)$ (на участке $-\pi \leqslant \leqslant y_* \leqslant \pi$ они непрерывны в силу непрерывности деформаций). По аналогичным причинам функция $w'_{y_*}(x_*, \pm\pi)$ должна быть всюду непрерывной вместе со своей производной $w''_{y_*x_*}(x_*, \pm\pi)$.

Отсюда вытекает, что в разложениях $w'_{x_*}(\pi, y_*)$ и $w'_{y_*}(x_*, \pi)$ в ряды Фурье (получаемых из (1.5))

$$w'_{x_*}(\pi, y_*) = 2\pi(A_1 + 2\pi^2 A_2) + 2\pi \sum_n (a_n^{(2)} + 2\pi^2 a_n^{(4)}) \cos n y_*$$

$$w'_{y_*}(x_*, \pi) = 2\pi(B_1 + 2\pi^2 B_2) + 2\pi \sum_m (b_m^{(2)} + 2\pi^2 b_m^{(4)}) \cos m x_*$$

коэффициенты должны иметь порядок

$$a_n^{(2)} + 2\pi^2 a_n^{(4)} = o(n^{-2}), \qquad b_m^{(2)} + 2\pi^2 b_m^{(4)} = o(m^{-2}) \tag{2.1}$$

Обратимся к равенствам (1.8). Правые части этих равенств должны быть рядами Фурье для $w^{(4)}_{x_*^2 y_*^2}$. Поэтому

$$n^2 \gamma_n = o(1), \quad m^2 \beta_m = o(1) \tag{2.2}$$

Учитывая (2.1), (2.2), из третьих равенств (1.11), (1.12) получим

$$C_1 = D_1 = 0 \tag{2.3}$$

при этом удовлетворяется первое из равенств (1.14).

Из первых равенств (1.9), (1.11), (1.12), (1.13), третьих равенств (1.15), (1.16) и (2.3) следует

$$A_2 = B_2 = 0, \; C_0 = 2A_1, \; D_0 = 2B_1$$

$$k_* A_0 = \frac{1}{2} p_0 - \frac{\pi^2}{3} k_* A_1, \qquad k_* B_0 = \frac{1}{2} p_0 - \frac{\pi^2}{3} k_* B_1 \tag{2.4}$$

Далее из равенств (1.9)—(1.16) можно найти остальные неизвестные. кроме $a_n^{(4)}$, $b_n^{(4)}$ и A_1, B_1

$$(m^4 + k_*) a_m = \frac{24\nu}{2-\nu} c^{-4} b_m^{(4)} + p_m - 4 \frac{(-1)^m}{m^2} k_* A_1$$

$$a_n^{(2)} = -2\left(\pi^2 - \frac{6}{2-\nu} c^2 n^{-2}\right) a_n^{(4)}$$

$$c_n = \left(\frac{7}{15}\pi^4 - \frac{4}{2-\nu}\frac{\pi^2}{n^2} c^2 + \frac{24\nu}{2-\nu}\frac{1}{n^4 c^{-4} + k_*}\right) a_n^{(4)} +$$

$$+ \frac{q_n}{n^4 c^{-4} + k_*} + 4(-1)^n \frac{n^2 c^{-4}}{n^4 c^{-4} + k_*} B_1$$

$$\alpha_m=\frac{4c^{-2}}{2-\nu}\left(\pi^2-6\nu c^{-2}\frac{m^2}{m^4+k_*}\right)b_m^{(4)}+\frac{4(-1)^m k_*}{m^4+k_*}A_1-\frac{m^2}{m^4+k_*}p_m$$

$$\alpha_m^{(2)}=-\frac{12}{2-\nu}c^{-2}b_m^{(4)},\qquad n^2\gamma_n=\frac{24}{2-\nu}c^2a_n^{(4)}$$

$$[(m^2+n^2c^{-2})^2+k_*]a_{mn}=\frac{48}{2-\nu}c^{-4}(-1)^n\left(\nu+\frac{n^2}{m^2}c^{-2}\right)b_m^{(4)}+$$

$$+48\frac{(-1)^m}{m^2}\left[\frac{3-2\nu}{2-\nu}n^2c^{-2}+(k_*+n^4c^{-4})m^{-2}-\frac{k_*}{2-\nu}c^2n^{-2}\right]a_n^{(4)}+p_{mn}$$

$$[(m^2+n^2c^{-2})^2+k_*]\alpha_{mn}=\frac{48}{2-\nu}c^{-2}(-1)^n[(m^4+k_*)n^{-2}+(2-\nu)c^{-2}m^2]b_m^{(4)}+$$

$$+\frac{48}{2-\nu}(-1)^m[n^2c^{-2}+(2-\nu)m^2+k_*c^2n^{-2}]a_n^{(4)}-m^2p_{mn}$$

$$(n^4c^{-4}+k_*)d_n=\frac{24\nu}{2-\nu}a_n^{(4)}+q_n-4\frac{(-1)^n}{n^2}k_*B_1$$

$$b_m^{(2)}=-2\left(\pi^2-\frac{6}{2-\nu}c^{-2}m^{-2}\right)b_m^{(4)}$$

$$b_m=\left(\frac{7}{15}\pi^4-\frac{4}{2-\nu}\frac{\pi^2}{m^2}c^{-2}+\frac{24\nu}{2-\nu}\frac{c^{-4}}{m^4+k_*}\right)b_m^{(4)}+\frac{p_m}{m^4+k_*}+4(-1)^m\frac{m^2}{m^4+k_*}A_1$$

$$\delta_n=\frac{4}{2-\nu}\left(\pi^2c^2-6\nu\frac{n^2}{n^4c^{-4}+k_*}\right)a_n^{(4)}+4\frac{(-1)^n k_*}{n^4c^{-4}+k_*}B_1-\frac{n^2}{n^4c^{-4}+k_*}q_n\tag{2.5}$$

$$\delta_n^{(2)}=-\frac{12}{2-\nu}c^2a_n^{(4)},\qquad m^2\beta_m=\frac{24}{2-\nu}c^{-2}b_m^{(4)}$$

$$[(m^2+n^2c^{-2})^2+k_*]b_{mn}=48\frac{(-1)^m}{2-\nu}\left(\nu+c^2\frac{m^2}{n^2}\right)a_n^{(4)}+$$

$$+48\frac{(-1)^n}{n^2}\left[\frac{3-2\nu}{2-\nu}c^{-2}m^2+(k_*+m^4)n^{-2}-\frac{k_*}{2-\nu}c^{-2}m^{-2}\right]b_m^{(4)}+p_{mn}$$

$$[(m^2+n^2c^{-2})^2+k_*]\beta_{mn}=\frac{48}{2-\nu}(-1)^m[(n^4c^{-2}+k_*c^2)m^{-2}+(2-\nu)n^2]a_n^{(4)}+$$

$$+\frac{48}{2-\nu}c^{-2}(-1)^n[m^2+(2-\nu)c^{-2}n^2+k_*m^{-2}]b_m^{(4)}-n^2p_{mn}$$

Формулы (2.5) получены без использования последнего равенства (1.14) и первых двух равенств (1.15), (1.16). Последнее равенство (1.14) выполняется автоматически, когда α_{mn}, β_{mn} определяются соответствующими формулами (2.5), а из первых двух равенств (1.15), (1.16) определяются остальные неизвестные $a_n^{(4)}$, $b_n^{(4)}$ и A_1, B_1.

Положим

$$\xi_n=\frac{12c^2}{2-\nu}a_n^{(4)},\qquad \eta_n=\frac{12c^{-2}}{2-\nu}b_n^{(4)}\tag{2.6}$$

Тогда вторые равенства (1.15), (1.16) с учетом формул (2.5) для $a_n^{(2)}$, δ_n, $\delta_n^{(2)}$, a_{mn}, β_{mn}, $b_m^{(2)}$, α_m, $\alpha_m^{(2)}$, b_{mn}, α_{mn} и разложения $\pi^2=6\sum_n n^{-2}$

приводят к следующей бесконечной системе уравнений:

$$\xi_n+\sum_m r_{nm}\eta_m=r_n+r_n'B_1,\qquad \eta_n+\sum_m g_{nm}\xi_m=g_n+g_n'A_1\qquad {\scriptstyle (n=1,2,\ldots)}\tag{2.7}$$

$$r_{nm}=(-1)^{m+n}\frac{\nu k_* m^{-2}-(1-\nu)^2c^{-2}n^2}{(m^2+n^2c^{-2})^2+k_*}\,\frac{1}{S_n(k_*)}$$

$$S_n(k_*)=\sum_m\frac{2(1-\nu)m^2+(1-\nu^2)c^{-2}n^2+k_*c^2n^{-2}}{(m^2+n^2c^{-2})^2+k_*}+\frac{c^2}{2n^2}-\frac{\nu^2c^{-2}n^2}{2(n^4c^{-4}+k_*)}$$

$$r_n=\frac{1}{4}\left[\frac{\nu n^2}{c^{-4}n^4+k_*}q_n+\sum_m(-1)^m\frac{m^2c^2+\nu n^2}{(m^2+n^2c^{-2})^2+k_*}p_{mn}\right]\frac{1}{S_n(k_*)}$$

$$r_n'=-(-1)^n\frac{\nu k_*}{c^{-4}n^4+k_*}\,\frac{1}{S_n(k_*)}$$

$$g_{nm}=(-1)^{m+n}\frac{\nu c^2k_*m^{-2}-(1-\nu)^2n^2}{(m^2c^{-2}+n^2)^2+k_*}\,\frac{1}{S_n'(k_*)}$$

$$S_n'(k_*)=\sum_m\frac{2(1-\nu)c^{-2}m^2+(1-\nu^2)n^2+k_*n^{-2}}{(m^2c^{-2}+n^2)^2+k_*}+\frac{1}{2n^2}-\frac{\nu^2n^2}{2(n^4+k_*)}\,.$$

$$g_n=\frac{1}{4}\left[\frac{\nu c^2n^2}{n^4+k_*}p_n+\sum_m(-1)^m\frac{m^2+\nu c^2n^2}{(m^2c^{-2}+n^2)^2+k_*}p_{nm}\right]\frac{1}{S_n'(k_*)}$$

$$g_n'=-(-1)^n\frac{\nu c^2k_*}{n^4+k_*}\,\frac{1}{S_n'(k_*)}$$

Положим $\zeta_{2n-1}=\xi_n$, $\zeta_{2n}=\eta_n$, $c_{2n-1,\,2m-1}=0$, $c_{2n-1,\,2m}=r_{nm}$, $c_{2n,\,2m-1}=g_{nm}$, $c_{2n,\,2m}=0$, $d_{2n-1}=r_n$, $d_{2n}=g_n$, $d_{2n-1}'=r_n'$, $d_{2n}'=0$, $d_{2n-1}''=0$, $d_{2n}''=g_n'$.

Тогда система (2.7) принимает вид

$$\zeta_i+\sum_k c_{ik}\zeta_k=d_i+d_i'A_1+d_i''B_1\qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots)}\tag{2.8}$$

Для величин ζ_k, являющихся решением системы (2.8), имеет место равенство

$$\zeta_k=\zeta_k^\circ+A_1\zeta_k'+B_1\zeta_k''\tag{2.9}$$

где $\{\zeta_k^\circ\}$, $\{\zeta_k'\}$, $\{\zeta_k''\}$ — решения следующих систем уравнений:

$$\zeta_i^\circ+\sum_k c_{ik}\zeta_k^\circ=d_i,\qquad \zeta_i'+\sum_k c_{ik}\zeta_k'=d_i',\qquad \zeta_i''+\sum_k c_{ik}\zeta_k''=d_i''\qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots)}\tag{2.10}$$

По найденным из (2.10) величинам ζ_i°, ζ_i', ζ_i'' определяются константы A_1, B_1 из первых равенств (1.15), (1.16). Эти равенства с учетом (2.3), (2.4) и формул (2.5) для a_m, β_m, d_n, γ_n принимают вид

$$\left[1+2\sum_m\frac{k_*}{m^4+k_*}+\nu c^{-2}\sum_m\frac{(-1)^mk_*}{m^2(m^4+k_*)}\eta_m'\right]A_1+$$

$$+\nu c^{-2}\left[1+\sum_m\frac{(-1)^mk_*}{m^2(m^4+k_*)}\eta_m''\right]B_1=$$

$$=\sum_m \frac{(-1)^m m^2}{2(m^4+k_*)} p_m - \nu c^{-2} \sum_m \frac{(-1)^m k_*}{m^2(m^4+k_*)} \eta_m^\circ \tag{2.11}$$

$$\nu\left[1+\sum_n (-1)^n \frac{k_*}{n^2(n^4c^{-4}+k_*)} \xi_n'\right] A_1+$$

$$+\left[c^{-2}\left(1+2\sum_n \frac{k_*}{n^4c^{-4}+k_*}\right)+\nu\sum_n (-1)^n \frac{k_*}{n^2(n^4c^{-4}+k_*)}\xi_n''\right]B_1=$$

$$=c^{-2}\sum_n (-1)^n \frac{n^2}{2(n^4c^{-4}+k_*)} q_n - \nu \sum_n (-1)^n \frac{k_*}{n^2(n^4c^{-4}+k_*)}\xi_n^\circ \tag{2.12}$$

$$\xi_n^\circ=\zeta_{2n-1}^\circ,\quad \xi_n'=\zeta_{2n-1}',\quad \xi_n''=\zeta_{2n-1}',\quad \eta_n^\circ=\zeta_{2n}^\circ,\quad \eta_n'=\zeta_{2n}',\quad \eta_n''=\zeta_{2n}''$$

Отметим, что при $\nu=0$ величина A_1 находится из (2.11), а B_1 — из (2.12) без использования решений систем (2.10).

3. Выясним характер систем (2.10). Для этого сравним входящие в r_{nm} и $S_n(k_*)$ выражения

$$\nu k_* m^{-2}-(1-\nu)^2 c^{-2} n^2,\quad 2(1-\nu)m^2+(1-\nu^2)c^{-2}n^2+k_* c^2 n^{-2}.$$

Если выполняется условие

$$\nu k_* m^{-2}-(1-\nu)^2 c^{-2} n^2 \leqslant 2(1-\nu)m^2+(1-\nu^2)c^{-2}n^2+k_* c^2 n^{-2} \tag{3.1}$$

то выполняется и условие

$$|\nu k_* m^{-2}-(1-\nu)^2 c^{-2} n^2| \leqslant 2(1-\nu)m^2+(1-\nu^2)c^{-2}n^2+k_* c^2 n^{-2} \tag{3.2}$$

поскольку при $\nu k_* m^{-2}-(1-\nu)^2c^{-2}n^2<0$ имеем $|\nu k_* m^{-2}-(1-\nu)^2c^{-2}n^2|=$ $=(1-\nu)^2c^{-2}n^2-\nu k_* m^{-2}<(1-\nu)^2c^{-2}n^2\leqslant(1-\nu^2)c^{-2}n^2<2(1-\nu)m^2+$ $+(1-\nu^2)c^{-2}n^2+k_*c^2n^{-2}$.

Условие (3.1) эквивалентно следующему:

$$m^4+\left[c^{-2}n^2+\frac{k_*c^2}{2(1-\nu)n^2}\right]m^2 \geqslant \frac{\nu k_*}{2(1-\nu)} \tag{3.3}$$

В (3.3) величина, на которую умножается m^2, принимает наименьшее значение $2rc^{-2}$ при $n^2=c^2(k_*/2(1-\nu))^{1/2}=r$.

Поэтому условие (3.3) выполняется при любом n, если $m^4+2rc^{-2}m^2-$ $-\nu c^{-4}r^2\geqslant 0$, т. е. когда $m^2\geqslant\nu(1+\sqrt{1+\nu})^{-1}(k_*/2(1-\nu))^{1/2}$ и тем более, если

$$m^2\geqslant(\nu^2k_*/8(1-\nu))^{1/2} \tag{3.4}$$

Отсюда следует, что условие (3.3) будет выполняться при любых m, $n=1, 2, \ldots$, если

$$k_*=ka^4/\pi^4D\leqslant 8(1-\nu)/\nu^2 \tag{3.5}$$

При выполнении условия (3.5) будет выполняться и условие (3.2) (поскольку (3.3) эквивалентно (3.1), а из (3.1) следует (3.2)). Тогда

$$\sum_m \frac{|\nu k_* m^{-2}-(1-\nu)^2c^{-2}n^2|}{(m^2+n^2c^{-2})^2+k_*} \leqslant \sum_m \frac{2(1-\nu)m^2+(1-\nu^2)c^{-2}n^2+k_*c^2n^{-2}}{(m^2+n^2c^{-2})^2+k_*} \tag{3.6}$$

Так как

$$\frac{c^2}{2n^2}-\frac{\nu c^{-2}n^2}{2(n^4c^{-4}+k_*)}=\frac{(1-\nu)c^{-2}n^4+c^2k_*}{2n^2(n^4c^{-4}+k_*)}>0$$

то правая часть формулы (3.6) меньше, чем $S_n(k_*)$, поэтому из (3.6) и равенств для r_{nm}, $S_n(k_*)$ получим

$$\sum_m |r_{nm}|<1 \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{3.7}$$

Сравним выражения

$$\nu c^2k_*m^{-2}-(1-\nu)^2n^2,\ 2(1-\nu)c^{-2}m^2+(1-\nu^2)n^2+k_*n^{-2}$$

входящие в g_{nm} и $S_n'(k_*)$. Подобно тому, как были получены предыдущие оценки, можно установить, что условие

$$|\nu c^2k_*m^{-2}-(1-\nu)^2n^2|\leqslant 2(1-\nu)c^{-2}m^2+(1-\nu^2)n^2+k_*n^{-2} \tag{3.8}$$

выполняется при выполнении условия

$$m^4+\left[n^2+\frac{k_*}{2(1-\nu)n^2}\right]c^2m^2\geqslant\frac{\nu c^4k_*}{2(1-\nu)} \tag{3.9}$$

а условие (3.9) выполняется при любом n, если

$$m^2\geqslant c^2(\nu^2k_*/8(1-\nu))^{1/2} \tag{3.10}$$

Отсюда вытекает, что условие (3.8) будет выполняться при любых $m, n=1, 2, \ldots$, если

$$k_*c^4=kb^4/\pi^4D\leqslant 8(1-\nu)/\nu^2 \tag{3.11}$$

Тогда

$$\sum_m\frac{|\nu c^2k_*m^{-2}-(1-\nu)^2n^2|}{(m^2c^{-2}+n^2)^2+k_*}\leqslant\sum_m\frac{2(1-\nu)c^{-2}m^2+(1-\nu^2)n^2+k_*n^{-2}}{(m^2c^{-2}+n^2)^2+k_*} \tag{3.12}$$

Из (3.12) и формул для g_{nm}, $S_n'(k_*)$ следует

$$\sum_m |g_{nm}|<1 \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{3.13}$$

Так как

$$\sum_k |c_{2n-1,k}|=\sum_m |r_{nm}|,\qquad \sum_k |c_{2n,k}|=\sum_m |g_{nm}|$$

то при выполнении условий (3.5), (3.11) будем иметь

$$\sum_k |c_{ik}|<1 \tag{3.14}$$

Это означает, что при значениях k_* (или k), удовлетворяющих условиям (3.5), (3.11), системы уравнений (2.10) будут регулярными.

В проведенном анализе систем (2.10) имелись в виду реальные значения $\nu\neq 0$. При $\nu=0$ условия (3.2), (3.8), а следовательно, и условие регулярности (3.14) выполняются при любом k_*. Выяснить регулярность системы (2.10) при любом k_*, если $\nu\neq 0$, затруднительно. Но в каждом конкретном случае возможна следующая проверка.

Согласно (3.3), (3.4) условие (3.2) выполняется при всех значениях m, если $n>N=[c(\nu k_*/2(1-\nu))^{1/2}]$, и при всех значениях n, если $m>M=[(\nu^2 k_*/8(1-\nu))^{1/4}]$ (квадратные скобки означают, что берется целая часть заключенной в них величины).

Далее, согласно (3.9), (3.10) условие (3.8) выполняется при всех значениях m, если[1] $n>N$, и при всех значениях n, если $m>M'=[c(\nu^2 k_*/8(1-\nu))^{1/4}]$. Поэтому, если для каких-либо натуральных чисел $M_n\geqslant M$ и $M_n'\geqslant M'$ ($n=1, 2, \ldots, N$) выполняются соответственно условия

$$\sum_{m=1}^{M_n}\frac{|\nu k_* m^{-2}-(1-\nu)^2 c^{-2}n^2|}{(m^2+n^2c^{-2})^2+k_*}\leqslant\sum_{m=1}^{M_n}\frac{2(1-\nu)m^2+(1-\nu^2)c^{-2}n^2+k_*c^2n^{-2}}{(m^2+n^2c^{-2})^2+k_*}\tag{3.15}$$

$$\sum_{m=1}^{M_n'}\frac{|\nu c^2 k_* m^{-2}-(1-\nu)^2 n^2|}{(m^2c^{-2}+n^2)^2+k_*}\leqslant\sum_{m=1}^{M_n'}\frac{2(1-\nu)c^{-2}m^2+(1-\nu^2)n^2+k_*n^{-2}}{(m^2c^{-2}+n^2)^2+k_*}$$

$$(n=1,2,\ldots,N)\tag{3.16}$$

то, очевидно, при всех натуральных n будут выполняться условия (3.6), (3.12), а следовательно, и условия регулярности (3.14).

Проверка выполнения условий (3.15), (3.16) при конкретных значениях ν, c и k_* показывает, что и тогда, когда значения k_* значительно превышают их верхнюю границу, устанавливаемую условиями (3.5), (3.7), системы (2.10) будут регулярными.

Считая условия (3.2), (3.8) выполненными, можно установить неравенства

$$|d_i|<C\rho_i,\quad |d_i'|<C'\rho_i,\quad |d_i''|<C''\rho_i,\quad \rho_i=1-\sum_k|c_{ik}|,\quad C, C', C''=\text{const}\tag{3.17}$$

Действительно, из формул для r_{nm}, $S_n(k_*)$ и условия (3.2) получим

$$\rho_n'=1-\sum_m|r_{nm}|=\frac{1}{S_n(k_*)}\left[S_n(k_*)-\sum_m\frac{|\nu k_* m^{-2}-(1-\nu)^2c^{-2}n^2|}{(m^2+n^2c^{-2})^2+k_*}\right]\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{S_n(k_*)}\left[\frac{c^2}{2n^2}-\frac{\nu^2c^{-2}n^2}{2(n^4c^{-4}+k_*)}\right]=$$

$$=\frac{1}{S_n(k_*)}\frac{(1-\nu^2)c^{-2}n^4+c^2k_*}{2n^2(n^4c^{-4}+k_*)}>\frac{1-\nu^2}{2n^2}\frac{c^2}{S_n(k_*)}\tag{3.18}$$

Полагая, что коэффициенты Фурье p_n, q_n, p_{mn} для реальной нагрузки подчиняются условиям

$$|p_n|,\ |q_n|<C_1/n,\quad |p_{mn}|<C_2/mn\tag{3.19}$$

и используя (3.18), из формул для r_n и r_n' получаем следующие оценки:

$$|r_n|<\frac{1}{2}\left[\frac{\nu c^2}{n^3}C_1+C_2\sum_m\frac{1}{m(m^2+n^2c^{-2})}\right]\frac{n}{1-\nu^2}\rho_n'<$$

$$<\frac{1}{2}\left[\frac{\nu c^2}{n^2}C_1+C_2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+n^2c^{-2}}\right]\frac{n}{1-\nu^2}\rho_n'\leqslant$$

---

[1] Из выполнения условий (3.2), (3.8) при $n>N$ следует, что системы (2.10) будут во всяком случае квазирегулярны при любом k_*.

$$\leqslant \frac{1}{2}\left[\nu c^2 C_1 + \frac{\pi}{2} c C_2\right] \frac{1}{1-\nu^2} \rho_n' = C_* \rho_n' \tag{3.20}$$

$$|r_n'| < \frac{2\nu}{1-\nu^2} c^2 k_* \frac{1}{n^2} \rho_n' = C_{**} \frac{\rho_n'}{n^2} \leqslant C_{**} \rho_n' \qquad (C_*, C_{**} = \text{const})$$

Аналогично из формул для g_{nm}, $S'_n(k_*)$ и условия (3.8) получим

$$\rho_n'' = 1 - \sum_m |g_{nm}| > \frac{1-\nu^2}{2n^2} \frac{1}{S_n'(k_*)} \tag{3.21}$$

Из условия (3.21) и формул для g_n, g_n' следует

$$|g_n| < C^* \rho_n'', \quad |g_n'| < C^{**} \rho_n'' \quad (C^*, C^{**} = \text{const}) \tag{3.22}$$

Согласно равенствам для c_{ik} имеем $\rho_n' = \rho_{2n-1}$, $\rho_n'' = \rho_{2n}$. Поэтому из формул для d_i, d_i', d_i'' и из оценок (3.20), (3.22) получим неравенства (3.17).

Выполнение неравенств (3.14), (3.17) позволяет находить решения систем (2.10) с любой точностью методом редукции [3].

Считая величины $\xi_n = \zeta_{2n-1}$, $\eta_n = \zeta_{2n}$ и A_1, B_1 найденными из равенств (2.9) – (2.12), можно получить формулы для определения w, M_x, M_y.

Подставляя в первое представление (1.5) значения коэффициентов (согласно равенствам (2.4), (2.5)) и заменяя степенные функции, на которые умножаются тригонометрические ряды, их рядами Фурье, будем иметь

$$w = \frac{1}{2}\frac{p_0}{k_*} + \pi^2\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{3}\right)A_1 + \pi^2\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{3}\right)B_1 +$$

$$+ \sum_m [2\nu c^{-2}\eta_m + p_m - 4A_1 k_* (-1)^m m^{-2}] \frac{1}{m^4 + k_*} \cos m\pi \frac{x}{a} +$$

$$+ \sum_n [2\nu c^{-2}\xi_n + q_n - 4B_1 k_* (-1)^n n^{-2}] \frac{1}{n^4 c^{-4} + k_*} \cos n\pi \frac{y}{b} +$$

$$+ \sum_m \sum_n [4c^{-2}(-1)^n (\nu + n^2 m^{-2} c^{-2}) \eta_m + 4(-1)^m (\nu c^{-2} + m^2 n^{-2}) \xi_n + p_{mn}] \times$$

$$\times \frac{1}{(m^2 + n^2 c^{-2})^2 + k_*} \cos m\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{y}{b} \tag{3.23}$$

Аналогичным образом, используя равенства (1.6), получим

$$-\frac{a^2}{\pi^2 D} M_x = 2(A_1 + \nu c^{-2} B_1) + \sum_m [2\nu k_* c^{-2} m^{-2} \eta_m - m^2 p_m + 4(-1)^m k_* A_1] \times$$

$$\times \frac{1}{m^4 + k_*} \cos m\pi \frac{x}{a} + \sum_n \{2[(1-\nu^2) c^{-4} n^2 + k_* n^{-2}] \xi_n - \nu c^{-2} n^2 q_n +$$

$$+ 4(-1)^n \nu k_* c^{-2} B_1\} \frac{1}{n^4 c^{-4} + k_*} \cos n\pi \frac{y}{b} -$$

$$-4c^{-2} \sum_m \sum_n \Big\{ (-1)^n [(1-\nu)^2 c^{-2} n^2 - \nu k_* m^{-2}] \eta_m -$$

$$-(-1)^m [2(1-\nu) m^2 + (1-\nu^2) c^{-2} n^2 + k_* c^2 n^{-2}] \xi_n + \frac{1}{4}(m^2 c^2 + \nu n^2) p_{mn} \Big\} \times$$

$$\times\frac{1}{(m^2+n^2c^{-2})^2+k_*}\cos m\pi\frac{x}{a}\cos n\pi\frac{y}{b} \tag{3.24}$$

$$-\frac{a^2}{\pi^2 D}M_y=2(\nu A_1+c^{-2}B_1)+\sum_n[2\nu k_* n^{-2}\xi_n-c^{-2}n^2q_n+4c^{-2}(-1)^n k_* B_1]\times$$

$$\times\frac{1}{n^4c^{-4}+k_*}\cos n\pi\frac{y}{b}+\sum_m\{2c^{-2}[(1-\nu^2)m^2+k_*m^{-2}]\eta_m-$$

$$-\nu m^2 p_m+4\nu(-1)^m k_* A_1\}\frac{1}{m^4+k_*}\cos m\pi\frac{x}{a}-$$

$$-4c^{-2}\sum_m\sum_n\Big\{(-1)^m[(1-\nu)^2m^2-\nu k_*c^2n^{-2}]\xi_n-$$

$$-(-1)^n[2(1-\nu)c^{-2}n^2+(1-\nu^2)m^2+k_*m^{-2}]\eta_m+\frac{1}{4}(n^2+\nu c^2m^2)p_{mn}\Big\}\times$$

$$\times\frac{1}{(m^2+n^2c^{-2})^2+k_*}\cos m\pi\frac{x}{a}\cos n\pi\frac{y}{b}.$$

При сравнительно небольших значениях k_* ряды в формулах (3.23), (3.24) быстро сходятся и для определения прогибов и изгибающих моментов достаточно определить небольшое число первых членов последовательностей $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$.

Поступила 9 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Даревский В. М.* Изгиб квадратной пластинки со свободными краями, лежащей на упругом основании. Тр. X Всес. конф. по теории оболочек и пластин, т. 1. Кутаиси, 1975.
2. *Даревский В. М.* Об одном методе решения уравнений с частными производными. Дифференциальные уравнения, 1973, т. 19, № 9.
3. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.– Л., 1962.