

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ УПРУГИХ ПЛАСТИН

Н. В. БАНИЧУК, В. М. КАРТВЕЛИШВИЛИ, А. А. МИРОНОВ

(Москва)

Рассматриваются задачи оптимального проектирования пластин переменной толщины, обладающих максимальной жесткостью при изгибе. На искомое распределение толщин наложены конструкционные ограничения. Определение оптимальных форм пластинок с учетом этих ограничений и условий оптимальности приводит к нелинейной краевой задаче с неизвестной границей выхода управляющей функции (толщины) на ограничения.

Для решения указанного класса задач предлагается метод, основанный на введении вспомогательной управляющей функции и использовании вычислительного алгоритма последовательной оптимизации. С применением данного алгоритма найдены оптимальные формы упругих прямоугольных пластин при различных условиях закрепления краев (опирание, жесткое защемление, смешанные условия) и для различных значений параметров задачи.

**1. Задача оптимизации жесткости упругой пластинки.** Равновесие упругой пластинки, закрепленной по контуру  $\Gamma$  в плоскости  $xy$  и нагруженной распределенными силами  $q=q(x, y)$  ( $(x, y) \in \Omega$ ), описывается уравнением

$$(Du_{xx})_{xx} + \nu(Du_{yy})_{xx} + \nu(Du_{xx})_{yy} + (Du_{yy})_{yy} + 2(1-\nu)(Du_{xy})_{xy} = q, \quad D=EI \quad (1.1)$$

где  $u=u(x, y)$  — прогиб пластинки в точке  $(x, y)$ ;  $\Omega$  — область, ограниченная контуром  $\Gamma$ ;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $E$  — модуль Юнга материала пластинки,  $I$  — момент инерции поперечного сечения. Нижними индексами обозначены частные производные по соответствующим переменным.

Пусть на части  $\Gamma_1$  контура  $\Gamma$  пластинка свободно оперта, а на части  $\Gamma_2$  жестко защемлена ( $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$ ). Граничные условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} u=0, \quad D[\Delta u - (1-\nu)\rho u_n] &= 0, \quad (x, y) \in \Gamma_1 \\ u=0, \quad u_n &= 0 \quad (x, y) \in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $\Delta$ ,  $\rho$  и  $u_n$  — соответственно оператор Лапласа, кривизна контура ( $\rho=1/R$ ,  $R$  — радиус кривизны) и производная по нормали к границе.

Величина  $D$  в случае сплошной пластинки выражается через ее толщину  $h=h(x, y)$  соотношением  $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$ . В дальнейшем будем рассматривать более общую зависимость  $D=K_m h^m$  ( $K_m$  — не зависящий от  $h$  коэффициент), которая позволяет единым образом учитывать и другие конструкционные типы пластинок. Например, для трехслойных пластинок с переменной толщиной внешних армирующих слоев  $h(x, y)/2$  и постоянной толщиной  $H$  среднего слоя имеем  $m=1$ ,  $K_1=EH^2/4(1-\nu^2)$ .

Объем  $V$  конструктивного материала (полный объем сплошной пла-

стинки, объем несущих слоев, трехслойной пластинки) предполагается заданным, что накладывает на функцию  $h=h(x, y)$  ограничение

$$\int_{\Omega} h(x, y) dx dy = V \quad (1.3)$$

Потребуем также, чтобы функция  $h=h(x, y)$  удовлетворяла неравенству

$$h_{\min} \leq h(x, y) \leq h_{\max}, \quad 0 \leq h_{\min} \leq h_{\max} \quad (1.4)$$

в котором  $h_{\min}$ ,  $h_{\max}$  — заданные положительные константы. Для существования функции  $h(x, y)$ , удовлетворяющей условиям (1.3), (1.4), необходимо, чтобы константы  $V$ ,  $h_{\min}$ ,  $h_{\max}$  и величина площади  $S$  области  $\Omega$  были согласованы:  $h_{\min}S \leq V \leq h_{\max}S$ .

В качестве нагрузки на пластинку  $q(x, y)$  рассмотрим сосредоточенную силу, приложенную в точке  $O(0, 0)$ , т. е.  $q(x, y) = P\delta(x, y)$ . Величина силы  $P$ , необходимая для реализации заданного прогиба  $u_0$  в точке  $O$ , принимается в качестве оптимизируемого функционала. Выражение для силы  $P=P(h)$  можно записать в виде [1]

$$P(h) = \min_u \frac{K_m}{u_0} \int_{\Omega} h^m U(u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) dx dy$$

$$U = (u_{xx} + u_{yy})^2 - 2(1-\nu)(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) \quad (1.5)$$

Минимум по  $u$  в (1.5) разыскивается при краевых условиях и ограничении  $u(0, 0) = u_0$ . Здесь же заметим, что условию обращения в нуль момента  $D[\Delta u - (1-\nu)\rho u_n] = 0$  на  $\Gamma_1$  заранее удовлетворять не требуется, так как это условие является естественным для функционала (1.5).

Для заданного распределения толщин действительные прогибы могут быть найдены либо путем решения краевой задачи (1.1), (1.2), либо из вариационной задачи (1.2), (1.5). Эти задачи в дальнейшем будем называть прямыми. Получаемые при решении прямых задач искомая сила  $P$  и прогибы  $u$  зависят от выбранной реализации  $h(x, y)$ .

Рассматриваемая здесь задача оптимизации заключается в отыскании функции  $h(x, y)$ , удовлетворяющей изопериметрическому условию (1.3), неравенству (1.4) и обеспечивающей максимум функционалу

$$P_* = \max_h P(h) \quad (1.6)$$

Сформулированная задача (1.2) — (1.6) относится к минимаксным задачам оптимизации. Пояснения к постановке и некоторые точные решения можно найти в [1].

При оптимизации жесткости пластинки в качестве критерия качества можно также принять величину прогиба в точке приложения силы. Отметим, что задача отыскания формы пластинки, минимизирующей прогиб в точке  $O$  под заданной силой, и сформулированная выше задача максимизации величины силы, вызывающей заданный прогиб, являются двойственными и их решения получают одно из другого простым пересчетом.

В некоторых случаях (см. [2]) при соответствующем выборе положения точки  $O$  решение задачи (1.2) — (1.6) и указанной двойственной задачи оказывается оптимальным в расчете на целый класс нагрузок. Так, для пластинки ( $m=1$ ), спроектированной оптимально в расчете на приложение сосредоточенной нагрузки в некоторой точке  $O$  (такая точка должна быть найдена), максимальный прогиб при всевозможных отличных реализациях нагрузок  $q(x, y)$ , удовлетворяющих условиям

$$q(x, y) \geq 0, \quad \int_{\Omega} q(x, y) dx dy \leq P$$

не превышает величины прогиба, реализующегося в точке  $O$  при приложении сосредоточенной силы  $P$  в эту же точку. Данные условия на  $q$  задают класс нагрузок, относительно которых рассматриваемое решение является оптимальным. Вопросы отыскания положения таких точек в данной работе рассматриваться не будут.

**2. Условие оптимальности.** Положим в условиях (1.4)  $h_{\min}=0$ ,  $h_{\max}=\infty$ . Можно показать (см. [1]), что в этом случае условие оптимальности имеет вид ( $\lambda^2$  — константа)

$$h^{m-1}U=\lambda^2 \quad (2.1)$$

а при  $m=1$  является не только необходимым, но и достаточным условием максимума  $P$ .

С использованием соотношения (2.1) нетрудно установить, что для оптимально спроектированной пластинки распределение толщин стремится к нулю при приближении к контуру опирания. Асимптотики  $h$  при  $m=1$  (трехслойная пластинка) и  $m=3$  соответственно имеют вид  $h \sim a_1 \xi$ ,  $h = a_2 \sqrt{\xi}$ , где  $\xi$  — расстояние по нормали до границы  $\Gamma$  области  $\Omega$ .

Для жестко защемленных пластин можно провести исследования, аналогичные тем, которые делались в [1, 3] для опертых пластин, и показать, что для оптимальной пластинки толщины обращаются в нуль на некоторой линии, расположенной внутри  $\Omega$ . Следовательно, для любых конечных значений константы  $h_{\min} > 0$  в решении задачи (1.1)–(1.6) будут находиться области постоянных толщин, в которых  $h(x, y) = h_{\min}$ .

Покажем, что для любых конечных значений  $h_{\max}$  ( $h_{\max} > h_{\min}$ ) в оптимальном решении будут иметь место также области, где  $h(x, y) = h_{\max}$ . Действительно, для любой произвольной пластинки конечной толщины в точке приложения силы имеет особенность (см., например, [4]). Вторые производные прогибов и функция  $U = U(u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$  неограниченно возрастают при приближении к этой точке (физически это означает, что в указанной точке имеет место концентрация напряжений  $\sigma_{ij} \rightarrow \infty$ ). Если в задаче без ограничений ( $h_{\max} = \infty$ ) толщина в указанной точке будет конечной, то при приближении к этой точке нарушится условие оптимальности.

Асимптотический анализ уравнения равновесия (1.1) и необходимого условия оптимальности (2.1) показывает, что при приближении к точке приложения силы толщина оптимальной пластинки  $h$  неограниченно возрастает, а  $U$  стремится к нулю. Следовательно, в задаче с конечными значениями константы  $h_{\max}$  будут области, где  $h(x, y) = h_{\max}$ .

Из приведенного анализа вытекает, что оба ограничения (1.4) (верхнее и нижнее) являются существенными и проявляются в задаче с любыми конечными значениями констант  $h_{\max}$ ,  $h_{\min}$ .

Условие оптимальности (2.1) должно выполняться в тех зонах области  $\Omega$ , где реализуются строгие неравенства в (1.4). Отметим, что положение линий, ограничивающих области, в которых либо  $h(x, y) = h_{\min}$ , либо  $h(x, y) = h_{\max}$ , заранее неизвестно. Поэтому непосредственное отыскание оптимального решения с использованием условия (2.1) приводит к нелинейной краевой задаче с неизвестными границами выхода на ограничения. Нелинейность задачи обусловлена нелинейностью условия оптимальности.

В данной задаче трудности, связанные с поиском линий выхода на ограничения, могут быть устранены путем введения новой управляющей функции  $\varphi(x, y)$ , связанной с  $h(x, y)$  соотношением

$$h = \alpha + \beta \sin \varphi, \quad \alpha = (h_{\max} + h_{\min})/2, \quad \beta = (h_{\max} - h_{\min})/2 \quad (2.2)$$

Для функции  $\varphi(x, y)$  ограничения (1.4), как это нетрудно проверить, будут выполнены для любых значений  $x, y$ . Тем самым учитывать условия (1.4) в дальнейшем не требуется.

Единственное ограничение, которое накладывается на функцию  $\varphi$ , вытекает из условия (1.3) и соотношений (2.2)

$$\int_{\Omega} \sin \varphi \, dx \, dy = \gamma, \quad \gamma = \beta^{-1}(V - \alpha S) \quad (2.3)$$

Заметим, что функция  $\varphi$  вводится в рассмотрение не единственным образом и этим обстоятельством можно пользоваться для построения и улучшения сходимости численных алгоритмов.

Получим необходимое условие оптимальности, которому удовлетворяют искомые функции  $\varphi(x, y)$  и  $u(x, y)$ . Используя формулу (1.5) для оптимизируемого функционала  $P$  и соотношение (2.2), связывающее  $h$  с  $\varphi$ , выпишем выражение для вариации  $\delta P$ , обусловленной вариацией  $\delta\varphi$

$$\delta P = \int_{\Omega} \Lambda \cos \varphi \delta\varphi \, dx \, dy, \quad \Lambda = m(\alpha + \beta \sin \varphi)^{m-1} U \quad (2.4)$$

На основе (2.3) вариация  $\delta\varphi$  должна удовлетворять уравнению

$$\int_{\Omega} \cos \varphi \delta\varphi \, dx \, dy = 0 \quad (2.5)$$

Приравнивая выражение для  $\delta P$  к нулю и учитывая условие (2.5), получим искомое условие оптимальности

$$\cos \varphi [(\alpha + \beta \sin \varphi)^{m-1} U(u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) - \lambda^2] = 0 \quad (2.6)$$

где  $\lambda$  — множитель Лагранжа, значение которого определяется из изопериметрического условия (2.3).

Поясним условие (2.6). Обозначим через  $h^*$ ,  $\varphi^*$  и  $u^*$  оптимальные значения толщин, вспомогательной управляющей функции и функции прогибов. Как отмечалось выше, на оптимальном решении имеются участки трех типов:  $h_{\min} < h^*(x, y) < h_{\max}$ ,  $h^*(x, y) = h_{\min}$  и  $h^*(x, y) = h_{\max}$ .

Для тех  $(x, y) \in \Omega$ , для которых  $h_{\min} < h^*(x, y) < h_{\max}$ , на основе соотношения (2.2) имеем  $|\sin \varphi^*(x, y)| \neq 1$ . Следовательно, для указанных точек первый сомножитель в (2.6) отличен от нуля, и условие оптимальности сводится к соотношению  $(\alpha + \beta \sin \varphi^*)^{m-1} U(u_{xx}^*, u_{xy}^*, u_{yy}^*) = \lambda^2$ . Переходя в этом соотношении от функции  $\varphi^*$  к  $h^*$ , получим условие (2.1).

Для тех точек  $(x, y) \in \Omega$ , где  $h^*(x, y) = h_{\min}$  или  $h^*(x, y) = h_{\max}$ , из соотношения (2.2) следует, что  $|\sin \varphi^*(x, y)| = 1$ . В этих точках условие оптимальности (2.6) принимает вид  $\cos \varphi^*(x, y) = 0$ .

Заметим, что основываясь на формулах (2.4), (2.5), нетрудно построить такое выражение для  $\delta\varphi$ , при котором  $\delta P > 0$ , и условие (2.5) будет выполнено. Действительно, этим требованиям удовлетворяет, например, следующая функция:

$$\delta\varphi = \tau \Psi, \quad \Psi = \cos \varphi \left[ \Lambda - \left( \int_{\Omega} \cos^2 \varphi \, dx \, dy \right)^{-1} \int_{\Omega} \Lambda \cos^2 \varphi \, dx \, dy \right] \quad (2.7)$$

где  $\tau$  — некоторая произвольная положительная константа (шаг по градиенту). Выполнимость условия (2.5) проверяется непосредственной подстановкой (2.7) в (2.5).

Докажем положительность приращения  $\delta P$ , определяемого согласно (2.4). Вместо  $\delta\varphi$  в формулу (2.4) подставим выражение (2.7). Определим

скалярное произведение функций  $g_1$  и  $g_2$  формулой

$$(g_1, g_2) = \int_{\Omega} \cos^2 \varphi g_1 g_2 dx dy$$

Тогда на основе соотношений (2.4), (2.7) и неравенств Коши — Буяковского будем иметь

$$\begin{aligned} \delta P &= \int_{\Omega} \Lambda^2 \cos^2 \varphi dx dy - \left( \int_{\Omega} \cos^2 \varphi dx dy \right)^{-1} \left( \int_{\Omega} \Lambda \cos^2 \varphi dx dy \right)^2 = \\ &= (\Lambda, \Lambda) - (\Lambda, 1) (\Lambda, 1) / (1, 1) \geq 0 \end{aligned}$$

**3. Метод численного решения.** Предлагаемый вычислительный алгоритм заключается в последовательных приближениях к оптимальному решению. Алгоритм состоит из шагов. Опишем вычислительные операции, выполняемые на одном шаге с номером  $k+1$  ( $k=0, 1, \dots$ ).

Из расчетов, выполненных на предыдущем шаге, считаются найденными некоторое распределение толщин  $h^k(x, y)$  и соответствующее ему действительное распределение прогибов  $u^k(x, y)$  и значение силы  $P^k$ . Предварительно вычисляется новое распределение толщин  $h^{k+1}(x, y)$ . Для этого используется метод проектирования градиентов, причем величина шага по градиенту вычисляется из условия максимального возрастания функционала. Далее, для найденного распределения толщин  $h=h^{k+1}(x, y)$  по схеме метода локальных вариаций с переменными шагами варьирования [5, 6] решается вариационная задача минимизации функционала (1.5) по  $u$  (прямая задача), и определяются прогибы  $u=u^{k+1}(x, y)$  и значение силы  $P^{k+1}$ .

Для найденных  $h^{k+1}(x, y)$ ,  $u^{k+1}(x, y)$ ,  $P^{k+1}$  оценивается погрешность (невязка) в выполнении необходимых условий оптимальности, и если погрешность оказывается достаточно малой, то решение задачи заканчивается. Если же невязка велика, то осуществляется переход к следующему  $k+2$  шагу, на котором выполняются аналогичные операции.

Для работы алгоритма необходимо задание начального приближения  $h^0(x, y)$  для функции распределения толщин. При этом требуется, чтобы  $h^0(x, y)$  удовлетворяла изопериметрическому условию (1.3), а соответствующая ей функция  $\varphi^0(x, y)$  — условию (2.3). Величины  $u^0(x, y)$  и  $P^0$ , как и на последующих шагах, определяются из решения прямой задачи.

Основными частями алгоритма являются блок варьирования толщин (точнее управляющей функции  $\varphi(x, y)$ ) и блок решения прямой задачи. Ниже опишем схему вычислений, осуществляемых этими блоками.

Отыскание на каждом шаге новых значений управляющей функции  $\varphi^{k+1}(x, y)$  или, что то же, нового распределения толщин  $h^{k+1}$  осуществляется с использованием формулы

$$\varphi^{k+1} = \varphi^k + \tau \psi^k \quad (3.1)$$

в которой функция  $\psi^k$  подсчитывается согласно (2.7) с  $\varphi = \varphi^k$  и  $u = u^k$ . В описываемом алгоритме значение параметра  $\tau$  выбирается на основе следующих соображений. После подстановки (3.1) в выражение для функционала получаем зависимость  $P = f(\tau)$ . Аппроксимируем эту зависимость при малых  $\tau$  квадратичным трехчленом  $f(\tau) = c_0 + c_1 \tau + c_2 \tau^2$ . Коэффициент  $c_0$  в этом представлении очевидно равен значению силы, найденному на предыдущем шаге, т. е.  $c_0 = P^k$ .

Значение параметра  $\tau$  выберем из условия максимума функции  $f$ . В результате будем иметь

$$\tau_* = -c_1 / 2c_2, \quad c_2 < 0 \quad (3.2)$$

Коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$ , фигурирующие в формуле (3.2), вычисляются следующим образом. Для  $h=h^k$  при двух различных значениях параметров  $\tau_1$  и  $\tau_2$  решаются прямые задачи и находятся значения силы  $f(\tau_1)$ ,  $f(\tau_2)$ . После отыскания этих величин определяются константы  $c_1$  и  $c_2$  из уравнений

$$P^k + c_1 \tau_1 + c_2 \tau_1^2 = f(\tau_1), \quad P^k + c_1 \tau_2 + c_2 \tau_2^2 = f(\tau_2)$$

Дальнейшая подстановка найденных выражений для  $c_1$  и  $c_2$  в (3.2) приводит к следующей формуле для оптимального шага:

$$\tau_* = \frac{[f(\tau_1) - P^k] \tau_2^2 - [f(\tau_2) - P^k] \tau_1^2}{[f(\tau_1) - P^k] \tau_2 - [f(\tau_2) - P^k] \tau_1} \quad (3.3)$$

Таким образом, в описываемом алгоритме определение на каждом шаге управляющей функции достигается путем решения двух прямых задач и вычислений по формулам (3.1), (3.3). Всего на каждом шаге решаются три прямые задачи, так как после отыскания  $\psi^{k+1}$  требуется еще раз обратиться к блоку решения прямой задачи с целью отыскания соответствующих прогибов  $u^{k+1}$  и величины силы  $P^{k+1}$ .

Отметим, что формула (3.3) получена в предположении о малости  $|\tau_* \psi^k| < 1$ . Поэтому если  $\tau_*$ , вычисляемое по формуле (3.3), оказывается большим и не удовлетворяет указанному условию, то в вычислительной схеме предусмотрен переход к вычислению  $\psi^{k+1}$  по формуле (3.1) с некоторым достаточно малым шагом  $\delta_3$ , т. е.

$$\tau = \tau_* \quad \text{при} \quad |\tau| < \delta_3, \quad \tau = \delta_3 \quad \text{при} \quad |\tau_*| > \delta_3 \quad (3.4)$$

Опишем алгоритм решения прямой задачи (1.5). Для отыскания прогибов и значения силы, соответствующих данному текущему распределению толщин, применяется схема метода локальных вариаций с переменными шагами варьирования, причем, что существенно, для точности метода в малой окрестности  $\Omega_0$  точки  $O$  (точки приложения сосредоточенной силы) используются асимптотики искомых величин.

Для простоты область  $\Omega$  считаем квадратом  $-a \leq x \leq a$ ,  $-a \leq y \leq a$ . Прямыми  $x_{i+1/2} = (i+1/2)\Delta$ ,  $y_{j+1/2} = (j+1/2)\Delta$  ( $i=0, \dots, \pm N-1$ ;  $j=0, \dots, \pm N-1$ ;  $\Delta = a/N$ ,  $N$  — заданное целое число), параллельными сторонам квадрата, область  $\Omega$  разбивается на ячейки. Функции  $u$  и  $h$  определяются в центрах ячеек ( $x_i = i\Delta$ ,  $y_j = j\Delta$ );  $u_{ij} = u(x_i, y_j)$ ,  $h_{ij} = h(x_i, y_j)$ .

Для ячеек, принадлежащих области  $\Omega - \Omega_0$  (см. фиг. 1), используется следующая конечно-разностная аппроксимация производных и интеграла:

$$(u_{xx})_{ij} = (u_{i-1, j} - 2u_{ij} + u_{i+1, j}) / \Delta^2, \quad (u_{yy})_{ij} = (u_{i, j-1} - 2u_{ij} + u_{i, j+1}) / \Delta^2 \quad (3.5)$$

$$(u_{xy})_{ij} = (u_{i-1, j-1} - u_{i-1, j+1} - u_{i+1, j-1} + u_{i+1, j+1}) / 4\Delta^2, \quad (3.6)$$

$$I_{ij} = \Delta^2 K_m h_{ij}^3 U[(u_{xx})_{ij}, (u_{xy})_{ij}, (u_{yy})_{ij}] u_0^{-1}$$

где  $I_{ij}$  — значение интеграла для одной ячейки.

Величина силы  $P$  записывается в виде суммы  $P = P_1 + P_2$ , в которой слагаемые  $P_1$  и  $P_2$  соответственно представляют собой интегралы по области  $\Omega - \Omega_0$  (см. фиг. 1) и по  $\Omega_0$

$$P_1 = \frac{K_m}{u_0} \int_{\Omega - \Omega_0} h^3 U(u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) dx dy, \quad P_2 = \frac{K_m}{u_0} \int_{\Omega_0} h^3 U(u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) dx dy \quad (3.7)$$

Интеграл  $P_1$  приближенно аппроксимируется суммой

$$P_1 = \sum_{ij} I_{ij} \quad (3.8)$$

Интеграл  $P_2$  вычисляется аналитически. Область  $\Omega_0$  предполагается достаточно малой, так что (см. п. 2) в этой области  $h=h_{\max}$ . Асимптотическое поведение функции прогибов в окрестности точки приложения силы ( $x=0, y=0$ ), как известно [4], имеет вид

$$u(x, y) = u(0, 0) - ar^2 + br^2 \ln r, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (3.9)$$

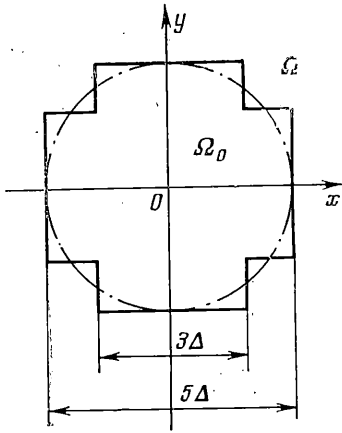
где  $a$  и  $b$  — неизвестные константы асимптотики, которые должны определяться в процессе решения задачи. Константа  $b$  связана со значением силы  $P$  соотношением  $b = P/16\pi h_{\max}$ . Заметим, что при решении прямой задачи в некотором  $k+1$  приближении, т. е. при  $h=h^{k+1}$ , величина силы  $P$  полагается равной значению, найденному на предыдущем приближении  $P=P^k$ .

Значение константы  $a$  находится из условия непрерывности функции  $u(x, y)$  на границе области  $\Omega_0$  (условие шпивки).

Из выражения (3.9) видно, что вторые производные функции  $u$ , а следовательно, и подынтегральная функция в выражении для силы  $P$  стремятся к бесконечности при  $r \rightarrow 0$ .

Интеграл  $P_2$  по области  $\Omega_0$  приближенно заменим интегралом по кругу  $x^2 + y^2 \leq R^2$ ,  $R = 5\Delta/2$  (ограничен штрихпунктирной линией на фиг. 1) и вычислим по формулам (3.7), (3.9)

$$P_2 = 2\pi R^2 \{ b^2 [5 + 3\nu + 4(1+\nu)(\ln R^2 + \ln R - 0.5)] + 4(1+\nu)[a^2 - 2ab(\ln R - 0.5)] \} h_{\max}^{-3} \quad (3.10)$$



Фиг. 1

Для удобства алгоритмизации задачи и реализации процесса варьирования вводятся два слоя фиктивных точек, расположенных вне области  $\Omega$  и прилегающих к границам.

Нетрудно заметить, что для выбранной конечно-разностной аппроксимации производных (3.5) и функционала (3.6) изменение значения  $u_{ij}$  в одной точке влечет за собой изменение девяти слагаемых в сумме (3.6). Поэтому в формуле варьирования решения

$$(u_{ij})_{s+1} = (u_{ij})_s + l_{ij} \quad (3.11)$$

шаг варьирования  $l_{ij}$  выбирается из условия максимального убывания девяти слагаемых

$$l_{ij} = c_{ij} \{ (\nu - 1) [ (u_{i-2, j-2} - u_{i-2, j} - u_{i, j-2}) g_{i-1, j-1} - (u_{i-2, j} - u_{i-2, j+2} + u_{i, j+2}) g_{i-1, j+1} - (u_{i, j-2} - u_{i+1, j-2} + u_{i+2, j}) g_{i+1, j-1} + (u_{i+2, j+2} - u_{i+2, j} - u_{i, j+2}) g_{i+1, j+1} ] / 8 + (1 - \nu) [ (u_{i-1, j-1} - 2u_{i-1, j} + u_{i-1, j+1}) g_{i-1, j-2} - 2(u_{i-1, j} + u_{i, j-1} + u_{i, j+1} + u_{i+1, j}) g_{i+1, j} + (u_{i-1, j+1} - 2u_{i, j+1} + u_{i+1, j+1}) g_{i, j+1} + (u_{i+1, j-1} - 2u_{i+1, j} + u_{i+1, j+1}) g_{i+1, j} + (u_{i-1, j-1} - 2u_{ij} + u_{i+1, j-1}) g_{i, j-1} ] - [ (u_{i-2, j} + u_{i-1, j-1} - 4u_{i-1, j} + u_{i-1, j+1}) g_{i-1, j} + (u_{i-1, j-1} + u_{i, j-2} - 4u_{i, j-1} + u_{i+1, j-1}) g_{i, j-1} + (u_{i-1, j+1} - 4u_{i, j+1} + u_{i, j+2} + u_{i+1, j+1}) g_{i, j+1} + (u_{i+1, j-1} - 4u_{i+1, j} + u_{i+1, j+1} + u_{i+2, j}) g_{i+1, j} ] \} - u_{ij} \quad (3.12)$$

Фигурирующие в (3.8) величины  $g_{ij}$  и  $c_{ij}$  определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= h_{ij}^3 && \text{при} && 1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N-1 \\ g_{ij} &= h_{ij}^3 / 4 && \text{при} && i=0, N; j=0, N \\ g_{ij} &= h_{ij}^3 / 2 && \text{при} && i=0, N, 1 \leq j \leq N-1; 1 \leq i \leq N-1, j=0, N \\ c_{ij} &= (1-\nu) (g_{i-1, j-1} + g_{i-1, j+1} + g_{i+1, j-1} + g_{i+1, j+1}) / 8 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Варьирование осуществляется при помощи формул (3.11) – (3.13) последовательно во всех точках области  $\Omega - \Omega_0$  за исключением граничных точек, где  $u_{ij} = 0$ . Однократное изменение значений  $u_{ij}$  в указанных точках по формулам (3.11) – (3.13) составляет одну итерацию. После выполнения одной итерации делается следующая итерация и т. д. Если по завершению итерации оказывается, что

$$\max_{ij} |l_{ij}| < \delta_2 \quad (3.14)$$

где  $\delta_2 > 0$  – заданное достаточно малое число, то процесс варьирования на данной сетке завершается.

Нетрудно показать, что если на некоторой итерации шаг варьирования  $l_{ij}$ , определяемый по формуле (3.8), стал достаточно малым, то величины  $u_{ij}$  и  $h_{ij}$  приближенно удовлетворяют конечно-разностному аналогу уравнения Эйлера для функционала (1.6).

Отметим, что выбранная конечно-разностная аппроксимация производных, входящих в выражение для функционала и в граничные условия, обладает вторым порядком точности.

При решении задачи оптимизации последовательные приближения для  $h$  мало отличаются одно от другого. Близость распределений  $h^k$  и  $h^{k+1}$  следует непосредственно из формулы (3.4). Малым вариациям  $h$  соответствуют малые изменения в распределении прогибов. Это обстоятельство делает естественным (с целью сокращения числа операций и, следовательно, времени счета) при решении прямой задачи с  $h = h^{k+1}$  использовать в качестве начального приближения для искомых величин  $u_{ij}$  значения прогибов, найденных из решения прямой задачи на предыдущем шаге и соответствующих распределению толщин  $h = h^k$ .

Решение задачи оптимизации на данной сетке заканчивается, если условие оптимальности выполняется с достаточной степенью точности, т. е.

$$\max_{ij} |(\psi^k)_{ij}| < \delta_1 \quad (3.15)$$

где  $\delta_1$  – заданная константа.

Если процесс решения задачи оптимизации сошелся на данной сетке, а требуемая мелкость сетки еще не достигнута, то сетка удваивается (вдвое уменьшается величина  $\Delta$ ); значения искомых величин во вновь образовавшихся узлах получаются путем интерполяции. Затем снова по тем же формулам осуществляется поиск величин  $h_{ij}$  и  $u_{ij}$  до выполнения условий (3.14), (3.15):

4. **Результаты расчетов.** Описанный выше вычислительный алгоритм решения задачи оптимизации реализован в виде программы для ЭВМ. С применением этой программы проводились расчеты оптимальных форм при некоторых условиях закрепления пластин для различных значений параметров  $h_{\min}$ ,  $h_{\max}$ . Отметим, что объем проводимых при этом вычислений очень велик из-за наличия нескольких вложенных один в другой итерационных процессов.

Для удобства проведения и использования результатов расчетов используются безразмерные переменные

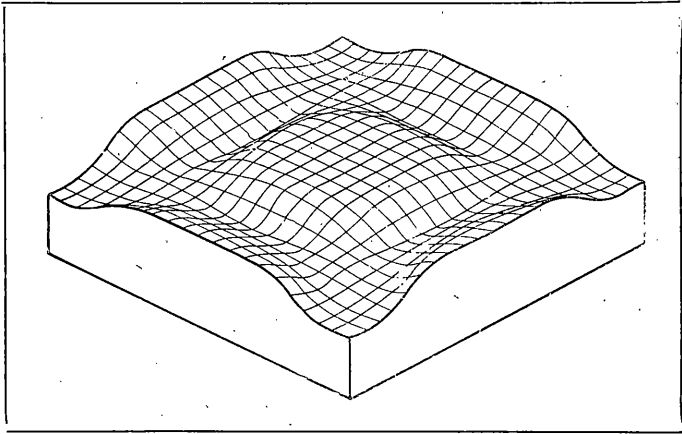
$$x' = x/\sqrt{S}, \quad y' = y/\sqrt{S}, \quad u' = u/u_0, \quad h' = hS/V, \quad P' = S^m P/K_m V$$

Введение указанных переменных и обозначений  $h'_{\min} = Sh_{\min}/V$ ,  $h'_{\max} = Sh_{\max}/V$  позволяет записать соотношения (1.3), (1.5) в виде (штрихи в дальнейшем опускаются)

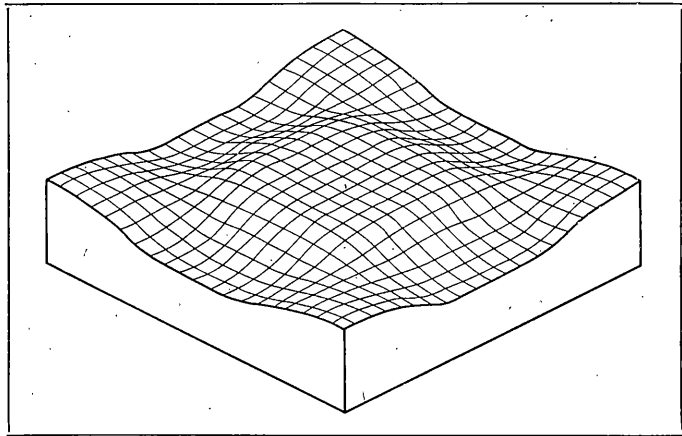
$$\int_{\Omega} h \, dx \, dy = 1, \quad u(0, 0) = 1, \quad P = \min_u \int_{\Omega} h^m U(u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) \, dx \, dy$$

Соотношение (1.4) при этом не изменится. Расчеты проводились для квадратных пластин ( $\Omega$ :  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ ), а параметры вычислительного алгоритма полагались равными  $\delta_1 = 10^{-2}$ ,  $\delta_2 = 10^{-10}$ ,  $\delta_3 = 10^{-1}$ .

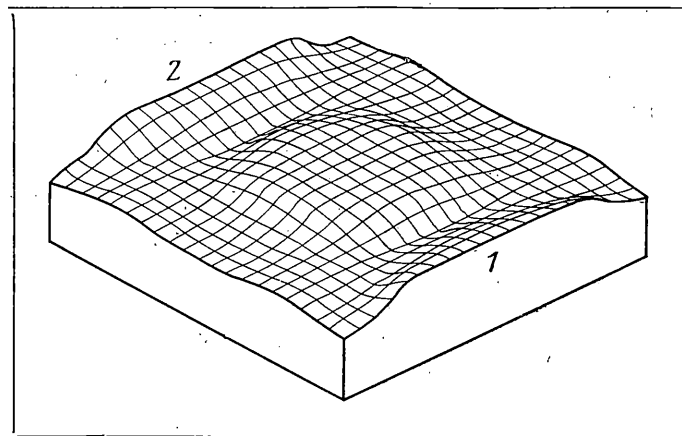




Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Рассматривались случаи жесткого и шарнирного закрепления сторон пластинки, причем в каждом из случаев использовались имеющаяся симметрия, и задача решалась в квадрате  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , представляющем четвертую часть области  $\Omega$ .

Предварительно расчеты проводились на более грубой сетке  $N=5$ , а затем число  $N$  удваивалось (т.е. полагалось  $N=10$ ), а параметру  $\Delta$  присваивалось значение  $\Delta/2$ . После этого расчеты проводились на сетке с  $N=10$ , причем в качестве начального приближения для  $h$  и  $u$  в узлах новой сетки брались величины  $u_{ij}$  и  $h_{ij}$ , получаемые интерполяцией соответствующих величин, найденных на сетке с  $N=5$ . Таким образом, окончательное решение отвечает разбиению квадрата  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  на сто ячеек, что соответствует разбиению исходной области  $\Omega$  на 400 ячеек.

Приведенные на фиг. 2-4 оптимальные формы пластин (симметричные относительно нейтральной поверхности) соответствуют случаю  $h_{\min}=0.2$ ,  $h_{\max}=0.3$ , причем для показанных вариантов начальное распределение толщин полагалось постоянным  $h^0(x, y)=0.25$ .

Опишем результаты расчетов для заземленной пластинки. С учетом имеющейся симметрии крайевые условия на границах области  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  имеют вид

$$\begin{aligned} u &= \partial u / \partial n = 0, & x &= 1, & 0 \leq y \leq 1; & y &= 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ \partial u / \partial n &= 0, & y &= 0, & 0 \leq x \leq 1; & x &= 0, & 0 \leq y \leq 1 \end{aligned}$$

где  $n$  — нормаль к границе. Значение прогибов в точке  $(0,0)$  задано  $u(0,0)=1$ . Соответствующее начальное распределению толщин  $h^0(x, y)=0.25$  значение силы  $P=0.700$  (см., например, [4]).

Найденное в результате расчетов распределение толщин приведено на фиг. 2. Расчеты показывают, что материал пластинки концентрируется в центре и в окрестности прямых, соединяющих середины ее сторон. На этих областях имеются участки, где функция  $h$  «выходит» на верхнее ограничение, т.е.  $h=h_{\max}$ .

Качественное поведение функции  $h$  вдоль указанных прямых напоминает оптимальное распределение материала в жестко заземленной балке. В углах пластинки, как следует из расчетов, использование материала менее эффективно и здесь толщины минимальны  $h=h_{\min}$ . Между областями, где  $h(x, y)=h_{\max}$  и  $h(x, y)=h_{\min}$ , имеются переходные зоны с  $h_{\min} < h(x, y) < h_{\max}$ . Значение силы  $P$ , отвечающее оптимальной пластинке,  $P_*=1.190$ .

Заметим, что при увеличении параметра  $h_{\max}$  качественное поведение решения сохраняется, однако области, где концентрируется материал пластинки, становятся более резко выраженными. Происходит «формирование» оптимальной балочной системы с уменьшающейся шириной балок и увеличивающейся высотой. Ограничения (1.4) в случае кубической зависимости  $D \sim h^3$  оказываются существенными для корректности решаемой задачи.

Опишем результаты расчетов для пластинки, опертой по контуру. Как и в случае заземленной пластинки, условия симметрии позволяют решать задачу в области  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Граничные условия имеют вид ( $U(0,0)=1$ ):

$$\begin{aligned} u &= \partial^2 u / \partial n^2 = 0, & x &= 1, & 0 \leq y \leq 1; & y &= 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ \partial u / \partial n &= 0, & x &= 0, & 0 \leq y \leq 1; & y &= 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

При отыскании численного решения изменения по сравнению со случаем заземленной пластинки имели место только в аппроксимации крайевых условий. Полученное в результате расчетов распределение толщин представлено на фиг. 3.

Найденное решение показывает, что основная масса материала концентрируется в центре и по диагоналям пластинки. На указанных направлениях толщины оптимальной пластинки выходят на верхнее ограничение  $h=h_{\max}$ . В случае опертой пластинки более выгодно располагать материал в углах, где в большей степени проявляется сцепление материала с опорами. В областях, примыкающих к серединам краев пластинки, как видно из фиг. 3,  $h=h_{\min}$ , т.е. в этих областях материал не может эффективно работать.

В этом случае для оптимальной пластинки  $P_*=0.498$ . Для пластинки постоянной толщины  $P=0.345$ .

Расчеты проводились также для случая, когда два противоположных края пластинки заземлены (1.2), а два края свободно оперты. Распределение толщин оптимальной пластинки представлено на фиг. 4 (заземление края пластинки на фиг. 4 отмечены цифрами 1, 2). Значение функционала для пластинки постоянной толщины  $P=0.583$ ; для оптимальной  $P_*=1.07$ .

Расчеты проводились на ЭЦВМ. Время, необходимое для построения одной оптимальной формы, составляло пять часов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Баничук Н. В. Об оптимальных формах упругих пластин в задачах изгиба. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 5.
2. Баничук Н. В. Об одной игровой задаче оптимизации упругих тел. Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 3.
3. Olhoff N. Optimal design of vibrating rectangular plates. Internat. J. Solids and Structures, 1974, vol. 10, No. 1.
4. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
5. Баничук Н. В. Расчет нагружения упругопластического тела. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 1.
6. Черноуцько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. М., «Наука», 1973.