УДК 534.1

О ГЕНЕРИРОВАНИИ ВЫСШИХ ГАРМОНИК В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ С ОДНИМ НЕЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

В. М. РОГАЧЕВ

(Ленинград)

Анализируются некоторые общие особенности нелинейного генерирования высших гармоник, устанавливаются связи между амплитудами бесконечного числа гармоник, как зависящие, так и не зависящие от вида нелинейной функции, излагается и обосновывается метод редукции бесконечного числа гармоник к конечному. На основе предположения о медленности изменения амплитуд и фаз решения, аппроксимируемого отрезком ряда Фурье, разрабатывается метод анализа устойчивости этого решения.

Некоторые аспекты задач анализа высших гармоник изложены в [1–3]. Вопрос о синтезе системы с заданным соотношением амплитуд высших гармоник затрагивался в [4]. Основная особенность данной работы заключается в отказе от «гипотезы фильтра», которая в механических системах часто не имеет места.

1. Рассмотрим систему, состоящую из двух произвольных устойчивых линейных подсистем и включенного между ними нелинейного элемента. Одна из подсистем находится под гармоническим воздействием. Относительно функции деформации нелинейного элемента $\xi(t)$ можно получить следующее нелинейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода [4]:

$$\xi(t)+\int_0^t R[\xi(\tau),\xi^\bullet(\tau)]g^*(t-\tau)\,d\tau=f^*(t),\qquad R(\xi,\xi^\bullet)=c\xi+b\xi^\bullet+\varphi(\xi,\xi^\bullet)\tag{1.1}$$

Здесь $R(\xi,\ \xi^\bullet)$ – реакция нелинейного элемента, $\varphi(\xi,\ \xi^\bullet)$ – некоторая нелинейная функция, $f^*(t)=2P^*\cos\lambda t$ – приведенное к входу нелинейного элемента гармоническое воздействие, $g^*(t)$ – суммарная импульсная характеристика линейных подсистем в точках присоединения.

Перемещения в точках линейных подсистем можно выразить с помощью интегралов Дюамеля. Так, для подсистемы, не содержащей возмущающую силу, имеем

$$x^{(i)}(t)=-\int_0^t R[\xi(\tau),\xi^\bullet(\tau)]g^{(i)}(t-\tau)\,d\tau\tag{1.2}$$

где $g^{(i)}(t)$ – переходная импульсная характеристика подсистемы от точки присоединения нелинейного элемента к i-й точке наблюдения.

Совокупность соотношений (1.1) и (1.2) исчерпывающим образом описывает процессы в подсистеме и является исходной при решении задач анализа и синтеза.

Переводя (1.1) в пространство изображений по Лапласу и разрешая относительно изображения $\xi(t)$, после возвращения в пространство оригиналов уравнение (1.1) примет вид

$$\xi(t)=f(t)-\int_0^t \varphi[\xi(\tau),\xi^\bullet(\tau)]g(t-\tau)\,d\tau\tag{1.3}$$

$$f(t)=L^{-1}\left\{\frac{F^*(p)}{1+(c+pb)G^*(p)}\right\},\qquad g(t)=L^{-1}\left\{G(p)=\frac{G^*(p)}{1+(c+pb)G^*(p)}\right\}$$

$$F^*(p)=L\{f^*(t)\},\qquad G^*(p)=L\{g^*(t)\}\tag{1.4}$$

Полученная в (1.4) преобразованная линейная система, характеризуемая оператором динамической податливости $G(p)$, на языке механики представляет собой параллельное включение системы с оператором $G^*(p)$, упругого и диссипативного элементов.

Установившееся периодическое (с периодом $T=2\pi/\lambda$) решение (1.3) при верхнем пределе интеграла $t\to\infty$ имеет вид

$$\xi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\xi_k\exp(jk\lambda t)\tag{1.5}$$

Предположим, что существует разложение

$$\varphi[\xi(t),\xi^\cdot(t)]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varphi_k\exp(jk\lambda t),\qquad \varphi_k=\varphi_k(\xi_0,\xi_{\pm1},\xi_{\pm2},\ldots) \tag{1.6}$$

Тогда с учетом (1.5) и (1.6) из уравнения (1.3) следует система алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд

$$\xi_k=-\varphi_kG(jk\lambda)+\delta_kP\quad(k=0,\pm1,\ldots,\pm\infty),\quad \delta_k=0,\ k\neq\pm1,\ \delta_k=1,\ k=\pm1 \tag{1.7}$$

Аналогичным образом из (1.2) получим

$$x_k^{(i)}=-\varphi_kG^{(i)}(jk\lambda)\,[1+(c+pb)G^{(i)}(jk\lambda)]^{-1} \tag{1.8}$$

Если в (1.7) перемножить правые и левые части уравнений, отличающихся только знаком индекса, то система уравнений относительно модулей амплитуд примет вид

$$|\xi_k|^2=|\varphi_k|^2|G(jk\lambda)|^2-4[\varphi_kG(-jk\lambda)+\varphi_{-k}G(jk\lambda)]P\delta_k+4\delta_kP^2 \tag{1.9}$$

Из последнего следует качественная особенность диссипативных линейных подсистем, заключающаяся в том, что при $|\varphi_k|\neq0$ k-я гармоника не может быть устранена выбором структуры и параметров подсистем. Условием отсутствия в спектре k-й гармоники ($k\neq\pm1$) является условие $G^*(jk\lambda)=G^*(-jk\lambda)=0$. Это означает, что высшая гармоника в спектре деформации нелинейного элемента отсутствует, если ее частота совпадает с собственной частотой недиссипативной системы, образованной путем соединения линейных подсистем в точках присоединения нелинейного элемента. Наличие диссипации энергии в нелинейном элементе на этом свойстве системы не отражается. Особенностью системы при $G^*(j\lambda)=G^*(-j\lambda)=0$ является независимость амплитуды основной гармоники от характеристик нелинейного элемента. Из (1.9) следует, что резонансные высшие гармоники при $|G(jk\lambda)|=\infty$ удовлетворяют уравнению $\varphi_k=0$.

Характер спектра колебаний и уровень амплитуд его составляющих в точках линейных подсистем определяются спектром и уровнем его составляющих в деформации нелинейного элемента, видом $R(\xi,\xi^\cdot)$ и величиной переходной динамической податливости $G^{(i)}(jk\lambda)$. При этом для существования в спектре перемещения i-й точки k-й гармоники необязательно ее наличие в спектре деформации нелинейного элемента. Для этого достаточно наличия соответствующего члена разложения в (1.6). Отсутствие k-й гармоники в спектре перемещения точки имеет место при выполнения $G^{(i)}(jk\lambda)=G^{(i)}(-jk\lambda)=0$, т. е. при совпадении частоты гармоники с антирезонансной частотой подсистемы.

Для установления связи между амплитудами высших гармоник, свойствами линейной части и характеристикой нелинейного элемента выберем некоторую периодическую с периодом T функцию $\psi(t)$, коэффициентами Фурье которой являются ψ_k. Тогда после разрешения каждого из уравнений системы (1.7) относительно φ_k, умножения его на ψ_{-k}, почленного сложения левых и правых частей всех уравнений и использования равенства Парсеваля можно получить соотношение

$$T^{-1}\int_0^T\varphi[\xi(t),\xi^\cdot(t)]\psi(t)\,dt=-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\xi_k\psi_{-k}}{G(jk\lambda)}+P\left(\frac{\psi_{-1}}{G(j\lambda)}+\frac{\psi_1}{G(-j\lambda)}\right) \tag{1.10}$$

Для функций $\varphi(\xi,\xi^\cdot)$ конкретного вида можно подобрать такие $\psi(t)$, которые позволяют вычислить левую часть (1.10) с учетом (1.5) и установить тем самым общие связи между амплитудами. Например, в случае релейных характеристик вида $P_0\operatorname{sign}\xi$, $P_0\operatorname{sign}\xi^\cdot$ левая часть легко вычисляется, если принять $\psi(t)=\varphi[\xi(t),\xi^\cdot(t)]$. При этом соотношение (1.10) принимает вид

$$T^{-1}\int_0^T\varphi^2[\xi(t),\xi^\cdot(t)]\,dt=\frac{\xi_0^2}{2G^2(0)}+\frac{(\xi_1'-2P)^2+\xi_1''}{|G(j\lambda)|^2}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{|\xi_k|^2}{|G(jk\lambda)|^2} \tag{1.11}$$

$$\xi_1'=\xi_1+\xi_{-1},\qquad \xi_1''=j(\xi_1-\xi_{-1})$$

Если $\varphi(\xi,\xi^\cdot)$ является однозначной функцией только ξ или $\xi^\cdot$, то (1.10) позволяет найти соотношения между амплитудами гармоник, не зависящие от вида нелинейных функций $\varphi(\xi)$ или $\varphi(\xi^\cdot)$.

При $\varphi(\xi, \xi^{\cdot})=\varphi(\xi)$ следует принять $\psi(t)=\xi^{\cdot}(t)$, тогда в левой части (1.10) получим

$$T^{-1}\int_0^T \varphi(\xi)\xi^{\cdot}\,dt = T^{-1}\Phi(\xi)\,|_0{}^T = 0 \tag{1.12}$$

Последнее равенство имеет место вследствие периодичности $\xi(t)$. С учетом (1.12) соотношение (1.10) может быть представлено в виде

$$(\xi_1'-P)^2+(\xi_1''-P')^2=r^2 \tag{1.13}$$

$$r^2=\left[\frac{P|G(j\lambda)|}{\operatorname{Im}G(j\lambda)}\right]^2-\sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k|^2S_k,\qquad P'=P\frac{\operatorname{Re}G(j\lambda)}{\operatorname{Im}G(j\lambda)}$$

$$S_k=k\frac{\operatorname{Im}G(jk\lambda)\,|G(j\lambda)|^2}{\operatorname{Im}G(j\lambda)\,|G(jk\lambda)|^2}$$

При $\varphi(\xi, \xi^{\cdot})=\varphi(\xi^{\cdot})$ следует принять $\psi(t)=\xi^{\cdot\cdot}(t)$. В результате получим выражение, аналогичное (1.13), в котором

$$r^2=\left[\frac{P|G(j\lambda)|}{\operatorname{Im}G(j\lambda)}\right]^2-\sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k|^2S_k',\qquad P'=-P\frac{\operatorname{Im}G(j\lambda)}{\operatorname{Re}G(j\lambda)}$$

$$S_k'=k^2\frac{\operatorname{Re}G(jk\lambda)}{\operatorname{Re}G(j\lambda)}\frac{|G(j\lambda)|^2}{|G(jk\lambda)|^2}$$

Значение соотношения (1.13) заключается в том, что оно дает жесткую связь амплитуд всех гармоник, независимую от вида нелинейных функций $\varphi(\xi)$ или $\varphi(\xi^{\cdot})$ и определяемую только значениями оператора $G(p)$ в дискретных точках и величиной амплитуды возмущения $2P$. Этим обстоятельством можно воспользоваться для целенаправленного управления спектром.

Кроме этого, из (1.13) следуют некоторые качественные особенности нелинейного генерирования высших гармоник и их влияния на первую гармонику.

Так, из (1.13) в случае нелинейности упругой характеристики следует $\xi_k\to 0$ $(k\to\infty)$ в силу необходимого признака сходимости бесконечного ряда и конечность всех амплитуд гармоник. Кроме того, при $k\to\infty$ амплитуды высших гармоник являются малыми более высокого порядка, чем величина S_k^{-1}.

Вследствие положительности всех членов ряда согласно признаку Даламбера, начиная с некоторого номера N, имеем следующий закон убывания амплитуд гармоник: $|\xi_{k+1}||\xi_k|^{-1}<|S_k|^{1/2}|S_{k+1}|^{-1/2}$. Заметим, что как и в теории рядов Фурье указать номер гармоники, с которого начинает выполняться это неравенство, не удается.

Отмеченные особенности позволяют ориентировочно оценить порядок амплитуд и обосновать редукцию бесконечного числа гармоник к конечному.

Качественная особенность влияния высших гармоник на основную заключается в уменьшении радиуса окружности с центром в точке (P, P'), на которой располагается точка с координатами ξ_1' и ξ_1''. Минимальное значение этого радиуса равно нулю, максимальное значение имеет место при $|\xi_k|=0$ $(k\neq 1)$.

Следовательно, внутренность круга, очерченного окружностью (1.13) с радиусом $r^2=P^2|G(j\lambda)|^2(\operatorname{Im}G(j\lambda))^{-2}$, представляет собой геометрическое место точек, соответствующих возможным значениям составляющих ξ_1', ξ_1'' амплитуды первой гармоники. Этим можно воспользоваться при оценке точности гармонического приближения.

При рассмотрении систем с конкретными видами характеристик нелинейного элемента можно выявить дополнительные особенности нелинейного генерирования на основе изучения (1.10). Например, для релейных характеристик левая часть (1.11) равна $2P_0{}^2$. Это выражение после преобразований принимает вид, аналогичный (1.13)

$$(\xi_1'-2P)^2+\xi_1''^2=2P_0|G(j\lambda)|^2-\frac{\xi_0{}^2}{2}\frac{|G(j\lambda)|^2}{G^2(0)}-\sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k|^2\frac{|G(j\lambda)|^2}{|G(jk\lambda)|^2}$$

и открывает возможность более детального исследования как поведения гармоник, так и оценки погрешностей.

Отметим, что изложенный подход обладает значительной общностью и позволяет провести не только качественный анализ, но и количественный. С этой целью выбирается подходящая система функций $\psi_n(t)$. В случае ограничения в (1.5) некоторым конечным числом гармоник систему функций можно принять, например, в виде $\psi_n(t)=\exp(jn\lambda t)$.

Если в (1.5) сохранить основную гармонику, а в качестве вспомогательных функций выбрать $\exp(jn\lambda t)$ $(n=\pm 1)$, то из (1.10) следует система уравнений, эквивалентная системе, получаемой методами гармонического баланса или гармонической линеаризации.

Таким образом результаты указанных методов являются частными случаями изложенного подхода, который не предполагает наличия членов с малым параметром в исходном уравнении, а также выполнения гипотезы «фильтра».

2. Используя результаты п. 1, из бесконечного множества гармоник можно выделить некоторое подмножество N, относительно амплитуд которых нет оснований для заключения об их малости.

Запишем точное решение (1.3) в виде

$$\xi(t)=\xi_*(t)+\varepsilon\Delta\xi_*(t)+\varepsilon\varkappa(t) \tag{2.1}$$

$$\chi(t)=\sum_{n\in N}\chi_n\exp(jn\lambda t)\qquad(\chi(t)=\xi_*(t),\Delta\xi_*(t)),\qquad \varkappa(t)=\sum_{k\,\overline{\in}\,N}\varkappa_k\exp(jk\lambda t)$$

В (2.1) $\xi_*(t)$ представляет приближенное решение, аппроксимируемое гармониками подмножества N, $\varepsilon\Delta\xi_*(t)$ — отклонение от точных значений амплитуд приближенного решения, $\varepsilon\varkappa(t)$ — все остальные гармоники, не вошедшие в подмножество N, ε — малый параметр. Особенность структуры решения заключается в том, что малый параметр вводится в решение, а не в исходное уравнение.

Структура решения (2.1) позволяет представить коэффициенты Фурье разложения (1.6) в следующей форме:

$$\varphi_k=\varphi_k^*+\varepsilon\sum_{n\in N}\Delta\xi_n\varphi_{kn}+\varepsilon\sum_{m\,\overline{\in}\,N}\varkappa_m\varphi_{km}+O(\varepsilon^2) \tag{2.2}$$

$$\varphi_k^*=T^{-1}\int_0^T\varphi(\xi_*,\xi_*^{\boldsymbol{\cdot}})\exp(-jk\lambda t)\,dt,$$

$$\varphi_{kq}=T^{-1}\int_0^T\left(\frac{\partial\varphi(\xi_*,\xi_*^{\boldsymbol{\cdot}})}{\partial\xi_*}+jq\lambda\frac{\partial\varphi(\xi_*,\xi_*^{\boldsymbol{\cdot}})}{\partial\xi_*^{\boldsymbol{\cdot}}}\right)\exp[j(q-k)\lambda t]\,dt$$

Входящие в (2.2) функции амплитуд гармоник φ_k^*, φ_{kq} являются ограниченными как в случае гладких функций $\varphi(\xi,\xi^{\boldsymbol{\cdot}})$, так и кусочно-гладких. Поэтому соответствующие члены имеют порядок малости ε. Заметим, что указанный подход позволяет устранить затруднения, которые не удалось преодолеть при математическом обосновании метода гармонической линеаризации в случае кусочно-гладких функций [3].

Система алгебраических уравнений относительно приближенных значений амплитуд ξ_k^* гармоник подмножества N имеет вид

$$\xi_k^*=-\varphi_k^*G(jk\lambda)+\delta_kP\qquad(k\in N) \tag{2.3}$$

Выделяя из (1.7) систему уравнений относительно точных значений ξ_k и вычитая из нее (2.3), придем к системе, определяющей в первом приближении отклонения

$$\varepsilon\sum_{i\in N}\alpha_{ik}\Delta\xi_i=\varepsilon\beta_k\qquad(k\in N) \tag{2.4}$$

$$\alpha_{ik}=\delta_{ik}+G(jk\lambda)\varphi_{ki},\qquad \beta_k=-G(jk\lambda)\sum_{m\,\overline{\in}\,N}\varkappa_m\varphi_{km}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера.

Система (2.4) характеризует влияние гармоник, не входящих в подмножество N, на точность определения амплитуд гармоник из подмножества N, т. е. характеризует чувствительность полигармонического решения к отброшенным гармоникам. Эти отклонения амплитуд будут иметь порядок малости ε, если определитель системы (2.4) отличен от нуля, т. е.

$$\Delta(\alpha_{ih})\neq 0 \tag{2.5}$$

Если систему (2.4) разрешить по правилу Крамера, то можно заметить, что отклонения $\varepsilon\Delta\xi_k$ малы также и в том случае, когда будут малы соответствующие коэффициенты. В этом случае можно снять требование о малости высших гармоник в (2.1).

В общем случае требуется найти условия, при которых сумма гармоник, не вошедших в подмножество N, мала. Для амплитуд этих гармоник из (1.7) с учетом (2.2) имеем бесконечную систему уравнений

$$\varepsilon\varkappa_k = -\varphi_k^* G(jk\lambda) - \varepsilon G(jk\lambda)\left(\sum_{n\in N}\Delta\xi_n\varphi_{kn} + \sum_{m\in N}\varkappa_m\varphi_{km}\right) - O(\varepsilon^2) \tag{2.6}$$

Отбрасывая в правых частях системы (2.5) члены высшего порядка малости, перепишем ее в виде

$$(\varepsilon|\varkappa_k^*|)^2 = |\varphi_k^*|^2|G(jk\lambda)|^2 \tag{2.7}$$

Поскольку в реальных механических системах $|G(jk\lambda)|$ представляет собой сложную немонотонную функцию $k\lambda$, то из дискретной последовательности $|G(jk\lambda)|$ выберем наибольшее. Тогда после сложения левых и правых частей всех уравнений (2.7) можно получить

$$\left(\sum_{k\in N}\varepsilon^2|\varkappa_k|^2\right)\left(\sum_{k\in N}|\xi_k^*|^2\right)^{-1} \leqslant \max_{k\in N}|G(jk\lambda)|^2\left(\sum_{k\in N}|\xi_k^*|^2\right)^{-1}\times$$
$$\times\left[2T^{-1}\int_0^T\varphi^2(\xi_*,\dot\xi_*)\,dt - \sum_{k\in N}|\varphi_k^*|^2\right] \tag{2.8}$$

Условие (2.8) определяет относительную долю суммы квадратов модулей амплитуд высших гармоник.

Таким образом, установившееся решение интегрального уравнения (1.3) может быть аппроксимировано суммой гармоник подмножества N, амплитуды которых определяются конечной системой алгебраических уравнений (2.3), если выполняется условие (2.5), а правая часть (2.8) имеет порядок малости ε^2.

3. Рассмотрим вопрос об устойчивости приближенного решения, определяемого изложенным выше методом. Возмущенное движение системы описывается интегральным уравнением

$$\xi(t) + \int_0^t \varphi(\xi,\dot\xi)g(t-\tau)\,d\tau = f(t) + f_1(t) \tag{3.1}$$

где $f_1(t)$ — реакция преобразованной линейной части системы на ненулевые начальные условия, обладающая свойством

$$\lim_{t\to\infty} f_1(t) = 0, \qquad \int_0^\infty |f_1(t)|\,dt < \infty$$

Анализ устойчивости $\xi_*(t)$ можно провести, рассматривая интегральное уравнение относительно вариации $\xi_*(t)$ и сводя его к разностному уравнению в пространстве изображений по Лапласу.

Решение разностного уравнения приводит к бесконечному определителю типа определителя Хилла. При этом возникают трудности с обоснованием редукции бесконечного определителя к конечному.

В связи с этим ниже используется метод, основанный на предположении о том, что малые ненулевые начальные условия вызывают медленные по отношению к периоду колебаний T изменения амплитуд колебаний гармоник подмножества N. Структура решения (3.1) при этом имеет вид

$$\xi(t) = \sum_{k\in N}[\xi_k^* + \eta_k(t)]\exp(jk\lambda t)$$

Вследствие медленности изменения $\eta_k(t)$ в первом приближении получим

$$\varphi(\xi,\xi^{\cdot})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varphi_k^*\exp(jk\lambda t)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp(jk\lambda t)\sum_{i\in N}\frac{\partial\varphi_k^*}{\partial\xi_i^*}\eta_i(t) \tag{3.2}$$

Подставляя (3.2) в (3.1) и учитывая результаты п. 2, приходим к уравнению

$$\sum_{k\in N}\exp(jk\lambda t)\left[\eta_k(t)+\sum_{i\in N}\frac{\partial\varphi_k^*}{\partial\xi_i^*}\int_0^t\eta_i(\tau)\exp[jk\lambda(\tau-t)]g(t-\tau)\,d\tau\right]=f_1(t) \tag{3.3}$$

На совокупность $2N+1$ функций $\eta_k(t)$ можно наложить $2N$ произвольных условий. В качестве таких условий примем условия обращения в нуль выражений в квадратных скобках уравнения (3.3) для всех $k\in N$, кроме $k=1$. Тогда получим систему линейных интегральных уравнений вида

$$\eta_k(t)+\sum_{i\in N}\frac{\partial\varphi_k^*}{\partial\xi_i^*}\int_0^t\eta_i(\tau)\exp[jk\lambda(\tau-t)]g(t-\tau)\,d\tau=f_1(t)\exp(-jk\lambda t)\delta_k$$

$$k\in N,\quad \delta_k=0,\quad k\neq 1,\quad \delta_k=1,\quad k=1 \tag{3.4}$$

Переведем (3.4) в пространство изображений по Лапласу

$$\eta_k(p)+\sum_{i\in N}\frac{\partial\varphi_k^*}{\partial\xi_i^*}\eta_i(p)G(p+jk\lambda)=F_1(p+j\lambda)\delta_k \tag{3.5}$$

Решением (3.5) являются функции

$$\eta_k(p)=F_1(p+k\lambda)\frac{\Delta_k(p)}{\Delta(p)} \tag{3.6}$$

где i-й элемент k-й строки определителя системы $\Delta(p)$ имеет вид

$$\delta_{ik}+\frac{\partial\varphi_k^*}{\partial\xi_i^*}G(p+jk\lambda)$$

Из (3.6) следует, что приближенное решение будет устойчиво, если вещественные части корней уравнения $\Delta(p)=0$ будут отрицательны. Кроме того, решение (3.6) позволяет заключить о достоверности предположения о медленности изменения амплитуд гармоник.

Изложенные выше результаты в своей совокупности представляют собой аппарат для исследования особенностей нелинейного генерирования гармоник без ограничения их числа. На основе этих результатов для систем с конкретными нелинейными характеристиками можно решать задачи анализа и синтеза полигармонических колебаний.

Поступила 24 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. М., «Мир», 1968.
2. *Вульфсон И. И., Коловский М. З.* Нелинейные задачи динамики машин. Л., «Машиностроение», 1968.
3. *Попов Е. П.* Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. М., «Наука», 1973.
4. *Рогачев В. М.* Полигармонические колебания сложных нелинейных систем. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 1.