

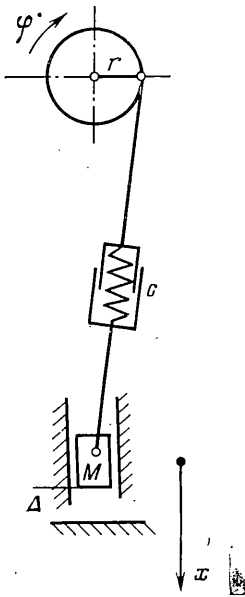
ВИБРОУДАРНЫЕ РЕЖИМЫ В СИСТЕМАХ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

В. И. БАБИЦКИЙ, Б. А. БОРОВКОВ

(Москва)

Изучению взаимодействия упругих систем с источником энергии, поддерживающим колебания, посвящены работы [1-7]. Анализ работы широкого класса машин и устройств различного функционального назначения приводит к рассмотрению виброударных режимов систем с ограниченным возбуждением [8]. В данной статье излагается подход к решению подобных задач на основе метода гармонической линеаризации. Исследуются основные эффекты взаимодействия. Оцениваются колебания ротора приводного электро- или гидродвигателя с учетом переходных процессов в двигателе, отражаемых его динамической характеристикой. Проводится анализ устойчивости решений и процессов установления колебаний.

1. Рассматриваемая система (фиг. 1) состоит из приводного электро- или гидродвигателя, развивающего переменный момент L , ротор которого имеет момент инерции I и посредством установленного на нем кривошипа радиуса r приводит в движение через кривошипно-шатунный механизм ударник массой M , подпружиненный относительно механизма с помощью упругого элемента жесткостью c . Демпфирование колебаний ударника за счет трения в направляющих и других потерь опишем с помощью сил вязкого сопротивления, пропорциональных абсолютной скорости ударника с коэффициентом b . Перемещения ударника ограничены неподвижной наковальней, установленной с зазором Δ (отрицательное Δ соответствует натягу) по отношению к положению ударника при недеформированной пружине и горизонтальном расположении кривошипа.



Фиг. 1

Отсчитывая от указанных положений абсолютные перемещения ударника $x(t)$ и углы поворота кривошипа $\varphi(t)$ и полагая, что длина кривошипа существенно меньше длины шатуна, запишем дифференциальные уравнения для этих обобщенных координат, отнесенные к единичным величинам массы и момента инерции [6], в виде

$$\begin{aligned} x'' + bx' + cx + \Phi(x) + H(x') &= cr \sin \varphi \\ \varphi'' &= L + cr(x - r \sin \varphi) \cos \varphi \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\Phi(x)$, $H(x')$ — упругая и диссипативная силовые характеристики ударного взаимодействия.

Для определения момента L используем уравнение динамической характеристики двигателя [9]:

$$L' + \tau L = \mu \tau (\omega_0 - \varphi') \quad (1.2)$$

где $\tau = T^{-1}$, T — постоянная времени двигателя (электромагнитная для электродвигателя и гидравлическая для гидродвигателя); $\mu > 0$ — коэффициент пропорциональности; ω_0 — скорость холостого хода.

Полагая, что величины r и L пропорциональны малому параметру ε , из второго уравнения (1.1) определяем

$$\varphi = \omega t + \varepsilon \chi(t) \quad (\omega = \text{const}) \quad (1.3)$$

где ω — неизвестная средняя угловая скорость вращения ротора; $\chi(t)$ — некоторая функция времени. Малая величина L предполагает малые колебания угловой скорости двигателя по сравнению с ее средним значением. Подставляя (1.3) в (1.1), с точностью до ε имеем

$$x'' + bx' + cx + \Phi(x) + H(x') = \varepsilon cr \sin \omega t \quad (1.4)$$

$$\varphi'' = \varepsilon(L + crx \cos \omega t) \quad (1.5)$$

В результате уравнение (1.4) может рассматриваться независимо. Для его решения используем метод гармонической линеаризации. Представим $\Phi(x)$ в виде

$$\Phi(x) = c_0(x - \Delta)\eta(x - \Delta) \quad (c_0 = \text{const}) \quad (1.6)$$

где $\eta(x)$ — функция единичного скачка. Отыскивая приближенное периодическое решение уравнения (1.4) в виде

$$x(t) \approx m_x + a_x \sin(\omega t - \theta) \quad (m_x = \text{const}) \quad (1.7)$$

осуществим гармоническую линеаризацию функции $\Phi(x)$

$$\Phi(x) \approx m_f + k(x - m_x) \quad (1.8)$$

Коэффициенты m_f и k гармонической линеаризации для используемого далее предельного случая $c_0 \rightarrow \infty$ будут следующими [10]:

$$m_f = c(a_x - \Delta), \quad k = 2c(1 - \Delta/a_x), \quad m_x + a_x = \Delta \quad (1.9)$$

Для характеристики $H(x')$ с учетом резонансного характера отыскиваемого решения согласно [11] можно принять

$$H(x') \approx \beta x' = 0.16(1 - R^2)\omega x' \quad (1.10)$$

где R — коэффициент восстановления скорости при ударе, при этом далее, естественно, полагается, что демпфирующие свойства системы допускают указанный характер решений.

Подставляя (1.7) в (1.4) и учитывая (1.8), (1.10), получим с помощью гармонического баланса

$$\begin{aligned} cm_x + m_f &= 0, \quad (c + k - \omega^2) \sin \theta = (b + \beta)\omega \cos \theta \\ (c + k - \omega^2) a_x \cos \theta &= \varepsilon cr - (b + \beta)\omega a_x \sin \theta \end{aligned} \quad (1.11)$$

Из последнего соотношения находим

$$\begin{aligned} a_x &= \varepsilon cr [(c + k - \omega^2)^2 + (b + \beta)^2 \omega^2]^{-1/2} \\ \sin \theta &= \frac{(b + \beta)\omega a_x}{\varepsilon cr}, \quad \cos \theta = \frac{(c + k - \omega^2) a_x}{\varepsilon cr} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Определим теперь соответствующие приближенные решения системы уравнений (1.2); (1.5). С учетом (1.7) указанная система уравнений может рассматриваться при решении как линейная неавтономная, подвергающаяся действию постоянного момента и бигармонического возмущения с ча-

стотами ω и 2ω . Действительно, подставляя (1.7) в (1.5), имеем

$$\varphi'' - \varepsilon L = \varepsilon c r [-1/2 a_x \sin \theta + m_x \cos \omega t + 1/2 a_x \sin(2\omega t - \theta)] \quad (1.13)$$

Представляя решение системы уравнений (1.2), (1.13) в виде

$$\varphi' = \omega + a_{\omega}^I \sin(\omega t - \Psi_1) + a_{\omega}^{II} \sin(2\omega t - \Psi_2)$$

$$L = m_L - a_L^I \sin(\omega t - \Xi_1) - a_L^{II} \sin(2\omega t - \Xi_2)$$

и пренебрегая с учетом замечания к (1.3) малыми членами, содержащими отношения a_{ω}^I/ω и a_{ω}^{II}/ω , получим с помощью гармонического баланса

$$\mu(\omega_0 - \omega) - 1/2 c r a_x \sin \theta = 0 \quad (m_L = \mu(\omega_0 - \omega))$$

$$a_{\omega}^I = -\frac{\varepsilon c r}{\omega} m_x, \quad a_{\omega}^{II} = \frac{\varepsilon c r}{4\omega} a_x, \quad \Psi_1 = \pi, \quad \operatorname{tg} \Psi_2 = -\frac{c+k-\omega^2}{(b+\beta)\omega} \quad (1.14)$$

$$a_L^I = -\frac{\varepsilon c r \tau \mu}{\omega(\tau^2 + \omega^2)^{1/2}} m_x, \quad a_L^{II} = \frac{\varepsilon c r \tau \mu}{4\omega(\tau^2 + \omega^2)^{1/2}} a_x$$

$$\operatorname{tg} \Xi_1 = \frac{\omega}{\tau}, \quad \operatorname{tg} \Xi_2 = \frac{\tau \sin \Psi_2 + 2\omega \cos \Psi_2}{\tau \cos \Psi_2 - 2\omega \sin \Psi_2}$$

Заметим, что гармоника колебаний вала с частотой ω появляется лишь вследствие несимметрии закона движения ударника ($m_x \neq 0$), возникающей из-за односторонних соударений.

Из первого уравнения (1.14) с учетом выражений (1.12) находим

$$\mu(\omega_0 - \omega) - 1/2 (b + \beta) \omega a_x^2 = 0 \quad (1.15)$$

Система конечных уравнений (1.12), (1.15) позволяет определить амплитуды колебаний a_x и среднюю угловую скорость двигателя ω . Аналогичные соотношения были получены ранее асимптотическими методами [6].

Характер возможных значений величины ω в зависимости от установки ограничителя и мощности двигателя, задающей величину ω_0 , удобно определяется графическим решением уравнения (1.15) с учетом (1.12) и (1.9). На фиг. 2 показано графическое решение для случаев $\Delta > 0$ (а), $\Delta = 0$ (б), $\Delta < 0$ (в). Величина $m_s = 1/2 (b + \beta) \omega a_x^2$ — средний момент нагрузки на двигатель, вызванной колебаниями в системе. После определения ω могут быть получены все остальные характеристики колебаний. Необходимо отметить, что в случае установки системы с предварительным натягом ($\Delta < 0$) выход на виброударный режим может быть осуществлен лишь в результате «жесткого» возбуждения.

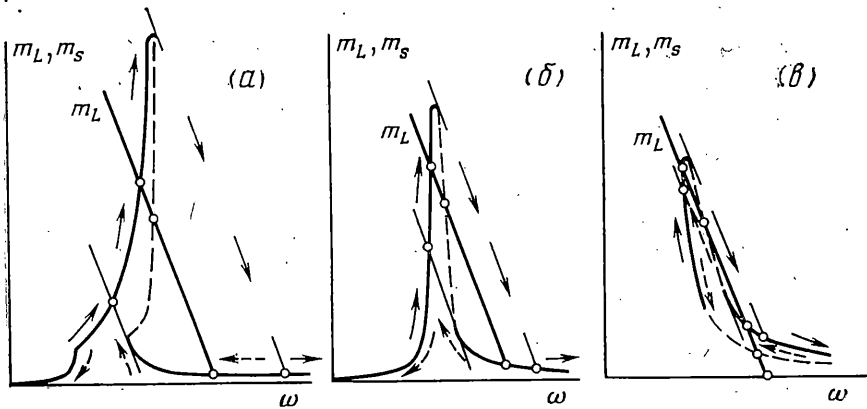
2. Исследуем устойчивость полученных решений по отношению к малым возмущениям. Полагаем, что эти возмущения не изменяют формы стационарных решений, а приводят лишь к медленным изменениям параметров, определяющих решения, т. е. в возмущенном движении порождающее решение имеет вид

$$x(t) = m_x^\circ(t) + a_x^\circ(t) \sin[\omega^\circ(t)t - \theta^\circ(t)] \quad (2.1)$$

причем угловая скорость $\omega^\circ(t)$ определяется статической характеристикой двигателя

$$m_L^\circ(t) = \mu[\omega_0 - \omega^\circ(t)] \quad (2.2)$$

Верхний индекс означает, что данная величина рассматривается как медленная переменная, изменяющаяся в окрестности постоянного значения, соответствующего стационарному решению.



Фиг. 2

Для суждения об устойчивости используем энергетическое условие [12]:

$$\frac{\partial}{\partial a_x^\circ} (E_c - E_b)_{a_x^\circ = a_x} > 0 \quad (2.3)$$

в котором E_c — работа сил сопротивления $(b + \beta)x^*$ на движении (2.4)

$$E_c = \int_0^{2\pi/\omega^\circ} (b + \beta)x^2 dt = \pi(b + \beta)\omega^\circ a_x^{\circ 2} \quad (2.4)$$

E_b — работа возмущающей силы $P(t) = \varepsilon cr \sin \omega^\circ t$ на том же движении

$$E_b = \int_0^{2\pi/\omega^\circ} P x^* dt = \pi \varepsilon cr a_x^\circ \sin \theta^\circ \quad (2.5)$$

Подставляя (2.4), (2.5) в (2.3), имеем

$$\frac{\partial}{\partial a_x^\circ} \left(b + \beta - \frac{\varepsilon cr \sin \theta^\circ}{\omega^\circ a_x^\circ} \right)_{a_x^\circ = a_x} > 0 \quad (2.6)$$

Вводя в (2.1) четыре неизвестные функции вместо одной, свяжем их тремя произвольными условиями. Принимая a_x° за независимую переменную, считаем, что в возмущенном движении $m_x^\circ(t)$ и $a_x^\circ(t)$, $\theta^\circ(t)$ и $a_x^\circ(t)$, а также $\omega^\circ(t)$ и $a_x^\circ(t)$ связаны такими же зависимостями, как и в стационарном случае. Дифференцируя (2.6) с учетом этих зависимостей, имеем

$$\left[\frac{\partial \beta}{\partial a_x^\circ} + \frac{\varepsilon cr}{\omega^{\circ 2} a_x^{\circ 2}} \left(\omega^\circ \sin \theta^\circ + \frac{\partial \omega^\circ}{\partial a_x^\circ} \sin \theta^\circ - \frac{\partial \theta^\circ}{\partial a_x^\circ} \omega^\circ a_x^\circ \cos \theta^\circ \right) \right]_{a_x^\circ = a_x} > 0 \quad (2.7)$$

Дифференцируя соотношение для $\cos \theta$ в (1.12) как неявную функцию $\theta^\circ(a_x^\circ)$, найдем

$$\left(\frac{\partial \theta^\circ}{\partial a_x^\circ} \right)_{a_x^\circ = a_x} = - \frac{1}{\varepsilon cr \sin \theta^\circ} \left(c + k - \omega^{\circ 2} + \frac{\partial k}{\partial a_x^\circ} - 2 \frac{\partial \omega^\circ}{\partial a_x^\circ} \omega^\circ a_x^\circ \right)_{a_x^\circ = a_x} \quad (2.8)$$

Выражение $(\partial\omega^\circ/\partial a_x^\circ)_{a_x^\circ=a_x}$ получим дифференцированием частотного уравнения (1.15)

$$\left(\frac{\partial\omega^\circ}{\partial a_x^\circ}\right)_{a_x^\circ=a_x} = - \left\{ \frac{\mu\omega_0 a_x^\circ [a_x^\circ \partial\beta/\partial a_x^\circ + 2(b+\beta)]}{2[\mu^{+1/2}(b+\beta)a_x^{\circ 2}]^2} \right\}_{a_x^\circ=a_x} \quad (2.9)$$

Полагая для упрощения конечных соотношений $\beta=0$, найдем из (2.7) с учетом (1.12), (2.8), (2.9)

$$b^2\omega^2 - \frac{\mu\omega_0 b\omega a_x^2}{(\mu^{+1/2} b a_x^2)^2} [b^2 - 2(c+k-\omega^2)] + (c+k-\omega^2) [c+k-\omega^2 + (a_x^\circ \partial k/\partial a_x^\circ)_{a_x^\circ=a_x}] > 0 \quad (2.10)$$

или в окончательном виде с учетом (1.9)

$$b^2\omega^2 - \frac{\mu\omega_0 b\omega a_x^2}{(\mu^{+1/2} b a_x^2)^2} [b^2 - 2(3c - 2c\Delta a_x^{-1} - \omega^2)] + (3c - 2c\Delta a_x^{-1} - \omega^2) (3c - \omega^2) > 0 \quad (2.11)$$

Неустойчивые решения, найденные с помощью критерия (2.11), нанесены на фиг. 2 пунктиром. При этом следует отметить, что при установке ограничителя с предварительным натягом ($\Delta < 0$) выполнение условия устойчивости сильно зависит от параметра μ , характеризующего жесткость характеристики двигателя. При изменении μ от ∞ до 0 выявлены аналогично [6] четыре качественно отличающиеся области значений μ . При очень крутых характеристиках система ведет себя подобно системе с заданной частотой возбуждения ω , и ее неустойчивые решения располагаются вдоль нижней ветви характеристики $m_s(\omega)$. При меньших значениях μ критерий (2.11) выполняется для всех стационарных решений, что создает известную неопределенность. Описанный в [6] эксперимент, проведенный для аналогичной ситуации, показал отсутствие здесь устойчивых периодических движений. В третьей области, соответствующей еще меньшим значениям μ , неустойчивые решения появляются и на участке верхней ветви зависимости $m_s(\omega)$. Этот случай показан на фиг. 2, в. Наконец, в случае, когда значение μ мало, критерий устойчивости указывает на близость системы к границе области устойчивости. Согласно [6] стационарные режимы в такой ситуации оказались не реализуемыми в эксперименте.

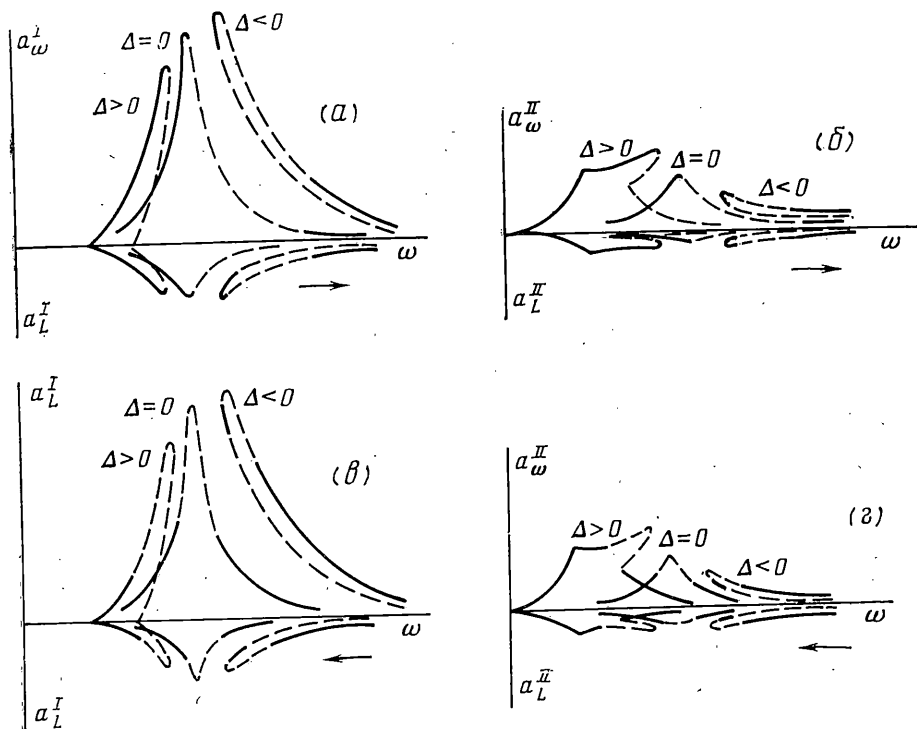
Полагая, что управление мощностью двигателя соответствует перемещению его характеристики $m_L(\omega)$ параллельно самой себе, получаем, что при увеличении мощности изменения момента нагрузки $m_s(\omega)$ и угловой скорости ω будут следовать направлению, обозначенному на фиг. 2 сплошными стрелками, а при уменьшении — пунктирными стрелками. В моменты перескока рабочей точки характеристики $m_L(\omega)$ должны наблюдаться переходные процессы, приводящие к конечному изменению величины ω .

На фиг. 3 по формулам (1.14) построены амплитудно-частотные характеристики для основных гармонических компонент колебаний скорости и момента двигателя, соответствующие разгону (фиг. 3, а, б) и торможению (фиг. 3, в, г).

3. Рассмотрим процессы установления колебаний системы. В отличие от процессов, исследованных в п. 2, теперь нужно отказаться от допущения о медленном характере изменения амплитуды $a_x^\circ(t)$, так как даже при нулевых начальных условиях процесс установления колебаний большой амплитуды может осуществиться за небольшое число периодов. В связи с этим характер изменения $a_x^\circ(t)$ удобно аппроксимировать зависимостью

$$da_x^\circ/dt = a_x^\circ \xi^\circ \quad (3.1)$$

где ξ° — некоторая медленно изменяющаяся величина, определяемая в процессе решения. С учетом сказанного будем отыскивать приближенное решение уравнения (1.4) в виде (2.1), (3.1), полагая ξ° , θ° и ω° медленно меняющимися величинами. При этом для нелинейностей типа $\Phi(x)$ коэффициенты гармонической линеаризации имеют ту же структуру, что и в стационарном случае с заменой a_x на a_x° [13]. Угловая скорость $\omega^\circ(t)$ по-прежнему определяется характеристикой (2.2). Это предполагает до-



Фиг. 3

статочно медленный темп переходных процессов на роторе двигателя, что и наблюдается в эффекте Зоммерфельда [6].

Подставляя (2.1), (3.1) в (1.4) и учитывая (1.8), (1.10), получим с помощью гармонического баланса

$$cm_x^\circ + m_f^\circ = 0 \tag{3.2}$$

$$[\xi^{\circ 2} + (b + \beta)\xi^\circ + (c + k - \omega^{\circ 2})] \sin \theta^\circ = [2\xi^{\circ 2} + (b + \beta)] \omega^\circ \cos \theta^\circ$$

$$[\xi^{\circ 2} + (b + \beta)\xi^\circ + (c + k - \omega^{\circ 2})] a_x^\circ \cos \theta^\circ = \varepsilon cr - [2\xi^{\circ 2} + (b + \beta)] \omega^\circ a_x^\circ \sin \theta^\circ$$

Из последних двух уравнений находим

$$\xi^\circ = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon cr \sin \theta^\circ}{\omega^\circ a_x^\circ} - b - \beta \right), \quad \xi^{\circ 2} + (b + \beta)\xi^\circ + c + k - \omega^{\circ 2} - \frac{\varepsilon cr \cos \theta^\circ}{a_x^\circ} = 0 \tag{3.3}$$

Система уравнений (3.3) дает зависимости $\theta^\circ(a_x^\circ)$ и $\xi^\circ(a_x^\circ)$. При $\xi^\circ = 0$ получаем условия существования стационарного режима ($a_x^\circ = a_x = \text{const}$), совпадающие, естественно, с (1.12).

Процесс установления колебаний определяется функцией $\xi^\circ(a_x^\circ)$. Для ее получения исключим фазу θ° из системы уравнений (3.3). Имеем

$$\xi^{\circ 2} + (b + \beta)\xi^\circ + c + k - \omega^{\circ 2} - \left[\left(\frac{\varepsilon cr}{a_x^\circ} \right)^2 - (2\xi^\circ + b + \beta)^2 \omega^{\circ 2} \right]^{1/2} = 0 \quad (3.4)$$

Выражение (3.4) является алгебраическим уравнением четвертой степени относительно искомой величины ξ° . Полагая для упрощения дальнейшего анализа $b + \beta = 0$, из уравнения (3.4) находим окончательно

$$\xi^{\circ 2} = -(c + k + \omega^{\circ 2}) + (c + k + \omega^{\circ 2}) \left[1 + \frac{(\varepsilon cr/a_x^\circ)^2 - (c + k - \omega^{\circ 2})^2}{(c + k + \omega^{\circ 2})^2} \right]^{1/2} \quad (3.5)$$

Определим теперь ускорение ротора двигателя в переходном процессе. Подставив (2.1) в (1.5) и представляя решение уравнения (1.5) в виде

$$\dot{\varphi} = \omega^\circ + \varepsilon \chi^\circ(t) \quad (3.6)$$

получим, усредняя по быстро осциллирующим членам

$$d\omega^\circ/dt = \varepsilon [\mu(\omega_0 - \omega^\circ) - 1/2 cr a_x^\circ \sin \theta^\circ] \quad (3.7)$$

Из уравнения (3.7) с учетом выражения (3.3) при $b + \beta = 0$ находим

$$\frac{d\omega^\circ}{dt} = \varepsilon \left[\mu(\omega_0 - \omega^\circ) - \frac{\xi^\circ \omega^\circ a_x^{\circ 2}}{\varepsilon} \right] \quad (3.8)$$

Рассмотрим случай, когда в переходном процессе удовлетворяется резонансное соотношение

$$c + k - \omega^{\circ 2} = 0 \quad (3.9)$$

Подставляя (3.9) в (3.5), разложим радикал в степенной ряд по параметру ε , ограничиваясь линейным членом. В результате получим

$$\xi^\circ = 1/2 \varepsilon cr (\omega^\circ a_x^\circ)^{-1} \quad (3.10)$$

Подставляя (3.10) в (3.1), имеем $da_x^\circ/dt = 1/2 \varepsilon cr (\omega^\circ)^{-1}$ и, следовательно

$$a_x^\circ = 1/2 \varepsilon cr (\omega^\circ)^{-1} t = 1/2 \varepsilon cr (c + k)^{-1/2} t \quad (3.11)$$

Уравнение (3.8) с учетом (3.10) принимает вид

$$d\omega^\circ/dt = \varepsilon [\mu(\omega_0 - \omega^\circ) - 1/2 cr a_x^\circ] \quad (3.12)$$

Подставляя в (3.11) значения k для различных Δ , можно установить, что жесткая нелинейность ($\Delta > 0$) приводит к постепенному уменьшению скорости нарастания резонансных колебаний при разгоне, мягкая же нелинейность ($\Delta < 0$) увеличивает скорость нарастания колебаний при выбеге. Естественно, что нарастание амплитуды прекращается при достижении стационарных значений. Из уравнения (3.12) следует, что при выполнении условия (3.9) момент нагрузки на двигатель максимален. Таким образом выражения (3.11), (3.12) соответствуют наиболее напряженному переходному процессу.

Авторы благодарят В. Л. Вейца за полезные советы, высказанные при обсуждении работы.

Поступила 19 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Блехман И. И. Самосинхронизация вибраторов некоторых вибрационных машин. Инж. сб. 1953, т. 16.
2. Блехман И. И., Джанелидзе Г. Ю. Динамика регулятора Буасса - Сарда. Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 10.

3. *Вейц В. Л., Кочура А. Е.* Эффект ограниченного возбуждения в силовых установках с двигателями внутреннего сгорания. Научн. тр. вузов ЛитССР. Вибротехника, 1973, № 2 (19).
4. *Глузарев К. К., Фролов К. В.* Взаимодействие колебательной системы с двумя источниками энергии. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 4.
5. *Живков В. С.* Влияние электромагнитной инерции двигателя на устойчивость колебаний механической системы с центробежным возбудителем. Машиноведение, 1971, № 4.
6. *Копоненко В. О.* Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М., «Наука», 1964.
7. *Копоненко В. О.* Вопросы теории динамического взаимодействия машины и источника энергии. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 5.
8. *Нагаев Р. Ф.* Динамика виброударной дробилки с парой самосинхронизирующихся вибраторов. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1963, № 5.
9. *Вейц В. Л.* Динамика машинных агрегатов. Л., «Машиностроение», 1969.
10. *Бабицкий В. И.* К анализу виброударного взаимодействия упругих систем. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 1.
11. *Бабицкий В. И., Тресвятский А. Н.* Об одном случае потери устойчивости механизма с силовым замыканием. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 1.
12. *Вульфсон И. И., Коловский М. З.* Нелинейные задачи динамики машин. Л., «Машиностроение», 1968.
13. *Попов Е. П., Пальтов И. П.* Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1960.