МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1977

УДК 534.1

ОБ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ИСТОЧНИКОМ ЭНЕРГИИ

А. А. АЛИФОВ

(Москва)

В работе [1] получены фундаментальные представления о взаимодействии автоколебательной системы и источника энергии. Дальнейшее развитие этих задач получено в [2, 3]. В данной работе рассматривается взаимодействие источника энергии с автоколебательной системой с одной, двумя и n степенями свободы в предположении, что система содержит демпферы сухого трения.

1. Рассмотрим механическую модель автоколебательной системы с n массами $m_1 \ldots m_n$, n-я масса которой лежит на непрерывной ленте, движущейся со скоростью $V=r\varphi^{\cdot}$ (φ — угол вращения ротора двигателя, r — радиус шкива, приводящего в движение ленту) (фиг. 1), полагая, что она получает энергию от реального источника — двигателя с известной заранее характеристикой $L(\varphi^{\cdot})$. Система содержит демпферы сухого трения с коэффициентами трения $\vartheta_1 \ldots \vartheta_n$, а также линейные демпферы с коэффициентами демпфирования $k_1 \ldots k_n$.

Сила трения T, возникающая между массой m_n и лентой, является функцией относительной скорости $V-x_n^{\cdot}$ и аппроксимируется [4] функцией

$$T\{(V-x_n^{\cdot})\}=q[\operatorname{sgn}(V-x_n^{\cdot})-\alpha_1(V-x_n^{\cdot})+\alpha_3(V-x_n^{\cdot})^3]$$

график которой показан на фиг. 2. Здесь q, α_1, α_3 — положительные постоянные; множитель q пропорционален силе нормального давления массы на ленту, который в данном случае равен $q=m_n g f$, где f — коэффициент сухого трения, g — ускорение силы тяжести.

Задача рассматривается при условии $V>x_n^{\cdot}$, $V>0$.

Следует отметить, что такая механическая модель наиболее полно характеризует реальные объекты: ленточные конвейеры, процесс обработки металлов резанием и др.

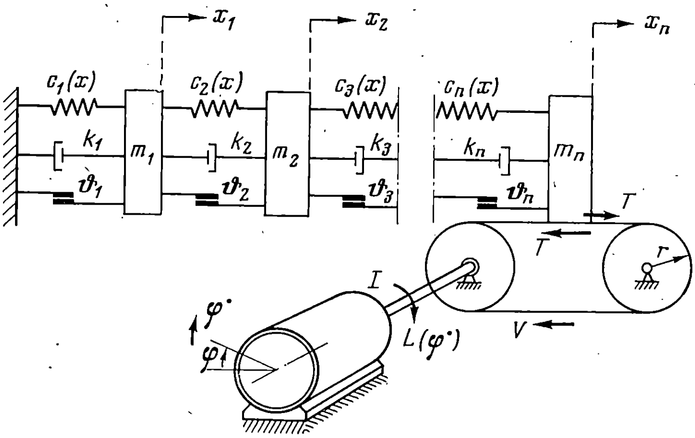
Движение автоколебательной системы с одной степенью свободы описывается уравнениями

$$m_1 x_1^{\cdot\cdot}+c_1 x_1=T\{(V-x_1^{\cdot})\}-f(x_1)-k_1 x_1^{\cdot}-\vartheta_1\frac{x_1^{\cdot}}{|x_1^{\cdot}|}$$

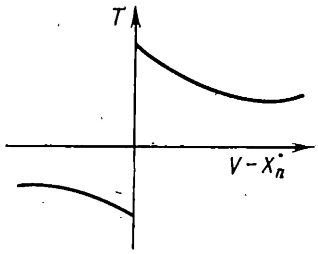
$$I\varphi^{\cdot\cdot}=L(\varphi^{\cdot})-H_0(\varphi^{\cdot})-rT\{(V-x_1^{\cdot})\} \qquad (1.1)$$

Здесь c_1 — жесткость колебательной системы; $f(x_1)$ — функция, описывающая отклонения восстанавливающей силы от линейного закона; I — суммарный момент инерции вращающихся частей; $L(\varphi^{\cdot})$, $H_0(\varphi^{\cdot})$ — непрерывные, медленно изменяющиеся функции, которые описывают движущий момент источника и момент сил сопротивления вращению, приведенные к оси вращения ротора, соответственно.

Решение задачи ищется в предположениях, принятых в работе [1], кроме того, величины ϑ_1, k_1 и функция $f(x_1)$ — малые, вследствие чего в систему (1.1) можно ввести малый положительный параметр ε.



Фиг. 1



Фиг. 2

Уравнения (1.1) после введения малого параметра принимают вид

$$x_1^{\cdot\cdot}+\omega_1^2 x_1=\frac{\varepsilon}{m_1}\left[T\{(V-x_1^\cdot)\}-f(x_1)-k_1x_1^\cdot-\vartheta_1\frac{x_1^\cdot}{|x_1^\cdot|}\right] \tag{1.2}$$

$$\varphi^{\cdot\cdot}=\frac{\varepsilon}{I}[M(\varphi^\cdot)-rT\{(V-x_1^\cdot)\}],\qquad \omega_1^2=\frac{c_1}{m_1},\qquad M(\varphi^\cdot)=L(\varphi^\cdot)-H_0(\varphi^\cdot)$$

Согласно методу теории возмущений [5], система (1.2) после приведения к стандартной форме и выполнения операции усреднения принимает вид

$$\frac{du}{dt}=\frac{\varepsilon r}{I}\left[M\left(\frac{u}{r}\right)-rT(u)-\frac{3}{2}rq\alpha_3uA_1^2\right] \tag{1.3}$$

$$\frac{dA_1}{dt}=-\frac{\varepsilon}{2m_1}\left[\frac{4}{\pi}\vartheta_1+(3\alpha_3qu^2-\alpha_1q+k_1)A_1+\frac{3}{4}\alpha_3qA_1^3\right]$$

$$\frac{d\xi}{dt}=\omega_1-p+\frac{\varepsilon}{2\pi m_1A_1}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{A_1}{\omega_1}\cos\psi\right)\cos\psi\,d\psi,\qquad u=\Omega r,\qquad A_1=\omega_1 a$$

Здесь величины Ω, a, ξ составляют главную часть решения, и слагаемое $4\vartheta_1/\pi$ определено в предположении, что $A_1>0$. Стационарные режимы движения определяются из (1.3)

$$M(u/r)-rT(u)-{}^3/_2 rq\alpha_3 uA_1^2=0 \qquad (1.4)$$
$$4\vartheta_1/\pi+(3\alpha_3 qu^2-\alpha_1 q+k_1)A_1+{}^3/_4\alpha_3 qA_1^3=0$$
$$\omega_1-p+\frac{1}{2\pi m_1 A_1}\int\limits_0^{2\pi} f\left(\frac{A_1}{\omega_1}\cos\psi\right)\cos\psi\, d\psi=0$$

Из последнего уравнения (1.4) определяем частоту колебания

$$p=\omega_1+\frac{1}{2\pi m_1 A_1}\int\limits_0^{2\pi} f\left(\frac{A_1}{\omega_1}\cos\psi\right)\cos\psi\, d\psi \qquad (1.5)$$

откуда видно влияние нелинейной части восстанавливающей силы на частоту автоколебаний.

Действительный корень второго уравнения системы (1.4) согласно формуле Кардана имеет вид

$$A_1=\left\{-\frac{8\vartheta_1}{3\pi\alpha_3 q}+\left[\left(\frac{8\vartheta_1}{3\pi\alpha_3 q}\right)^2+\left[\frac{4}{9\alpha_3 q}(3\alpha_3 qu^2-\alpha_1 q+k_1)\right]^3\right]^{1/2}\right\}^{1/3}+$$
$$+\left\{-\frac{8\vartheta_1}{3\pi\alpha_3 q}-\left[\left(\frac{8\vartheta_1}{3\pi\alpha_3 q}\right)^2+\left[\frac{4}{9\alpha_3 q}(3\alpha_3 qu^2-\alpha_1 q+k_1)\right]^3\right]^{1/2}\right\}^{1/3} \qquad (1.6)$$

При определении $4\vartheta_1/\pi$ принято, что $A_1>0$, поэтому из выражения (1.6) находятся те значения амплитуды автоколебаний, которые подчиняются этому условию.

Анализ уравнения (1.6) показывает, что при $\vartheta_1\neq 0$ может быть либо одно решение (два совпавших корня), либо два решения. Значение скорости u_*, соответствующее однозначному решению, определяется из выражения

$$u_*^2=\frac{1}{3\alpha_3 q}(\alpha_1 q-k_1)-\frac{\eta}{4},\qquad \eta=3\sqrt[3]{\frac{64\vartheta_1^2}{(3\alpha_3 q\pi)^2}} \qquad (1.7)$$

При $u=u_*$ амплитуда автоколебаний определяется из выражения $A_1{}^*=(\eta/3)^{1/2}$. Из первых двух уравнений (1.4) после исключения A_1 получим уравнение для определения стационарных значений скорости

$$(R^3-4r^2u^2R\Phi^2)^2-\beta u^3(R^3+4r^2u^2R\Phi^2-{}^1/_4\beta u^3)=0 \qquad (1.8)$$
$$R=M(u/r)-rT(u),\quad \beta=192\alpha_3 q\vartheta_1^2 r^3\pi^{-2},\quad \Phi=q(\alpha_1-3\alpha_3 u^2)-k_1$$

Как видно, автоколебания возможны лишь при некоторых значениях скорости u, удовлетворяющих уравнению (1.8). Такие значения скорости зависят от амплитуды автоколебаний, характеристики источника энергии, демпфирующих элементов.

Два последних уравнения (1.4) и (1.8) показывают также существенное влияние демпфера с сухим трением на амплитуду и частоту автоколебаний и стационарные значения скорости и дают возможность выбирать параметры реальных объектов при проектировании.

Анализ устойчивости приближенных решений системы (1.1) сводим к анализу устойчивости стационарных значений первых двух уравнений (1.3). Пользуясь критериями Рауса – Гурвица, получим следующие критерии устойчивости движения:

$$N-rq(3\alpha_3 u^2-\alpha_1+{}^3/_2\alpha_3 A_1^2)-{}^1/_2 I(m_1 r)^{-1}F<0 \qquad (1.9)$$
$$F[N-rq(3\alpha_3 u^2-\alpha_1+{}^3/_2\alpha_3 A_1^2)+18r(\alpha_3 quA_1)^2F^{-1}]<0$$

$$N=\frac{d}{du}M\left(\frac{u}{r}\right)=L'-H_0', \qquad F=k_1+q\left(3\alpha_3u^2-\alpha_1+\frac{9}{4}\alpha_3A_1^2\right)$$

Для многих реальных источников $L'<0$. Если считать, что $L>H_0$, то $N<0$ и поэтому первое условие (1.9) легко выполняется, если $3\alpha_3u^2-\alpha_1>$ >0 и, следовательно, $F>0$. Определяющим является второе условие (1.9). Так как $F>0$, то характеристика источника энергии должна быть достаточно крутой, чтобы выполнялось второе неравенство (1.9) и тем самым устойчивость автоколебательного режима. В противном случае колебательный процесс будет неустойчивым, следовательно, надлежащим подбором характеристики двигателя предоставляется возможность устранения нежелательных автоколебаний при сухом трении и наоборот.

Следует отметить, что на основании анализа получены следующие выводы: состояние системы, соответствующее значению скорости u_*, неустойчиво; по мере возрастания стационарных значений скорости области наклонов характеристики двигателя, соответствующие устойчивым движениям, уменьшаются; демпфер сухого трения сужает эти области.

Приближенное решение для угловой скорости ротора двигателя при улучшенном первом приближении имеет вид

$$\dot\varphi=\Omega-\frac{r}{Ip}\left[\left(k_1\omega_1a+\frac{4\vartheta_1}{\pi}\right)\cos(pt+\xi)-\right.$$
$$\left.-\frac{3}{4}\alpha_3\,qr\,\Omega\omega_1^2a^2\sin 2(pt+\xi)+\frac{1}{12}\alpha_3q\omega_1^3a^3\cos 3(pt+\xi)\right] \tag{1.10}$$

откуда видно обратное воздействие колебательной системы на источник энергии. В результате этого в выражении для определения скорости вращения появляются гармоники с кратными частотами. Кратные частоты имеют место и в выражениях для амплитуды и фазы автоколебаний, которые для краткости здесь не приводятся.

2. Уравнения движения автоколебательной системы с двумя степенями свободы записываются в виде

$$m_1\ddot x_1+c_1x_1-c_2(x_2-x_1)=f(x_2-x_1)-f(x_1)+k_2(\dot x_2-\dot x_1)-$$
$$-k_1\dot x_1+\vartheta_2\frac{\dot x_2-\dot x_1}{|\dot x_2-\dot x_1|}-\vartheta_1\frac{\dot x_1}{|\dot x_1|} \tag{2.1}$$
$$m_2\ddot x_2+c_2(x_2-x_1)=T\{(V-\dot x_2)\}-f(x_2-x_1)-k_2(\dot x_2-\dot x_1)-\vartheta_2\frac{\dot x_2-\dot x_1}{|\dot x_2-\dot x_1|}$$
$$I\ddot\varphi=L(\dot\varphi)-H_0(\dot\varphi)-rT\{(V-\dot x_2)\}$$

где функция $f(x_2-x_1)$ описывает малые отклонения восстанавливающей силы от линейного закона.

Принимая такие же предположения, как в п. 1, в систему (2.1) вводим малый параметр ε, и первые два уравнения системы (2.1) при помощи переменных

$$x_1=y_1+y_2, \qquad x_2=\mu_1y_1+\mu_2y_2 \tag{2.2}$$

представляем в виде

$$\ddot y_1+\omega_1^2y_1=\varepsilon M_1^{-1}(Q_1+\mu_1Q_2), \qquad \ddot y_2+\omega_2^2y_2=\varepsilon M_2^{-1}(Q_1+\mu_2Q_2) \tag{2.3}$$
$$\mu_1=(c_{12}-m_1\omega_1^2)c_2^{-1}, \quad \mu_2=(c_{12}-m_1\omega_2^2)c_2^{-1}, \quad c_{12}=c_1+c_2,$$
$$M_1=m_1+m_2\mu_1^2, \quad M_2=m_1+m_2\mu_2^2$$

Здесь Q_1 и Q_2 — правые части первых двух уравнений системы (2.1) с учетом замены (2.2); ω_1 и ω_2 — частоты собственных колебаний системы, определяемые из уравнения

$$(m_1\omega^2-c_{12})(m_2\omega^2-c_2)-c_2^2=0 \tag{2.4}$$

Предполагая, что в системе существует одночастотный режим (с одной нормальной формой), а также, что величины $\nu\omega_1$, $\nu\omega_2$ ($\nu=2, 3, \ldots$) уравнению (2.4) не удовлетворяют, следуя п.1, получим следующие уравнения для стационарных режимов движения (для первой нормальной формы):

$$M(u_1/r)-rT(u_1)-{}^3/_2 r\alpha_3 q u_1 \mu_1^2 A_{11}^2=0 \tag{2.5}$$
$$L_1+(3\alpha_3 q\mu_1^2 u_1^2-\alpha_1 q\mu_1^2+D_1)A_{11}+{}^3/_4\alpha_3 q\mu_1^4 A_{11}^3=0$$
$$\omega_1-p_1+(M_1A_{11})^{-1}G_1=0,\qquad L_1=4(\vartheta_1+\vartheta_2|\mu_1-1|)/\pi,\qquad D_1=k_1+k_2(\mu_1-1)^2$$
$$G_1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left\{f\left(\frac{A_{11}}{\omega_1}\cos\psi\right)+(\mu_1-1)f\left[(\mu_1-1)\frac{A_{11}}{\omega_1}\cos\psi\right]\right\}\cos\psi\,d\psi$$

Здесь L_1 определено в предположении, что $A_{11}>0$. Из системы (2.5) имеем уравнения для определения частоты автоколебаний и стационарных значений скорости

$$p_1=\omega_1+(M_1A_{11})^{-1}G_1 \tag{2.6}$$
$$(R_1^3-4r^2\mu_1^{-4}u_1^2R_1\Phi_1^2)^2-\beta_1u_1^3(R_1^3+4r^2\mu_1^{-4}u_1^2R_1\Phi_1^2-{}^1/_4\beta_1u_1^3)=0$$
$$R_1=M(u_1/r)-rT(u_1),\qquad \Phi_1=q\mu_1^2(\alpha_1-3\alpha_3u_1^2)-D_1,\qquad \beta_1=12\alpha_3qL_1^2r^3\mu_1^{-2}$$

Решая второе уравнение системы (2.5) подобно решению второго уравнения системы (1.4), находим искомые значения амплитуды автоколебаний — A_{11}.

Критерии устойчивости имеют вид

$$N_1-rq(3\alpha_3u_1^2-\alpha_1+{}^3/_2\alpha_3\mu_1^2A_{11}^2)-{}^1/_2(M_1r)^{-1}IF_1<0 \tag{2.7}$$
$$F_1[N_1-rq(3\alpha_3u_1^2-\alpha_1+{}^3/_2\alpha_3\mu_1^2A_{11}^2)+18r(\mu_1^2\alpha_3qu_1A_{11})^2F_1^{-1}]<0$$
$$N_1=\frac{d}{du_1}M\left(\frac{u}{r}\right),\qquad F_1=D_1+q\mu_1^2\left(3\alpha_3u_1^2-\alpha_1+\frac{9}{4}\alpha_3\mu_1^2A_{11}^2\right)$$

Улучшенное первое приближение для $\varphi^{\cdot}$ имеет вид

$$\varphi^{\cdot}=\Omega-r(Ip_1)^{-1}[\mu_1^{-1}(L_1+D_1A_{11})\cos(p_1t+\xi_1)-$$
$$-{}^3/_4\alpha_3qr\Omega\mu_1^2\omega_1^2a_1^2\sin 2(p_1t+\xi_1)+{}^1/_{12}\alpha_3q\mu_1^3\omega_1^3a_1^3\cos 3(p_1t+\xi_1)] \tag{2.8}$$

Аналогичные выражения получаются для второй нормальной формы, которые здесь для краткости не приводятся.

Из выражений (2.6) — (2.8) следует, что в автоколебательной системе с двумя степенями свободы и демпфером с сухим трением частота, амплитуда и фаза автоколебаний зависят от свойств двигателя. Устойчивость автоколебаний и форма колебаний также в значительной мере зависят от характеристики источника энергии. Кроме того, скорость вращения ротора приводного двигателя не является величиной постоянной.

3. Движение автоколебательной системы с n степенями свободы описывается уравнениями вида

$$m_1x_1^{\cdot\cdot}+c_1x_1-c_2(x_2-x_1)=f(x_2-x_1)-f(x_1)+$$
$$+k_2(x_2^{\cdot}-x_1^{\cdot})-k_1x_1^{\cdot}+\vartheta_2\frac{x_2^{\cdot}-x_1^{\cdot}}{|x_2^{\cdot}-x_1^{\cdot}|}-\vartheta_1\frac{x_1^{\cdot}}{|x_1^{\cdot}|}$$
$$m_2x_2^{\cdot\cdot}+c_2(x_2-x_1)-c_3(x_3-x_2)=f(x_3-x_2)-f(x_2-x_1)+$$
$$+k_3(x_3^{\cdot}-x_2^{\cdot})-k_2(x_2^{\cdot}-x_1^{\cdot})+\vartheta_3\frac{x_3^{\cdot}-x_2^{\cdot}}{|x_3^{\cdot}-x_2^{\cdot}|}-\vartheta\frac{x_2^{\cdot}-x_1^{\cdot}}{|x_2^{\cdot}-x_1^{\cdot}|}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{3.1}$$

$$m_{n-1}\ddot{x}_{n-1}+c_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-2})-c_n(x_n-x_{n-1})=f(x_n-x_{n-1})-f(x_{n-1}-x_{n-2})+$$

$$+k_n(\dot{x}_n-\dot{x}_{n-1})-k_{n-1}(\dot{x}_{n-1}-\dot{x}_{n-2})+\vartheta_n\frac{\dot{x}_n-\dot{x}_{n-1}}{|\dot{x}_n-\dot{x}_{n-1}|}-\vartheta_{n-1}\frac{\dot{x}_{n-1}-\dot{x}_{n-2}}{|\dot{x}_{n-1}-\dot{x}_{n-2}|}$$

$$m_n\ddot{x}_n+c_n(x_n-x_{n-1})=T\{(V-\dot{x}_n)\}-f(x_n-x_{n-1})-k_n(\dot{x}_n-\dot{x}_{n-1})-$$

$$-\vartheta_n\frac{\dot{x}_n-\dot{x}_{n-1}}{|\dot{x}_n-\dot{x}_{n-1}|}\qquad I\ddot{\varphi}=L(\dot{\varphi})-H_0(\dot{\varphi})-rT\{(V-\dot{x}_n)\}$$

где функции $f(x_i-x_{i-1})$ $(i=1, 2,\ldots n)$ описывают малые отклонения восстанавливающих сил от линейного закона.

Кроме предположений, аналогичных принятым в п. 1, примем следующее: в системе существует одночастотный (частоты ω_s) режим; частоты ω_s $(s=1, 2,\ldots n)$ собственных колебаний системы являются простыми корнями характеристического уравнения системы (3.1), взятой без правых частей и без последнего уравнения; величины $\pm\nu\omega_s$ $(\nu=2, 3,\ldots)$ этому уравнению не удовлетворяют. Введя малый параметр ε путем преобразования к квазинормальным координатам, исходную систему (3.1) представим в виде

$$\ddot{\varphi}=\varepsilon I^{-1}[M(\dot{\varphi})-rT\{(r\dot{\varphi}-\mu_{ns}\dot{y}_s)\}]$$
$$\ddot{y}_s+\omega_s^2y_s=\varepsilon M_s^{-1}[-Z(y_s)-Z(\dot{y}_s)-D_s\dot{y}_s+\mu_{ns}T\{(r\dot{\varphi}-\mu_{ns}\dot{y}_s)\}]$$

$$M_s=\sum_{i=1}^{n}m_i\mu_{is}^2,\quad D_s=\sum_{i=1}^{n}k_i(\mu_{is}-\mu_{(i-1)s})^2 \tag{3.2}$$

$$Z(y_s)=\sum_{i=1}^{n}(\mu_{is}-\mu_{(i-1)s})f[(\mu_{is}-\mu_{(i-1)s})y_s]$$

$$Z(\dot{y}_s)=\sum_{i=1}^{n}\vartheta_i\frac{(\mu_{is}-\mu_{(i-1)s})^2\dot{y}_s}{|(\mu_{is}-\mu_{(i-1)s})\dot{y}_s|}$$

Переход от уравнений (3.1) к уравнениям (3.2) выполняется при помощи замены переменных

$$x_j=\sum_{\sigma=1}^{n}\mu_{j\sigma}y_\sigma,\quad \mu_{j\sigma}=\Delta_j(\omega_\sigma^2)\quad (\sigma=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,n)$$

где $\Delta_j(\omega_\sigma^2)$ — алгебраическое дополнение элемента j-го столбца и последней строки характеристического определителя системы.

Поступая аналогично п. 1, получим

$$M(u_s/r)-rT(u_s)-{}^3/_2r\alpha_3qu_s\mu_{ns}^2A_{1s}^2=0 \tag{3.3}$$
$$L_s+(3\alpha_3q\mu_{ns}^2u_s^2-\alpha_1q\mu_{ns}^2+D_s)A_{1s}+{}^3/_4\alpha_3q\mu_{ns}^4A_{1s}^3=0$$

$$\omega_s-p_s+(M_sA_{1s})^{-1}G_s=0,\quad L_s=\frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\vartheta_i|\mu_{is}-\mu_{(i-1)s}|$$

$$G_s=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Z\left(\frac{A_{1s}}{\omega}\cos\psi\right)\cos\psi\,d\psi$$

Здесь L_s определено в предположении, что $A_{1s}>0$.

Уравнения для определения частоты автоколебаний и стационарных значений скорости имеют вид

$$p_s=\omega_s+(M_sA_{1s})^{-1}G_s \qquad (3.4)$$

$$(R_s^3-4r^2\mu_{ns}^{-4}u_s^2R_s\Phi_s^2)^2-\beta_su_s^3(R_s^3+4r^2\mu_{ns}^{-4}u_s^2R_s\Phi_s^2-{}^1/_4\beta_su_s^3)=0$$

$$R_s=M(u_s/r)-rT(u_s),\qquad \Phi_s=q\mu_{ns}^2(\alpha_1-3\alpha_3u_s^2)-D_s,\qquad \beta_s=12\alpha_3qL_s^2r^3\mu_{ns}^{-2}$$

Значение скорости u_{s*}, при котором имеются два совпавших корня амплитудного уравнения, определяется из выражения

$$u_{s*}^2=(\alpha_1q\mu_{ns}^2-D_s)(3\alpha_3q\mu_{ns}^2)^{-1}-{}^1/_4\mu_{ns}^2\eta_s,\qquad \eta_s=3\sqrt[3]{B_s^2/4}$$

$$B_s=4L_s(3\alpha_3q\mu_{ns}^4)^{-1} \qquad (3.5)$$

Для амплитуды автоколебаний при $u_s=u_{s*}$ имеем $A_{1s}^*=(\eta_s/3)^{1/2}$. Критерии устойчивости движения системы записываются в виде

$$N_s-rq(3\alpha_3u_s^2-\alpha_1+{}^3/_2\alpha_3\mu_{ns}^2A_{1s}^2)-{}^1/_2(M_sr)^{-1}IF_s<0$$

$$F_s[N_s-rq(3\alpha_3u_s^2-\alpha_1+{}^3/_2\alpha_3\mu_{ns}^2A_{1s}^2)+18r(\mu_{ns}^2\alpha_3qu_sA_{1s}^2)^2F_s^{-1}]<0$$

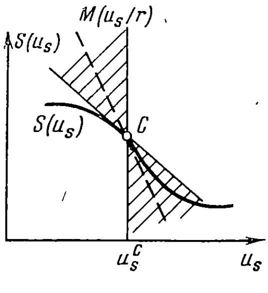
$$N_s=\frac{d}{du_s}M\left(\frac{u_s}{r}\right),\qquad F_s=D_s+q\mu_{ns}^2\left(3\alpha_3u_s^2-\alpha_1+\frac{9}{4}\alpha_3\mu_{ns}^2A_{1s}^2\right)$$

Улучшенное первое приближение для скорости вращения ротора двигателя имеет вид

$$\varphi^{\boldsymbol{\cdot}}=\Omega-(Ip_s)^{-1}[\mu_{ns}^{-1}(L_s+D_sA_{1s})\cos(p_st+\xi_s)-$$

$$-{}^3/_4\alpha_3qr\Omega\mu_{ns}^2\omega_s^2a_s^2\sin 2(p_st+\xi_s)+{}^1/_{12}\alpha_3q\mu_{ns}^3\omega_s^3a_s^3\cos 3(p_st+\xi_s)]$$

Из этих выражений видно существенное влияние характеристики двигателя на форму колебаний, скорость вращения ротора двигателя, амплитуду и фазу колебаний. Полученные выражения показывают, что автоколебательную систему с n степенями свободы можно рассматривать как совокупность элементарных вибраторов, взаимодействующих один с другим и источником возбуждения.



Фиг. 3

Для определения геометрического признака устойчивости ограничимся рассмотрением системы с n степенями свободы, так как первые два пункта легко выводятся из последнего.

Следуя [3], получим

$$S(u_s)=rT(u_s)+{}^3/_2qr\alpha_3u_s\mu_{ns}^2A_{1s}^2.$$

График функции $S(u_s)$ строится после вычисления стационарных значений A_{1s} и u_s по второму уравнению (3.3) и уравнению (3.5) (см. фиг. 3). Автоколебания устойчивы, если касательная к характеристике источника энергии, проведенной в точке C, будет в пределах заштрихованного сектора.

Поступила 19 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кононенко В. О.* Взаимодействие автоколебательной системы с источником энергии. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1961, № 2.
2. *Фролов К. В.* Об автоколебаниях с учетом свойств источника энергии. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1962, № 1.
3. *Кононенко В. О.* Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М., «Наука», 1964.
4. *Тондл А.* Нелинейные колебания механических систем. М., «Мир», 1973.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 4. М., Физматгиз, 1974.