

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ТОРМОЖЕНИЕ
ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА УПРАВЛЕНИЯМИ,
ОГРАНИЧЕННЫМИ ЭЛЛИпсоИДОМ

Л. Д. АКУЛЕНКО, Ю. Р. РОЩИН

(Москва)

Рассматриваются некоторые модельные задачи оптимального по быстродействию торможения вращений твердого тела относительно центра масс. Предполагается, что управления ограничены эллипсоидом, т. е. исследуется случай «поворотного» двигателя. Известно, что осуществление маневра торможения при помощи поворотных (верньерных) двигательных установок приводит к меньшему расходу топлива по сравнению с другими схемами управления [1].

В предположении о симметрии динамических характеристик твердого тела и постоянных, определяющих эффективность управлений, в системе координат, связанной с главными (центральными) осями инерции, строится синтез оптимального управления на основе приближенного решения соответствующей задачи Коши для уравнения Беллмана [2]. Приближения строятся в виде разложений по степеням некоторого малого параметра, характеризующего отклонение от симметричности характеристик объекта и системы управления.

1. Постановка задачи. Управляемое движение твердого тела относительно центра масс в системе координат, связанной с главными осями инерции, описывается уравнениями [1]:

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = M_1, \quad \omega_1(t_0) = \omega_{10} \quad (1.1, 3) \quad (1.1)$$

Здесь ω_i ($i=1, 2, 3$) — проекции вектора угловой скорости на связанные оси; J_i — главные (центральные) моменты инерции тела; M_i — компоненты вектора управляющего момента сил относительно центра масс; t_0, ω_{10} — начальные данные. Без ограничения общности далее можно положить $t_0=0$.

Предполагается, что управляющие моменты M_i подвержены ограничению

$$M_1 = b_1 u_1, \quad M_2 = b_2 u_2, \quad M_3 = b_3 u_3, \quad |u|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leq 1 \quad (1.2)$$

Здесь b_i — произвольные положительные постоянные, $u_i = u_0 n_i$ — управления, n_i — направляющие косинусы, u_0 — модуль управления ($0 \leq u_0 \leq 1$).

Ставится задача оптимального по быстродействию торможения вращений системы (1.1) при помощи управлений (1.2), т. е. требуется перевести фазовую точку из начального состояния $\omega_i(0) = \omega_{i0}$ в начало координат $\omega_i(t_1) = 0$ за минимальное время t_1 . Необходимо найти закон управления $u_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, фазовую траекторию $\omega_i(t, \omega_{10}, \omega_2, \omega_3)$ и минимальное значение времени торможения $t_1 = t_1(\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30})$.

Точное решение поставленной задачи оптимального управления в общем случае построить не удастся. Такие решения известны для случаев, когда задача (1.1), (1.2) обладает некоторыми свойствами симметрии.

1. В частном случае сферической симметрии характеристик управления, когда $b_i = b$, решение задачи оптимального торможения известно в

виде синтеза [1]: $u_i = -K_i K^{-1}$, где $K_i = J_i \omega_i$ — составляющие кинетического момента, K — его модуль. Величина K убывает по линейному закону

$$K = K_0 - bt, \quad K_0 = (K_{10}^2 + K_{20}^2 + K_{30}^2)^{1/2}, \quad K_{i0} = J_i \omega_{i0},$$

а время быстрогодействия $t_1 = K_0 b^{-1}$. Движение в этом случае может быть исследовано полностью: фазовые траектории выражаются через эллиптические функции аналогичным образом, как и в случае пассивного движения [3]. Оказывается возможным построение функции Беллмана: $V(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = t_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = Kb^{-1}$.

2. Если тело сферически симметрично, т.е. $J_i = J$, то точное решение задачи синтеза можно построить для произвольных значений постоянных $b_i > 0$

$$W(z_1, z_2, z_3) = t_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = z, \quad z_i = J_i b_i^{-1} \omega_i, \quad u_i = -z_i z^{-1} \quad (1.3)$$

Система (1.1) явно интегрируется: $z = z_0(1 - z_0^{-1}t)$, $z_i = z_0 z_0^{-1} z$; отсюда следует, что $u_i = -z_0 z_0^{-1} = \text{const}$.

3. Существует промежуточный случай аксиальной симметрии: $J_1 = J_2$, $b_1 = b_2 = J_1 l$, $b_3 = J_3 l$, где l — положительная постоянная, когда решение задачи синтеза может быть построено точно

$$V(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega l^{-1}, \quad u_i = -\omega_i \omega^{-1}, \quad \omega = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)^{1/2} \quad (1.4)$$

Система (1.1) при этом также явно интегрируется

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a \omega_0^{-1} \omega \cos(\psi + \varphi), \quad \omega_2 = a \omega_0^{-1} \omega \sin(\psi + \varphi) \\ \omega_3 &= \omega_{30} \omega_0^{-1} \omega, \quad \omega = \omega_0(1 - l \omega_0^{-1} t) \\ \psi &= (d-1) \omega_{30} t(1 - lt/2\omega_0), \quad d = J_3 J_1^{-1}, \quad a = (\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2)^{1/2} \\ \cos \varphi &= \omega_{10} a^{-1}, \quad \sin \varphi = \omega_{20} a^{-1} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Практический интерес представляет приближенное решение задачи оптимального быстрогодействия и исследование управляемого движения, когда система близка к одному из этих случаев. Ниже рассматриваются системы с малым параметром, которые в пределе, когда параметр полагается равным нулю, совпадают со случаями 2 или 3. Для них приближенно по степеням малого параметра решается задача синтеза оптимального управления: на основе метода динамического программирования приближенно строится функция Беллмана задачи [2].

2. Приближенное решение задачи оптимального управления для твердого тела, близкого к сферически симметричному. Пусть $J_i = J(1 + \mu \kappa_i)$, где μ — малый числовой параметр ($|\mu| \ll 1$), κ_i — некоторые числа ($\kappa_i \sim 1$), $b_i > 0$ — произвольные постоянные одного порядка. Тогда система (1.1) приводится к виду

$$\dot{z}_1 = u_1 - \mu a_1 z_2 z_3, \quad \dot{z}_2 = u_2 - \mu a_2 z_1 z_3, \quad \dot{z}_3 = u_3 - \mu a_3 z_1 z_2 \quad (2.1)$$

Здесь $z_i = J_i b_i^{-1} \omega_i$ — новые переменные, получающиеся из старых особенным линейным преобразованием («растяжением»); их начальные значения равны $z_i(t_0) = z_{i0} = J_i b_i^{-1} \omega_{i0}$, a_i — размерные постоянные:

$$a_i = \frac{b_{i+1} b_{i+2}}{J b_i} \frac{\kappa_{i+2} - \kappa_{i+1}}{(1 + \mu \kappa_{i+1})(1 + \mu \kappa_{i+2})} \quad (i=1,2,3)$$

$$(b_4 = b_1, \quad b_5 = b_2, \quad \kappa_4 = \kappa_1, \quad \kappa_5 = \kappa_2)$$

Приближенное решение задачи синтеза оптимального быстродействия для системы (2.1) строится разложениями по степеням малого параметра μ , а затем устанавливается его близость решению исходной задачи. Действительно, если $W(\mu, z_1, z_2, z_3)$ — минимальное значение функционала t_1 , т. е. функция Беллмана для задачи (1.2), (2.1), то

$$V(\mu, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = W(\mu, J_1 b_1^{-1} \omega_1, J_2 b_2^{-1} \omega_2, J_3 b_3^{-1} \omega_3)$$

является решением исходной задачи. Это утверждение следует непосредственно из уравнения Беллмана и краевого условия. Далее, так как относительно μ W является гладкой функцией, то приближенное решение $W_{(n)}$ с погрешностью порядка μ^{n+1} (n — натуральное число) определяет с такой же погрешностью значение функции V .

Построение синтеза оптимального управления сводится к приближенному решению с заданной точностью нелинейного уравнения в частных производных — уравнения Беллмана [2], решение которого должно удовлетворять нулевому краевому условию $W(\mu, 0) = 0$

$$\min_{|u_i| \leq 1} \left[\frac{\partial W}{\partial z_1} u_1 + \frac{\partial W}{\partial z_2} u_2 + \frac{\partial W}{\partial z_3} u_3 \right] - \mu \left(a_1 z_2 z_3 \frac{\partial W}{\partial z_1} + a_2 z_1 z_3 \frac{\partial W}{\partial z_2} + a_3 z_1 z_2 \frac{\partial W}{\partial z_3} \right) = -1 \quad (2.2)$$

Минимизация в (2.2) приводит к следующим выражениям для оптимальных управлений

$$u_1^* = -pR^{-1}, \quad u_2^* = -qR^{-1}, \quad u_3^* = -rR^{-1}, \quad R = (p^2 + q^2 + r^2)^{1/2} \\ p = \partial W / \partial z_1, \quad q = \partial W / \partial z_2, \quad r = \partial W / \partial z_3 \quad (2.3)$$

После подстановки выражений (2.3) в уравнение (2.2) получим

$$R + \mu (a_1 p z_2 z_3 + a_2 q z_1 z_3 + a_3 r z_1 z_2) = 1 \quad (2.4)$$

Искомое решение уравнения (2.4) строится в виде разложения по степеням малого параметра μ :

$$W = W_0 + \mu W_1 + \dots + \mu^k W_k + \dots, \quad W_k(0) = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots) \\ p_k = \partial W_k / \partial z_1, \quad q_k = \partial W_k / \partial z_2, \quad r_k = \partial W_k / \partial z_3 \quad (2.5)$$

Подстановка представлений (2.5) в (2.4) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях μ приводит к зацепляющейся системе уравнений в частных производных с нулевыми краевыми условиями. Эти уравнения могут быть решены последовательно. На первом шаге (при $k=0$, т. е. $\mu=0$) получается нелинейная задача: $R_0=1$, $W_0(0)=0$, положительное решение которой существует и единственно ($W_0=z$). Функция W_0 всюду непрерывна и дифференцируема в каждой точке, кроме конечной точки $z_i=0$, где производные не определены. Однако уравнение формально удовлетворяется и в конечной точке, т. е. W_0 — функция Беллмана при $\mu=0$.

Уравнение для W_1 квазилинейное, или, точнее, линейное неоднородное с известной правой частью

$$p_0 p_1 + q_0 q_1 + r_0 r_1 = -a_1 p_0 z_2 z_3 - a_2 q_0 z_1 z_3 - a_3 r_0 z_1 z_2 \quad (2.6)$$

однозначно разрешимо, так как $p_0^2 + q_0^2 + r_0^2 = 1 \neq 0$, т. е. коэффициенты при производных одновременно в нуль обратиться не могут [4]. Методом ха-

рактических с учетом нулевого краевого условия находится единственное гладкое решение задачи Коши для W_1

$$W_1 = -1/3 (a_1 + a_2 + a_3) z_1 z_2 z_3 \equiv A z_1 z_2 z_3 \quad (2.7)$$

Следует отметить, что в решении все значения индекса i равноправны.

Аналогично изложенному выше определяются последующие гладкие коэффициенты W_k ($k=2, 3, \dots$), симметричные относительно индекса i . Например

$$W_2 = -1/30 A z^{-1} \{ a_1 [12 (z_1 z_2 z_3)^2 + (5z_3^2 - z_1^2) z_2^4 + (5z_2^2 - z_1^2) z_3^4 - (z_2^2 + z_3^2) z_1^4] + \\ + a_2 [12 (z_1 z_2 z_3)^2 + (5z_3^2 - z_2^2) z_1^4 + (5z_1^2 - z_2^2) z_3^4 - (z_1^2 + z_3^2) z_2^4] + \\ + a_3 [12 (z_1 z_2 z_3)^2 + (5z_1^2 - z_3^2) z_2^4 + (5z_2^2 - z_3^2) z_1^4 - (z_1^2 + z_2^2) z_3^4] \} \quad (2.8)$$

Громоздкость выражений для функций $W_k(z_1, z_2, z_3)$ быстро растет с ростом k . Из оценки получающихся решений $|W_k| \sim (|a_1| + |a_2| + |a_3|)^k z^{2k+1}$ следует, что разложение (2.5) будет равномерно сходиться к единственной дифференцируемой всюду, кроме конечной точки, функции, если величина параметра μ достаточно мала: $\mu \leq \mu_0 < (|a_1| + |a_2| + |a_3|)^{-1} z_0^{-2}$.

Итак, пусть функция Беллмана $W(\mu, z_1, z_2, z_3)$ построена с нужной степенью точности по малому параметру μ . Тогда по формулам (2.3) могут быть построены приближенные оптимальные управления в виде синтеза. Например, с погрешностью $\sim \mu^2$

$$u_1^* = -p_0 + \mu [p_0 (q_0 q_1 + r_0 r_1) - p_1 (q_0^2 + r_0^2)] + O(\mu^2) \\ u_2^* = -q_0 + \mu [q_0 (p_0 p_1 + r_0 r_1) - q_1 (p_0^2 + r_0^2)] + O(\mu^2) \\ u_3^* = -r_0 + \mu [r_0 (p_0 p_1 + q_0 q_1) - r_1 (p_0^2 + q_0^2)] + O(\mu^2) \quad (2.9)$$

Частные производные p_1, q_1, r_1 функции W_1 на основании (2.5), (2.7) равны: $p_1 = A z_2 z_3, q_1 = A z_1 z_3, r_1 = A z_1 z_2$.

Теперь можно оценить значение величины z в момент времени $t_1 = (W_0 + \mu W_1)_{z_0}$. Уравнение для z при помощи (2.1), (2.9) записывается в виде

$$z^* = -1 + 3\mu W_1 z^{-1} + \mu (p_0 \Delta u_1 + q_0 \Delta u_2 + r_0 \Delta u_3) + O(\mu^2) \quad (2.10)$$

Здесь $\mu \Delta u_i$ ($i=1, 2, 3$) — добавки к невозмущенному управлению в выражениях (2.9). Следует отметить, что их сумма порядка μ^2 . Поэтому будем иметь

$$z = z_0 - t + \mu W_1(z_{10}, z_{20}, z_{30}) z_0^{-3} [z_0^3 - (z_0 - t)^3] + O(\mu^2)$$

В указанный выше момент времени t_1 величина $z(t_1) = O(\mu^2)$, т. е. функции z_i , а вместе с ними и ω_i , приводятся в μ^2 — окрестность начала координат. Из (2.10) далее следует, что если использовать построенные приближенные управления (2.9) для приведения системы (2.1) в нуль, то погрешность по функционалу будет порядка μ^2 (потребное время по сравнению с точным значением времени оптимального быстрогодействия увеличится на величину $O(\mu^2)$). Аналогичные рассуждения справедливы и для более высоких приближений. В частности, построенная явно функция

$$V_{(2)}(\mu, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = z + \mu W_1(z_1, z_2, z_3) + \mu^2 W_2(z_1, z_2, z_3), \quad z_i = J_i b_i^{-1} \omega_i$$

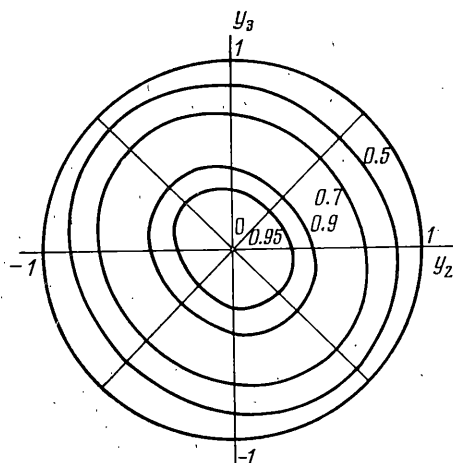
дает решение поставленной задачи синтеза управления оптимального быстрогодействия с погрешностью $O(\mu^3)$.

Следует отметить, что функции $W_k \equiv 0$ ($k=1, 2, \dots$) при $b_i = b$. Этот факт следует непосредственно из условия 1 п. 1, так как в этом случае $z = Kb^{-1}$ — функция Беллмана задачи.

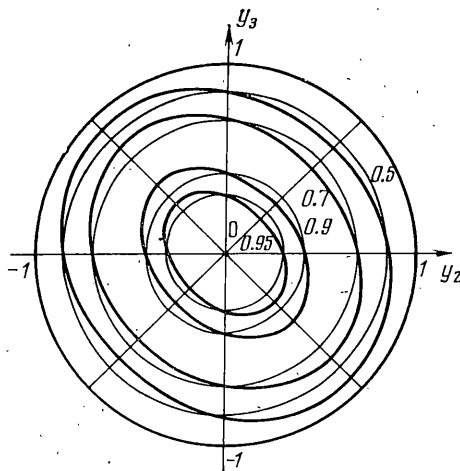
На фиг. 1, 2 приведены сечения поверхностей уровня функции W первого приближения ($W_{(1)} = W_0 + \mu W_1 = c = \text{const} > 0$) плоскостями $z_i = \text{const}$. Введением новых переменных $y_i = z_i c^{-1}$ это уравнение поверхности уровня приводится к виду

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 2\alpha y_1 y_2 y_3 = 1, \quad \alpha = \mu A c^2, \quad |\alpha| \ll 1, \quad |y_i| \leq 1$$

Здесь α — малый числовой параметр. На фиг. 1, 2 представлены эллипсы — проекции сечений на плоскость (y_2, y_3) , соответствующие указанным на них значениям y_1 , для значений $\alpha = 0.2$ и $\alpha = 0.3$. На фиг. 2 для сравнения приведены также сечения сферы, т. е. невозмущенной поверхности



Фиг. 1



Фиг. 2

уровня, отвечающей $\mu = 0$. Следует отметить, что в силу указанной выше равноправности значений индекса i сечения плоскостями $z_2, z_3 = \text{const}$ совпадают с построенными на фиг. 1, 2.

3. Приближенное решение задачи наискорейшего торможения в случае, близком к аксиально-симметричному по динамическим характеристикам и управлению. Приближенно решается задача оптимального синтеза для системы (1.1), (1.2) в предположении

$$J_2 = J_1(1 + \varepsilon), \quad b_1 = J_1 l, \quad b_2 = J_2 l(1 + \varepsilon \kappa_2), \quad b_3 = J_3 l(1 + \varepsilon \kappa_3) \quad (3.1)$$

Здесь ε — малый числовой параметр ($|\varepsilon| \ll 1$); κ_2, κ_3 — числовые параметры ($\kappa_2, \kappa_3 \sim 1$); l — размерный параметр. При $\varepsilon = 0$ имеет место случай 3 п. 1, для которого задача оптимального синтеза решена полностью. Введением числового параметра $d = J_3 J_1^{-1}$ ($0 < d \leq 2 + \varepsilon$) и новых переменных z_i

$$\omega_1 = l z_1, \quad \omega_2 = l(1 + \varepsilon \kappa_2) z_2, \quad \omega_3 = l(1 + \varepsilon \kappa_3) z_3 \quad (3.2)$$

система уравнений движения принимает вид

$$\begin{aligned} z_1^* + (d - 1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon \kappa_2)(1 + \varepsilon \kappa_3) l z_2 z_3 &= u_1, \quad z_{10} = \omega_{10} l^{-1} \\ z_2^* + (1 - d) \left[1 + \varepsilon \frac{\kappa_3 - \kappa_2 - 1 - \varepsilon \kappa_2}{(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon \kappa_2)} \right] l z_1 z_3 &= u_2, \quad z_{20} = \omega_{20} l^{-1} (1 + \varepsilon \kappa_2)^{-1} \\ z_3^* + \varepsilon d^{-1} l (1 + \varepsilon \kappa_2)(1 + \varepsilon \kappa_3)^{-1} z_1 z_2 &= u_3, \quad z_{30} = \omega_{30} l^{-1} (1 + \varepsilon \kappa_3)^{-1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Применение обозначений (2.3) позволяет уравнение Беллмана записать следующим образом:

$$R+l[p(d-1)z_2z_3+q(1-d)z_1z_3]+\varepsilon f=1, W(\varepsilon, 0)\equiv 0 \quad (3.4)$$

$$f=f(z_1, z_2, z_3, p, q, r, \varepsilon)=l\{p[-(1+\varepsilon\kappa_2)(1+\varepsilon\kappa_3)+$$

$$+(d-1-\varepsilon)(\kappa_2+\kappa_3+\varepsilon\kappa_2\kappa_3)]z_2z_3+q[(1-d)(\kappa_3-\kappa_2-1-\varepsilon\kappa_2)\times$$

$$\times(1+\varepsilon)^{-1}(1+\varepsilon\kappa_2)^{-1}]z_1z_3+rd^{-1}(1+\varepsilon\kappa_2)(1+\varepsilon\kappa_3)^{-1}z_1z_2\}$$

При $\varepsilon \neq 0$ решение задачи Коши (3.4) строится в виде разложения (2.5). На первом шаге получается уравнение

$$R_0+l[p_0(d-1)z_2z_3+q_0(1-d)z_1z_3]=1, W_0(0)=0 \quad (3.5)$$

решение которого согласно (1.4) равно

$$W_0=z, p_0=z_1z^{-1}, q_0=z_2z^{-1}, r_0=z_3z^{-1}, R_0=1 \quad (3.6)$$

Функция W однозначно определяется линейным уравнением с известной неоднородностью

$$p_0p_1+q_0q_1+r_0r_1+l[p_1(d-1)z_2z_3+q_1(1-d)z_1z_3]=$$

$$=-f_0\equiv -f(z_1, z_2, z_3, p_0, q_0, r_0, 0), W_1(0)=0 \quad (3.7)$$

так как на основании (3.6) сумма квадратов коэффициентов при производных p_1, q_1, r_1 в (3.7) отлична от нуля: $1+l^2(d-1)^2z_2^2z_3^2(z_1^2+z_2^2)\geq 1>0$. Решение задачи (3.7) строится методом характеристик, которые задаются отношениями [4]:

$$\frac{dz_1}{p_0+l(d-1)z_2z_3}=\frac{dz_2}{q_0+l(1-d)z_1z_3}=\frac{dz_3}{r_0}=\frac{dW_1}{f_0}=dz \quad (3.8)$$

Последняя пропорция в (3.8) является производной от первых трех. Так как интегрируемые комбинации уравнений (3.8) находятся явно, то искомое решение может быть представлено в виде квадратуры

$$W_1=1/2ld^{-1}(d-1)(d-1+2d\kappa_2)z_3z^{-3}\left\{[(z_2^2-z_1^2)\cos\Psi+2z_1z_2\sin\Psi]\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^z y^2\sin\beta y^2 dy+[2z_1z_2\cos\Psi-(z_2^2-z_1^2)\sin\Psi]\int_0^z y^2\cos\beta y^2 dy\right\} \quad (3.9)$$

$$\Psi=l(d-1)z_2z, \beta=\beta(z_1, z_2, z_3)=l(d-1)z_3z^{-1}$$

При малых значениях z_3 в первом приближении формула (3.9) принимает вид (2.7)

$$W_1=(1-d+2\kappa_2)l(d-1)z_1z_2z_3/3+O(z_3^2) \quad (3.10)$$

Если приближенный синтез при помощи выражения (3.9) оказывается трудно реализуемым на практике, так как он требует вычисления сложной квадратуры, то можно воспользоваться формулой (3.10).

Пусть величина z_{30} велика (порядка z_0) и пусть, ради определенности, $z_{30}>0, d>1$. Тогда выражение (3.9) может быть представлено при помощи интегралов Френеля C и S [5]:

$$W_1=1/4(d-1+2d\kappa_2)(dz)^{-1}\{z_1^2-z_2^2+\{1/2\pi\Psi\}^{1/2}\{[(z_2^2-z_1^2)C(\Psi^{1/2})-$$

$$-2z_1z_2S(\Psi^{1/2})]\cos\Psi+[(z_2^2-z_1^2)S(\Psi^{1/2})+2z_1z_2C(\Psi^{1/2})]\sin\Psi\}\}$$

Аналогичные выражения для W_1 имеют место при $z_{30}<0$ или $d<1$.

Построенная функция Беллмана первого приближения $V_{(1)}(\varepsilon, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = z + \varepsilon W_1$, где переменные z_i определяются согласно (3.2), дает искомое решение задачи оптимального быстрогодействия с погрешностью $O(\varepsilon^2)$. Значение $t_1 = z_0 + \varepsilon W_1(z_{10}, z_{20}, z_{30})$ на величину $\sim \varepsilon^2$ отличается от минимального времени, необходимого для приведения фазовой точки системы (3.3) в начало координат, а функции u_i , вычисленные согласно (2.5), (2.9), представляют приближенный синтез оптимального управления. Аналогично п. 2 можно показать, что приведение в начало координат вектора (z_1, z_2, z_3) из заданной начальной точки при помощи построенного таким образом приближенного управления потребует времени на величину порядка $O(\varepsilon^2)$ больше, чем точное оптимальное управление.

На основе квадратур, аналогичных (3.9), можно построить последующие коэффициенты W_k ($k=2, 3, \dots$). При помощи известного порождающего решения (1.5) находится в виде квадратур или численно приближенное решение системы (3.3) с произвольной заданной степенью точности по ε , с какой вычислена функция W .

Отметим, что при помощи изложенного в п. 2, 3 подхода может быть приближенно построена функция Беллмана с учетом других возмущающих факторов различной природы (моментов сил трения, зависящих от угловой скорости, и др.). Пусть, например, в случае, когда тело близко к сферически симметричному, на систему (2.1) действуют моменты сил вязкого трения $-\mu\lambda_i z_i$, где $\mu\lambda_i z_i$ — малые коэффициенты. Тогда добавка в выражении для функции W_1 в (2.7) равна $-1/2(\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2)$.

Аналогично проводится построение высших приближений, а также учет дополнительных возмущений в системе (3.3), которые войдут только в функцию f_0 .

Поступила 17 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М., «Машиностроение», 1968.
2. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М., «Наука», 1969.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М., «Наука», 1965.
4. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1964.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.