

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ
В ЗАДАЧЕ ДВУНОГОЙ ХОДЬБЫ

В. В. БЕЛЕЦКИЙ, П. С. ЧУДИНОВ

(Москва)

Предлагаемая работа является продолжением исследований по динамике движения двуногих шагающих аппаратов, начатых в [1-3]. Изучение движения производится с помощью нелинейных уравнений в рамках динамической схемы аппарата, предложенной в [3]. Рассматриваются плоские движения по горизонтальной поверхности. Для исследования применяется полуобратный метод [4-5], состоящий в том, что часть обобщенных координат задается в виде явных функций времени, а все остальные кинематические и динамические величины определяются из дифференциальных уравнений движения. В качестве задаваемых функций используются координаты точки подвеса ног и концов ног аппарата. Для решения возникающей нелинейной краевой задачи применяются численные расчеты на ЭВМ¹. Проводится параметрическая оптимизация нескольких задач двуногой ходьбы, в результате чего находятся оптимальные конфигурации аппарата при ходьбе, минимизирующие энергетические затраты.

1. В обозначениях и предположениях работы [3] уравнения движения шагающего аппарата (фиг. 1), записанные в форме уравнений Лагранжа второго рода, имеют вид

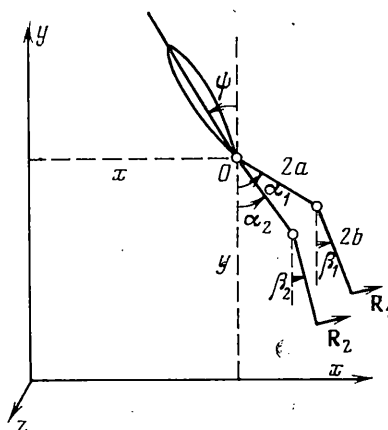
$$\begin{aligned}
 Mx_c'' &= R_x, & My_c'' + Mg &= R_y & (1.1) \\
 I\psi'' - k_r(x'' \cos \psi + y'' \sin \psi) - gk_r \sin \psi &= -(q_1 + q_2) \\
 I_a \alpha_i'' + k_a(x'' \cos \alpha_i + y'' \sin \alpha_i) + \\
 + I_{ab}[\beta_i'' \cos(\alpha_i - \beta_i) + \beta_i'' \sin(\alpha_i - \beta_i)] + gk_a \sin \alpha_i &= Q_{\alpha_i} \\
 I_b \beta_i'' + k_b(x'' \cos \beta_i + y'' \sin \beta_i) + \\
 + I_{ab}[\alpha_i'' \cos(\alpha_i - \beta_i) - \alpha_i'' \sin(\alpha_i - \beta_i)] + gk_b \sin \beta_i &= Q_{\beta_i}
 \end{aligned}$$

Использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 Mx_c &= Mx + \sum_{i=1}^2 (k_a \sin \alpha_i + k_b \sin \beta_i) - k_r \sin \psi \\
 My_c &= My - \sum_{i=1}^2 (k_a \cos \alpha_i + k_b \cos \beta_i) + k_r \cos \psi \\
 R_x &= R_{1x} + R_{2x}, & R_y &= R_{1y} + R_{2y} \\
 Q_{\alpha_i} &= -u_i + q_i + 2a(R_{ix} \cos \alpha_i + R_{iy} \sin \alpha_i) \\
 Q_{\beta_i} &= u_i + 2b(R_{ix} \cos \beta_i + R_{iy} \sin \beta_i) \quad (i=1,2) \\
 M &= m_0 + 2m_a + 2m_b + M_1, & I_a &= I_a^0 + 4a^2 m_b, & I_{ab} &= 2abm_b \\
 k_a &= a(m_a + 2m_b), & k_b &= bm_b, & k_r &= rM_1
 \end{aligned}$$

¹ Белецкий В. В., Чудинов П. С. Нелинейные модели двуногой ходьбы. М., Ин-т прикладной математики, 1975, препринт № 19.

Здесь x, y — декартовы координаты, задающие положение «таза» (точки O подвеса ног) в пространстве; ψ, α_i, β_i — угловые координаты, описывающие положение корпуса и ног аппарата; u_i — момент сил управления в каждом колене аппарата; q_i — момент сил управления между соответствующим бедром и корпусом аппарата; R_{ix}, R_{iy} — горизонтальная и вертикальная составляющие силы, действующей на опорную точку каждой ноги; m_0 — масса таза (материальная точка в O); M_1 — масса корпуса (балансира); r — расстояние от O до центра масс корпуса; I — момент инерции корпуса относительно оси z в точке O ; m_a — масса бедра; a — расстояние от O до



Фиг. 1

центра масс бедра; I_a° — момент инерции бедра относительно оси z в точке O ; m_b — масса голени; b — расстояние от колена до центра масс голени; I_b — момент инерции голени относительно оси z в точке колена; g — ускорение силы тяжести. При этом x_c, y_c имеют смысл координат центра масс системы. Здесь и в дальнейшем индекс i относится к опорной (если рассматривается одноопорная фаза) или передней (если рассматривается двуопорная фаза) ноге; индекс 2 относится к переносимой (одноопорная фаза) или задней (двуопорная фаза) ноге.

Как известно [3], после задания движения ног в семи уравнениях (1.1) в случае ходьбы, имеющей двуопорную фазу, искомыми являются девять функций: $u_i, q_i, R_{ix}, R_{iy}, \psi$ ($i=1, 2$).

Для того, чтобы система (1.1) была замкнутой, необходимо доопределить векторы реакции. Доопределим их следующим образом [4]:

$$\mathbf{R}_1 = \lambda(t) \mathbf{R}, \quad \mathbf{R}_2 = [1 - \lambda(t)] \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \quad (1.2)$$

Здесь $\lambda(t)$ — произвольная скалярная функция, описывающая процесс переноса опоры с одной ноги на другую и удовлетворяющая условиям

$$\lambda(t_0) = 1, \quad \lambda(t_k) = 0 \quad (1.3)$$

где t_0 — момент начала, t_k — момент окончания двуопорной фазы. На участке одноопорного движения $\lambda=1$. После доопределения реакций в семи уравнениях (1.1) неизвестными являются семь функций: ψ, u_i, q_i, R_x, R_y , т. е. задача определена.

2. Изложим алгоритм решения нелинейной задачи ходьбы, имеющей и одноопорную, и двуопорную фазы движения.

Будем рассматривать регулярные походки, т. е. походки с одинаковой длиной L каждого шага. Период движения аппарата (время, в течение которого аппарат совершает два шага) равен T . Все одноопорные фазы длятся одно и то же время $1/2 T - \tau^*$; а двуопорные — время τ^* . Пусть $t_{v,1}$ — момент начала v -й одноопорной фазы; тогда $t_{v,2} = t_{v,1} + 1/2 T - \tau^*$ — момент начала v -й двуопорной фазы; x_v°, y_v° — координаты v -й точки следовой дорожки

ки ($\nu=0, 1, 2, \dots$). Рассматривается движение по горизонтальной поверхности, следовательно, $y^{\circ}=y^{\circ}=\text{const}$.

В фазе одноопорного движения, по условию, $R_{2x}=R_{2y}=0$. В фазе двуопорного движения реакции доопределены формулами (1.2). Функцию $\lambda(t)$, удовлетворяющую условиям (1.3), выберем в виде

$$\lambda(t) = (t_{\nu, 1} + 1/2 T - t) / \tau^*$$

Пусть кинематика ног аппарата и его поступательное движение заданы, т. е. известны функции $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $x(t)$, $y(t)$ ($i=1, 2$). Получим дифференциальное уравнение для угла отклонения корпуса.

Введем следующие обозначения:

$$A_1(t) = Mx'' + k_a \sum_{i=1}^2 (\alpha_i'' \cos \alpha_i - \alpha_i'^2 \sin \alpha_i) + k_b \sum_{i=1}^2 (\beta_i'' \cos \beta_i - \beta_i'^2 \sin \beta_i)$$

$$A_2(t) = Mg + My'' + k_a \sum_{i=1}^2 (\alpha_i'' \sin \alpha_i + \alpha_i'^2 \cos \alpha_i) + k_b \sum_{i=1}^2 (\beta_i'' \sin \beta_i + \beta_i'^2 \cos \beta_i)$$

$$\varphi_1(t) = 2(a \cos \alpha_2 + b \cos \beta_2), \quad \delta_y(t) = 2(a \cos \alpha_1 + b \cos \beta_1) - \varphi_1(t)$$

$$\varphi_2(t) = 2(a \sin \alpha_2 + b \sin \beta_2), \quad \delta_x(t) = 2(a \sin \alpha_1 + b \sin \beta_1) - \varphi_2(t)$$

Левые части последних уравнений (1.1) обозначим через A_{α_i} , A_{β_i} соответственно. Поскольку кинематика движения задана, величины $\delta_x(t)$, $\delta_y(t)$, $A_i(t)$, $\varphi_i(t)$, $A_{\alpha_i}(t)$, $A_{\beta_i}(t)$ ($i=1, 2$) являются известными функциями времени.

Сложим третье уравнение с последними двумя уравнениями системы (1.1). При этом все управления взаимно уничтожатся, так как являются внутренними силами рассматриваемой системы. В правой части полученного уравнения реакции R_{ix} , R_{iy} ($i=1, 2$) заменим выражениями (1.2), в которых R_x и R_y определены левыми частями уравнений (1.1). В итоге получим искомое уравнение для нахождения угла ψ :

$$\psi'' = [\Phi_2(t, \psi)\psi'^2 + \Phi_3(t, \psi) + \Phi_4(t)] / \Phi_1(t, \psi) \quad (2.1)$$

$$\Phi_1(t, \psi) = I + k_r(\varphi_1 + \lambda \delta_y) \cos \psi + k_r(\varphi_2 + \lambda \delta_x) \sin \psi$$

$$\Phi_2(t, \psi) = k_r(\varphi_1 + \lambda \delta_y) \sin \psi - k_r(\varphi_2 + \lambda \delta_x) \cos \psi$$

$$\Phi_3(t, \psi) = gk_r \sin \psi + k_r(x'' \cos \psi + y'' \sin \psi)$$

$$\Phi_4(t) = A_1(\varphi_1 + \lambda \delta_y) + A_2(\varphi_2 + \lambda \delta_x) - (A_{\alpha_1} + A_{\beta_1} + A_{\alpha_2} + A_{\beta_2})$$

Среди множества решений уравнения (2.1) прежде всего представляют интерес периодические решения. Известно [3], что ввиду полной равноправности обеих ног линеаризованное уравнение (2.1) имеет период $1/2 T$. Поэтому и в нелинейной постановке ищем периодическое с периодом $1/2 T$ и непрерывное вместе с первой производной решение $\psi(t)$ уравнения (2.1). Краевые условия имеют вид

$$\psi(t_{\nu, 1}) - \psi(t_{\nu, 1} + 1/2 T) = 0, \quad \psi'(t_{\nu, 1}) - \psi'(t_{\nu, 1} + 1/2 T) = 0 \quad (2.2)$$

Для решения двухточечной краевой задачи (2.1), (2.2) использовалась одна из модификаций метода Ньютона [6]. После нахождения $\psi(t)$, $\psi'(t)$, $\psi''(t)$ легко определяются остальные неизвестные задачи. Из уравнений (1.1) находятся R_x , R_y ; после этого по формулам (1.2) — R_{ix} , R_{iy} ($i=1, 2$).

$$R_x(t) = A_1(t) - k_r(\psi'' \cos \psi - \psi'^2 \sin \psi), \quad R_y(t) = A_2(t) - k_r(\psi'' \sin \psi + \psi'^2 \cos \psi)$$

$$R_{1x} = \lambda R_x, \quad R_{2x} = (1 - \lambda) R_x, \quad R_{1y} = \lambda R_y, \quad R_{2y} = (1 - \lambda) R_y$$

Из уравнений (1.1) определяются управления в шарнирах аппарата

$$u_i = \dot{A}_{\beta_i} - 2b(R_{ix} \cos \beta_i + R_{iy} \sin \beta_i)$$

$$q_i = A_{\alpha_i} + u_i - 2a(R_{ix} \cos \alpha_i + R_{iy} \sin \alpha_i) \quad (i=1,2)$$

Чтобы иметь возможность сравнивать энергетические затраты при различных походках, будем подсчитывать работу управляющих моментов на одном шаге по следующей формуле [7]:

$$A = \int_{t_{v,1}}^{t_{v,1} + 1/2 T} \sum_{i=1}^2 [|u_i(\beta_i - \alpha_i)| + |q_i(\alpha_i - \psi)|] dt$$

Замечание. В качестве исходного приближения $\psi(t_{v,1})$, $\psi'(t_{v,1})$ при решении краевой задачи (2.1), (2.2) можно использовать значения $\psi_L(t_{v,1})$, $\psi_L'(t_{v,1})$, полученные из решения соответствующей линейной задачи ходьбы.

3. Для того чтобы реализовать описанный выше алгоритм, следует задать кинематику ног и поступательное движение аппарата. Прежде чем сделать это, сформулируем требования, предъявляемые к движению шагающего аппарата. Эти требования, с одной стороны, имеют целью приблизить описание походки к реальным движениям; с другой стороны, они выражают те условия, которые могут быть специально наложены на движение (например, условие отсутствия вертикальных колебаний платформы шагающего аппарата).

1. Непрерывность походки по углам и угловым скоростям. Как известно [3], функции $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ ($i=1, 2$) должны удовлетворять следующим условиям периодичности и повторяемости:

$$\alpha_i(t) = \alpha_i(t+T), \quad \alpha_2(t+t^*) = \alpha_1(t); \quad \beta_i(t) = \beta_i(t+T), \quad \beta_2(t+t^*) = \beta_1(t) \quad (3.1)$$

Здесь t^* — запаздывание (время между началами опоры на первую и вторую ноги). Будем рассматривать правильные походки, для которых $t^* = 1/2 T$. Потребуем, чтобы задаваемая походка была непрерывна по углам и угловым скоростям.

Последнее требование, вообще говоря, не обязательно. Например, в [3] рассмотрены разрывные по угловым скоростям походки. Разрыв угловых скоростей происходит в момент смены фазы опоры на фазу переноса и, наоборот, в момент смены фазы переноса на фазу опоры. Походки получаются «спотыкающимися». Это означает, что на ногу в момент смены фазы действует (дополнительно к управлениям и реакциям) мгновенный импульс (ударное воздействие), причем как при постановке ноги на поверхность, так и при отрыве ноги от поверхности. Требование непрерывности по угловым скоростям снимает эту трудность. Непрерывность по углам и угловым скоростям следует обеспечивать в моменты смены фаз.

Учитывая (3.1), получим аналитическую запись данного требования

$$\alpha_k(t_{v,1}) = \alpha_j(t_{v,1} + 1/2 T), \quad \alpha_k(t-0 \rightarrow t_{v,2}) = \alpha_k(t+0 \rightarrow t_{v,2})$$

$$\beta_k(t_{v,1}) = \beta_j(t_{v,1} + 1/2 T), \quad \beta_k(t-0 \rightarrow t_{v,2}) = \beta_k(t+0 \rightarrow t_{v,2}) \quad (k=1,2)(j=k+(-1)^{k-1}) \quad (3.2)$$

$$\alpha_k^*(t_{v,1}) = \alpha_j^*(t_{v,1} + 1/2 T), \quad \alpha_k^*(t-0 \rightarrow t_{v,2}) = \alpha_k^*(t+0 \rightarrow t_{v,2})$$

$$\beta_k^*(t_{v,1}) = \beta_j^*(t_{v,1} + 1/2 T), \quad \beta_k^*(t-0 \rightarrow t_{v,2}) = \beta_k^*(t+0 \rightarrow t_{v,2}) \quad (3.3)$$

2. Антропоморфность походки. Будем рассматривать походки, при которых ноги движутся по «человечьи» — коленками вперед. Аналитически это означает, что в процессе движения выполняется неравенство $\alpha_i(t) \geq \beta_i(t)$ ($i=1, 2$).

3. Мягкость походки. Мягкость походки означает, что скорость конца переносимой ноги в момент отрыва ноги от поверхности и в момент постановки ноги на поверхность должна равняться нулю.

Пусть x_2, y_2 — декартовы координаты конца переносимой ноги. Тогда условие мягкости походки имеет вид

$$x_2 \cdot (t_{v,1}) = x_2 \cdot (t_{v,2}) = 0, \quad y_2 \cdot (t_{v,1}) = y_2 \cdot (t_{v,2}) = 0 \quad (3.4)$$

4. Комфортабельность походки. Этот термин объединяет два условия, предъявляемых к движению: во-первых, точка подвеса ног, где находится центр масс платформы аппарата, должна двигаться на постоянной высоте от поверхности; во-вторых, эта точка должна двигаться с постоянной скоростью. Аналитический вид этих условий

$$y - y_v^\circ = h, \quad x - x_v^\circ = V(t - t_{v,1}) + S$$

Здесь x_v°, y_v° — координаты точки опоры; h — высота точки подвеса ног над поверхностью; V — скорость движения аппарата; S — опорный отрезок (расстояние от точки опоры до проекции точки подвеса ног на горизонтальную плоскость в момент начала одноопорной фазы); $h, V, S = \text{const}$.

5. Свободность походки. Под «свободностью» понимается следующее: походки должны обладать достаточным числом свободных параметров. Например, переносимая нога должна подниматься на заданную высоту над горизонтальной поверхностью, чтобы иметь возможность преодолевать незначительные препятствия. Аналитическая запись этого условия

$$\max |y_2(t) - y_v^\circ| \geq a_1, \quad a_1 = \text{const} \quad (3.5)$$

6. Естественность походки. Будем называть походку естественной, если горизонтальная составляющая реакции в точке опоры направлена в сторону проекции центра тяжести аппарата на горизонтальную плоскость. В данной работе естественность походок будем проверять с помощью следующих соотношений:

$$\lambda R_x(x_c - x_v^\circ) \geq 0, \quad (1 - \lambda) R_x(x_c - x_{v-1}^\circ) \geq 0 \quad (3.6)$$

Здесь x_c — проекция центра масс шагающего аппарата на ось x ; x_v°, x_{v-1}° — горизонтальные координаты точек опоры соответственно передней и задней ног.

На участке одноопорного движения $\lambda = 1$, следовательно, достаточно проверить выполнение только первого соотношения (3.6).

Кроме того, при движении шагающего аппарата вертикальные составляющие сил реакции должны быть положительны (иначе происходит отрыв от поверхности). Это условие запишется так:

$$R_{iy} > 0 \quad (i=1, 2) \quad (3.7)$$

Предполагается, что опорная точка ноги не скользит по поверхности. В данной работе ограничимся перечисленными требованиями. Формируя походку, будем стараться удовлетворить наибольшему числу этих требований.

4. При ходьбе между координатами точки подвеса ног, координатами концов ног и углами α_i, β_i ($i=1, 2$) имеются следующие кинематические связи:

$$y = y_i + 2(a \cos \alpha_i + b \cos \beta_i), \quad x = x_i - 2(a \sin \alpha_i + b \sin \beta_i) \quad (i=1, 2) \quad (4.1)$$

Здесь x_i, y_i ($i=1, 2$) — координаты концов ног аппарата. Задавая функции $x(t), y(t), x_i(t), y_i(t)$ ($i=1, 2$), из (4.1) можно получить зависимость

углов, описывающих движение ног, от времени. Соответствующие формулы при $a=b$ имеют вид

$$\alpha_i(t) = \operatorname{arctg} \frac{\theta_{i2}}{\theta_{i1}} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4a^2}{\theta_{i1}^2 + \theta_{i2}^2} - 1} \quad (4.2)$$

$$\beta_i(t) = \operatorname{arctg} \frac{\theta_{i2}}{\theta_{i1}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4a^2}{\theta_{i1}^2 + \theta_{i2}^2} - 1}$$

$$\theta_{i1}(t) = 1/2[y(t) - y_i(t)], \quad \theta_{i2}(t) = 1/2[x_i(t) - x(t)] \quad (i=1, 2)$$

Продифференцировав (4.1), после несложных выкладок найдем $\alpha_i^*(t)$, $\beta_i^*(t)$

$$\alpha_i^*(t) = (\theta_{i1}^* \cos \beta_i + \theta_{i2}^* \sin \beta_i) / a \sin(\beta_i - \alpha_i) \quad (i=1, 2) \quad (4.3)$$

$$\beta_i^*(t) = (\theta_{i1}^* \cos \alpha_i + \theta_{i2}^* \sin \alpha_i) / b \sin(\alpha_i - \beta_i)$$

Функции $\alpha_i^{**}(t)$, $\beta_i^{**}(t)$ определяются дифференцированием (4.3).

Теперь сформируем походку, которую назовем комфортабельной. В качестве основного условия, которому должна удовлетворять эта походка, возьмем условие комфортабельности.

Итак, пусть во время движения выполняются соотношения

$$y - y_1 = h, \quad y_1 = y_v^0 = y^0, \quad x - x_1 = V(t - t_{v,1}) + S, \quad x_1 = x_v^0 \quad (4.4)$$

Обеспечим непрерывность походки по углам и угловым скоростям. Поскольку точка подвеса ног движется на постоянной высоте от горизонтальной поверхности, для непрерывности по углам функции $x(t)$, $x_2(t)$, $y_2(t)$ должны удовлетворять следующим условиям (фиг. 2):

$$x_1 - x(t_{v,1}) = x_2(t_{v,1} + 1/2T) - x(t_{v,1} + 1/2T) \quad (4.5)$$

$$x_2(t_{v,1} + 1/2T) - x_1 = x_1 - x_2(t_{v,1}), \quad y_2(t_{v,1} + 1/2T) = y^0 \quad (x_1 = \text{const})$$

Пусть условия (4.5) выполнены. Обратимся к условиям (3.3). Подставляя (4.3), где $i=1, 2$, в (3.3) и учитывая, что условия (3.2) удовлетворены (в силу (4.5)), получим, что для непрерывности по угловым скоростям необходимо, чтобы

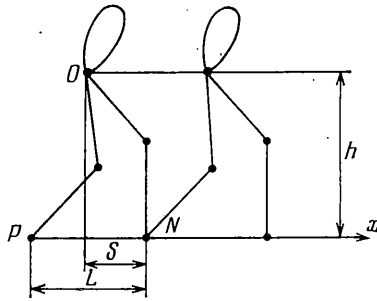
$$x_2^*(t_{v,1}) = x_2^*(t_{v,1} + 1/2T) = 0, \quad y_2^*(t_{v,1}) = y_2^*(t_{v,1} + 1/2T) = 0 \quad (4.6)$$

Следовательно, для обеспечения непрерывности походки по углам и угловым скоростям следует выбирать функции $x_2(t)$, $y_2(t)$ таким образом, чтобы они подчинялись условиям (4.5), (4.6). Чтобы походка была мягкой и свободной, эти функции должны также удовлетворять соотношениям (3.4), (3.5). Антропоморфность походки обеспечим, учитывая в формулах (4.2) главное значение функции $\operatorname{arctg}(\theta_{i1}, \theta_{i2})$ ($i=1, 2$).

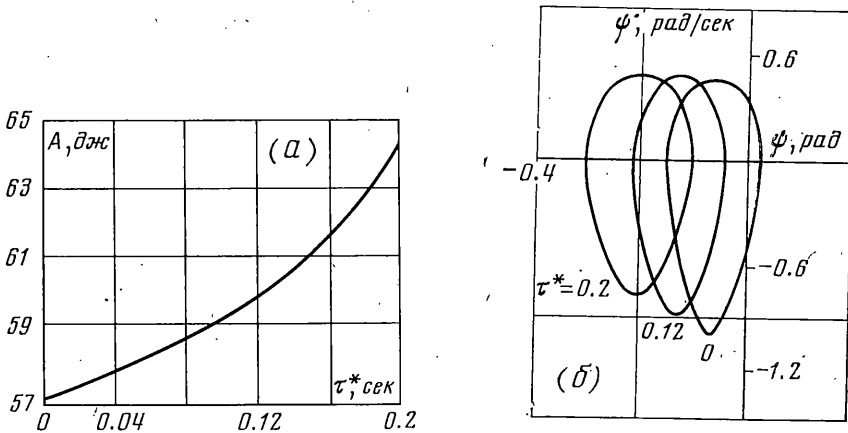
Из формул (4.3) следует, что в процессе движения не должны выполняться равенства $\alpha_i = \beta_i$, ($i=1, 2$), так как в этом случае мгновенные угловые скорости (и угловые ускорения) станут бесконечно большими. Бедро и голень не должны составлять одну линию. Это ограничение является следствием структуры уравнений (4.1). Его аналитическая форма $\theta_{i1}^2 + \theta_{i2}^2 < 4a^2$ ($i=1, 2$). Найдем движение ног аппарата. Для опорной ноги в течение всего шага ($t_{v,1} \leq t \leq t_{v,1} + 1/2T = t_{v+1,1}$) справедливы равенства $x_1 = x_v^0$, $y_1 = y_v^0$, и, следовательно, функции $\theta_{11}(t)$, $\theta_{12}(t)$ имеют вид

$$\theta_{11}(t) = h/2 = \text{const}, \quad \theta_{12}(t) = -[V(t - t_{v,1}) + S]/2 \quad (4.7)$$

Подставляя (4.7) в (4.2), определим функции $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$, т. е. движение опорной ноги. Для того чтобы построить движение переносимой ноги,



Фиг. 2



Фиг. 3

необходимо задать функции $x_2(t)$, $y_2(t)$, учитывая (3.4), (3.5), (4.5), (4.6). Кроме того, за время одноопорной фазы конец переносимой ноги должен переместиться из точки с координатами $(x_v^\circ - L, y^\circ)$ в точку $(x_v^\circ + L, y^\circ)$; в течение двуопорной фазы координаты конца переносимой ноги постоянны $-(x_v^\circ + L, y^\circ)$. Выберем функции $x_2(t)$, $y_2(t)$ следующими:

при $t_v, 1 \leq t \leq t_v, 2$

$$x_2(t) = x_v^\circ - L \cos \omega(t - t_v, 1)$$

$$\omega = 2\pi / (T - 2\tau^*), \quad a^* = \text{const} > 0$$

$$y_2(t) = y^\circ + a^* \sin^2 \omega(t - t_v, 1)$$

Следовательно

$$\theta_{21}(t) = [h - a^* \sin^2 \omega(t - t_v, 1)] / 2, \quad \theta_{22}(t) = -[V(t - t_v, 1) + S + L \cos \omega(t - t_v, 1)]$$

при $t_v, 2 \leq t \leq t_{v+1}, 1$

$$x_2(t) = x_v^\circ + L = x_{v+1}^\circ = \text{const}, \quad y_2(t) = y^\circ = \text{const}$$

Отсюда

$$\theta_{21}(t) = h/2 = \theta_{11}, \quad \theta_{22}(t) = [L - V(t - t_v, 1) - S] / 2$$

После этого по формулам (4.2) находим движение переносимой ноги. Сформированная комфортабельная походка зависит от шести свободных параметров h, V, S, a^*, T, τ^* и удовлетворяет всем ранее сформулированным

ным требованиям, кроме последнего, которое следует проверять в процессе ходьбы, используя соотношения (3.6), (3.7).

Подставляя $x_2(t)$ в первое уравнение системы (4.5), найдем, что длина шага походки равна расстоянию, которое проходит за подпериод точка подвеса ног

$$L = \frac{1}{2}VT \quad (4.8)$$

5. Задав походку, т. е. фактически задав значения шести указанных параметров и решив краевую задачу (2.1), (2.2), найдем величину работы, требуемой для реализации данной походки. Следовательно, работа управлений зависит от шести параметров: $A = A(h, V, S, a^*, \tau^*, T)$.

Как показали расчеты¹, одноопорная ходьба энергетически более выгодна, чем аналогичная ходьба с двуопорной фазой (фиг. 3, а). Вместе с тем наличие двуопорной фазы сглаживает фазовую кривую $\psi(\psi)$, т. е. движение корпуса становится непрерывным не только по углу и угловой скорости, но и по угловому ускорению (фиг. 3, б).

В дальнейшем зафиксируем значения параметров τ^* и a^* : $\tau^* = 0$, $a^* = 0.03$. Отсюда следует, что рассматриваются одноопорные походки с одинаковой максимальной высотой подъема конца переносимой ноги.

Поставим задачу отыскания минимума функции A при выбранных τ^* и a^* . Рассмотрим два варианта этой задачи.

Первый вариант: фиксируем скорость движения шагающего аппарата и ищем минимум работы, отнесенной к длине шага, в зависимости от высоты точки подвеса ног, опорного отрезка и периода движения

$$V = \text{const}, \quad A_{\min}^{\circ} = \min L^{-1}A(h, S, T) \quad (5.1)$$

Второй вариант: фиксируем длину шага аппарата и минимизируем работу по скорости, опорному отрезку и высоте точки подвеса ног (ввиду связи (4.8) параметр T не является свободным)

$$L = \text{const}, \quad A_{\min} = \min A(h, S, V) \quad (5.2)$$

В результате решения задачи (5.1) найдем оптимальную конфигурацию аппарата при заданной скорости; после решения задачи (5.2) — оптимальную конфигурацию и оптимальную скорость при заданной длине шага аппарата.

Приводим результаты решения задачи (5.1):

V , км/час	2.08	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00
$\frac{1}{2}T$, сек	0.481	0.419	0.375	0.342	0.308	0.280
L , м	0.278	0.350	0.417	0.476	0.514	0.545
S , м	-0.203	-0.267	-0.329	-0.386	-0.429	-0.456
h , м	0.805	0.769	0.721	0.664	0.607	0.569
A , дж	94.82	124.93	161.77	204.91	256.46	321.92
$\langle \psi \rangle$, град	-8.91	-13.82	-19.70	-26.47	-34.14	-40.81
$\max \psi - \psi_0 $, град	1.26	1.29	1.37	1.48	1.56	1.66
$p = S/L $	0.732	0.762	0.790	0.812	0.835	0.838

Ниже даны результаты решения задачи (5.2):

L , м	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
h , м	0.835	0.816	0.791	0.761	0.727	0.689	0.649	0.607
V , км/час	0.981	1.553	2.076	2.580	3.003	3.425	3.730	3.968
S , м	-0.130	-0.199	-0.264	-0.325	-0.381	-0.435	-0.485	-0.533
A , дж	13.38	26.54	45.99	72.65	107.98	154.27	214.38	292.11
$\langle \psi \rangle$, град	-3.28	-6.25	-8.65	-10.50	-11.28	-11.94	-11.80	-11.20
$\max \psi - \psi_0 $, град	1.78	2.34	3.08	3.93	5.04	6.23	7.84	9.89
$\frac{1}{2}T$, сек	0.734	0.695	0.694	0.698	0.719	0.736	0.772	0.816
$p = S/L $	0.651	0.663	0.660	0.651	0.635	0.621	0.606	0.592

¹ См. подстрочное примечание к стр. 25.

Все расчеты производились при следующих значениях линейных, весовых и инерционных параметров аппарата: $a=b=0.2125$ м; $r=0.425$ м; $m_a=m_b=5$ кг; $M_1=40$ кг; $m_0=10$ кг; $I=9.633$ кг·м²; $I_a^0=I_b^0=0.301$ кг·м².

Из решения задачи (5.1) видно, что при увеличении скорости движения происходит следующее: период движения и высота точки подвеса ног убывают (аппарат «приседает»); работа, отнесенная к длине шага, возрастает по закону, близкому к линейному; длина опорного отрезка и длина шага растут; вместе с ними растет параметр p , равный модулю отношения этих величин, что свидетельствует о возрастании смещения точки подвеса ног назад относительно направления движения; среднее значение угла ψ возрастает (знак минус означает, что корпус наклоняется вперед по направлению движения); максимальная амплитуда колебаний корпуса мала и увеличивается незначительно.

Следовательно, общая картина изменения оптимальной конфигурации с ростом скорости такова: длина шага аппарата увеличивается, точка подвеса ног смещается назад, аппарат приседает, наклоняя корпус вперед по ходу движения. Оптимальные конфигурации аппарата для значений скорости: 2 км/час (1), 5 км/час (2), 7 км/час (3) изображены на фиг. 4.

Движение с фиксированной длиной шага (данные решения задачи (5.2)) при ее возрастании характеризуется следующими особенностями: высота точки подвеса ног монотонно убывает; скорость движения, длина опорного отрезка, работа и максимальная амплитуда колебаний корпуса монотонно возрастают; среднее значение угла ψ , период движения и параметр p не являются монотонными функциями и имеют экстремумы; при одинаковой длине шага работа, приходящаяся на единицу длины, в данном случае меньше, чем в случае ходьбы с фиксированной скоростью.

На фиг. 5 изображены оптимальные конфигурации аппарата при ходьбе с фиксированной длиной шага 0.2 м (1), 0.5 м (2), 0.9 м (3).

На фиг. 6–13 построено для примера полное решение задачи оптимальной ходьбы (5.1) для значения скорости $V=5$ км/час. Фиг. 6, 7 показывают зависимость функций x , y , x_2 , y_2 , α_i , β_i ($i=1, 2$) от времени; видно, что точка подвеса ног движется комфортно (кривые 1 и 3 на фиг. 6), а переносимая нога отрывается от поверхности и ставится на поверхность мягко (кривые 2 и 4 на фиг. 6).

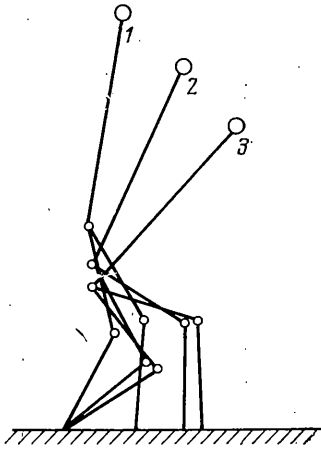
На фиг. 8 движение корпуса изображено на фазовой плоскости ψ , $\dot{\psi}$, причем ψ измеряется в радианах, а $\dot{\psi}$ — в рад/сек; точками обозначены фазовые состояния корпуса через каждые 0.034 сек.

Из фиг. 9, 10 видно, что управления в шарнирах аппарата соотносятся следующим образом: $q_1/q_2 \sim 3$, $u_1/u_2 \sim 7$, $q_1/u_1 \sim 2$, $q_2/u_2 \sim 5$, т. е. управления в опорной ноге в три — семь раз больше управлений в переносимой ноге; управления в бедренном шарнире в два — пять раз больше управлений в колене.

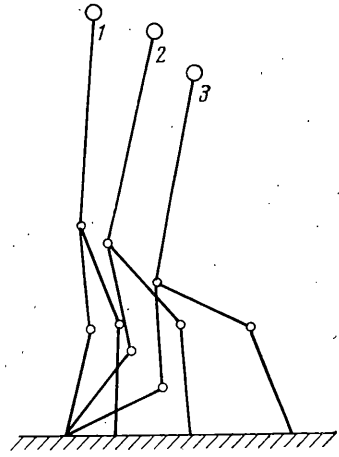
Из фиг. 11 следует, что в течение шага существуют интервалы времени, где не выполняется одно из условий естественности походки (3.6), в то время как вертикальная составляющая реакции в точке опоры остается положительной (фиг. 12).

На фиг. 13 показаны траектории изображающих точек, соответствующих опорной и переносимой ногам, на плоскости переменных α_i , β_i ($i=1, 2$). Изображающая точка, соответствующая опорной ноге, проходит дугу ABC ; изображающая точка, соответствующая переносимой ноге, движется по дуге CDA .

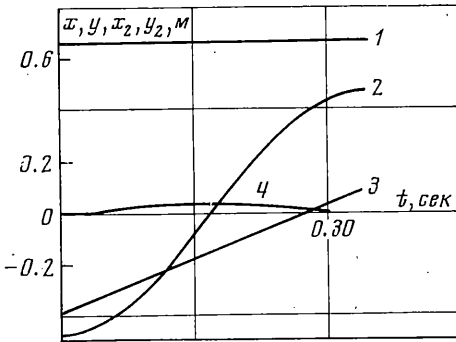
Анализируя характеристики энергетически оптимальной ходьбы (например зависимости R_x и R_y , фиг. 11, 12), можно обнаружить заметное отличие этих кривых от соответствующих характеристик ходьбы человека. Это отличие объясняется, во-первых, элементарностью принятой модели



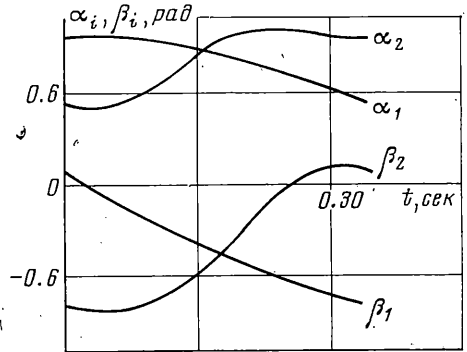
Фиг. 4



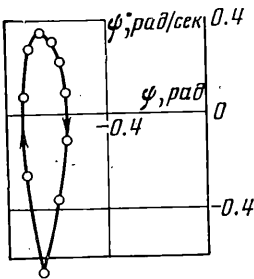
Фиг. 5



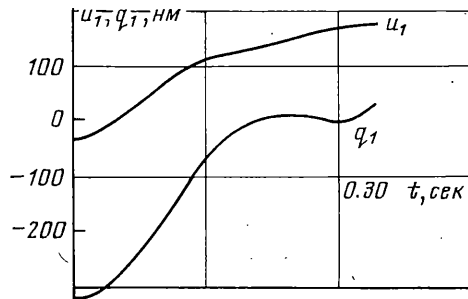
Фиг. 6



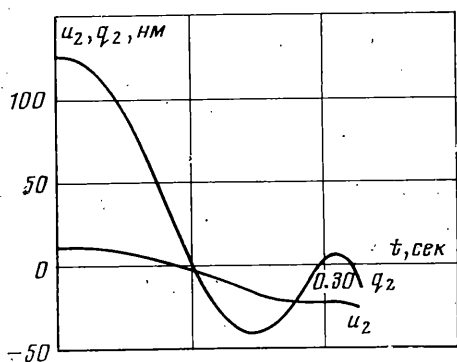
Фиг. 7



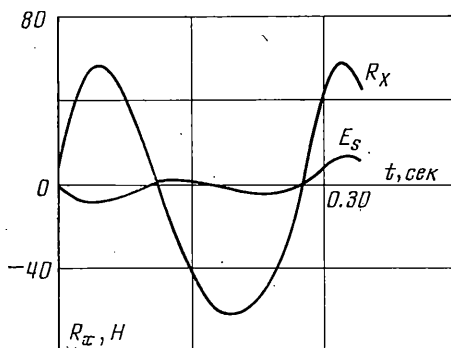
Фиг. 8



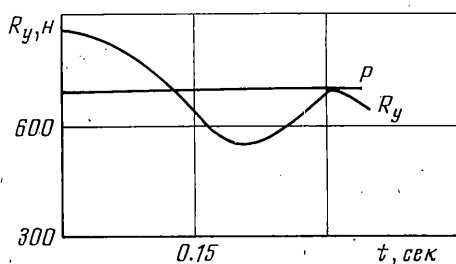
Фиг. 9



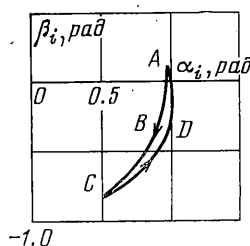
Фиг. 10



Фиг. 11



Фиг. 12



Фиг. 13

ходьбы; во-вторых, тем, что человек ходит, по-видимому, энергетически неоптимально. Последнее находит подтверждение в ранее полученных результатах¹: характеристики неоптимизированной ходьбы данной модели лучше согласуются с данными биомеханических исследований ходьбы человека.

Авторы благодарят Д. Е. Охоцимского за ценные советы и внимание к работе.

Поступила 26 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. Динамика двуногой ходьбы, I. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3.
2. Белецкий В. В. Динамика двуногой ходьбы, II. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 4.
3. Белецкий В. В., Курсанова Т. С. Плоские линейные модели двуногой ходьбы. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4.
4. Vukobratović M., Frank A. A., Juričić D. On the stability of biped locomotion. IEEE Trans. on Bio-Med. Engng, 1970, vol. 17, No. 1. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1972, № 1.)
5. Chow C. K., Jakobson D. H. Studies of human locomotion via optimal programming. Math. Biosci., 1971, vol. 10, No. 3/4.
6. Лебедев В. Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой. Математические методы в динамике космических аппаратов, вып. 5. М., ВЦ АН СССР, 1968.
7. Гриценко Г. П., Морейнис И. Ш. Энергетическая оценка ходьбы человека в норме и на протезах бедра. В кн.: Биомеханика. Изд. Рижск. н.-и. ин-та травматологии и ортопедии, 1975, стр 228–232.

¹ См. подстрочное примечание к стр.