

На фигуре приведены кривые 1, 2, 3 для трех значений параметров (в технической системе единиц): $\mu=0.9 \cdot 10^{-4}$, $\mu=0.08 \cdot 10^{-4}$, $\mu=0.298 \cdot 10^{-4}$. Для остальных параметров были приняты значения: $\alpha=23.56$, $\beta=4.57 \cdot 10^{-4}$.

Поступила 20 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Бологин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956.
2. Гольдблат И. И. Динамическая устойчивость сооружений. М., Стройиздат, 1948.
3. Ивович В. А. Некоторые нелинейные задачи колебания стержней. В сб.: Проблемы прочности в машиностроении, вып. 5. М., Изд-во АН СССР, 1959.
4. Crandall S. H. Perturbation techniques for random vibration of non-linear systems. J. Acoust. Soc. America, 1963, vol. 35, No. 11.
5. Бологин В. В. Статистические методы в строительной механике. М., Госстройиздат, 1961.

УДК 539.376

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ БАЛОК В УСЛОВИЯХ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Я. А. ЛЕЖЛЕП

(Тарту)

Оптимальное проектирование упругих и упругопластических конструкций рассматривалось в ряде работ, среди которых отметим [1-3]. В работе [4] были доказаны некоторые общие теоремы, позволяющие проектировать конструкции минимального веса в условиях ползучести. В последнее время в задачах оптимального проектирования конструкций часто применяются методы математической теории оптимального управления. Популярность их объясняется тем, что они позволяют учитывать ограничения некоторых механических параметров и поэтому приводят к более реальным (по сравнению с классическими методами) проектам. В случае пластических пластин и оболочек методы оптимального управления применялись в работах [2, 3] и др.

Ниже рассматривается оптимальное проектирование балок из материалов, поведение которых является различным при растяжении и сжатии. С помощью принципа максимума Понтрягина определяется толщина балки наименьшего веса. Предполагается, что значение скорости прогиба свободного конца балки задано и толщина ограничена сверху и снизу.

1. Постановка математической задачи. Рассмотрим изгиб прямой консольной балки длины l . Пусть она расположена вдоль оси Ox и нагружена сосредоточенной силой P на ее свободном конце.

Допустим, что балка имеет поперечное сечение вида прямоугольника с постоянной единичной шириной и переменной высотой h . Начало координат поместим в центр тяжести левого конца балки.

Следуя [5, 6], допустим, что поведение материала с различными характеристиками на растяжение и сжатие описывается уравнениями

$$\varepsilon = B(\lambda\sigma)^n \quad (\sigma \geq 0), \quad \varepsilon = -B|\sigma|^n \quad (\sigma < 0) \quad (1.1)$$

где ε — скорость деформации, B , λ и n — постоянные, определяющиеся экспериментально. Из (1.1) с учетом гипотезы Кирхгофа — Лява вытекает

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{w''}{B} (z_1 - z) \right]^{1/n} \quad \left(-\frac{h}{2} \leq z \leq z_1 \right) \\ \sigma = - \left[\frac{w''}{B} (z - z_1) \right]^{1/n} \quad \left(z_1 < z \leq \frac{h}{2} \right) \quad (1.2)$$

Здесь z — вспомогательная координата по толщине балки, z_1 — координата нейтральной линии, w — скорость прогиба. Штрихом обозначено дифференцирование по x .

Для продольного усилия и изгибающего момента имеем $N=0$, $M=P(x-l)$. Поэтому, используя (1.2) и обозначая $\sigma(-h/2) = -\gamma\sigma(h/2)$, получим

$$w'' = B \left[P \left(2 + \frac{1}{n} \right) \right]^n \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right)^{n+1} \frac{(l-x)^n}{h^{2n+1}} \quad (1.3)$$

причем $z_1 = 1/2 h(1-\gamma)/(1+\gamma)$, $\lambda = (\gamma)^{-(n+1)/n}$.

Поставим следующую задачу: найти распределение толщины проекта минимального веса (или объема) при условии, что скорость прогиба на свободном конце имеет заданное значение w_0 . Математически задача сводится к отысканию минимума функционала V , представляющего объем балки, при дифференциальной связи (1.3) и условии $w(l) = w_0$. Кроме того, требуем, что $h_1 \leq h \leq h_2$, где h_1 и h_2 — некоторые числа. Чтобы упростить запись поставленной задачи, введем следующие обозначения:

$$t = x/l, \quad u = h/h_2, \quad \delta = h_1/h_2, \quad x_1 = w/w_0$$

$$x_1' = \frac{dx_1}{dt}, \quad Q = \frac{w_0(n+2)h_2^{2n+1}}{Bl^{n+2}} \left[\frac{n}{P(2n+1)} \right]^n \left(\frac{\gamma}{1+\gamma} \right)^{n+1}$$

Эти обозначения позволяют записать задачу в виде

$$V = h_2 l \int_0^1 u dt = \min$$

при ограничениях

$$x_1'' = (n+2)(1-t)^n [Qu^{2n+1}]^{-1} \quad (\delta \leq u \leq 1) \quad (1.4)$$

2. Применение принципа максимума. Введем дополнительные переменные x_0, x_2 и представим уравнение (1.4) в нормальной форме Коши

$$x_0' = h_2 l u, \quad x_1' = x_2, \quad x_2' = (n+2)(1-t)^n [Qu^{2n+1}]^{-1} \quad (2.1)$$

Граничными условиями для системы (2.1) являются условия

$$x_0(0) = x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_0(1) = \min, \quad x_1(1) = 1 \quad (2.2)$$

Составим функцию Гамильтона (см., например, [7])

$$H = \psi_0 h_2 l u + \psi_1 x_2 + \psi_2 (n+2)(1-t)^n Q^{-1} u^{-2n-1} \quad (2.3)$$

и сопряженную систему

$$\psi_0' = 0, \quad \psi_1' = 0, \quad \psi_2' = -\psi_1 \quad (2.4)$$

Из условий трансверсальности следует, что $\psi_2(1) = 0$ и $\psi_0 < 0$. Поэтому решением системы (2.4) будет

$$\psi_0 = \text{const} < 0, \quad \psi_1 = \text{const}, \quad \psi_2 = -\psi_1(t-1) \quad (2.5)$$

В данном случае целесообразно выбирать $\psi_0 = -1/(h_2 l)$. С учетом (2.5) можно функцию (2.3) представить в виде

$$H = -u + \psi_1 x_2 + \psi_1 (n+2)(1-t)^{n+1} [Qu^{2n+1}]^{-1} \quad (2.6)$$

Согласно принципу максимума Л. С. Понтрягина [7] при оптимальном управлении функция Гамильтона достигает максимума в каждый момент времени t . Поскольку допустимые управления находятся на отрезке $[\delta, 1]$, функция H достигает максимального значения либо во внутренней точке, либо на границе этого отрезка.

Функция (2.6) имеет одну стационарную точку

$$u = u_* = (1/\psi) \sqrt[n+1]{1-t} \quad (2.7)$$

причем введено обозначение

$$\psi = [-\psi_1 (n+2)(2n+1)Q^{-1}]^{-1/(2n+2)} \quad (2.8)$$

Если $\psi > 0$, то в стационарной точке (2.7) имеется максимум. Так как $u_*(1) = 0$, то возможны три случая

$$u = \begin{cases} 1 & (0 \leq t < t_1) \\ (1/\psi) \sqrt[n+1]{1-t} & (t_1 \leq t < t_2) \\ \delta & (t_2 \leq t \leq 1) \end{cases} \quad (2.9)$$

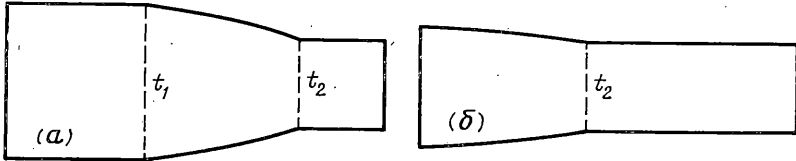
$$u = \begin{cases} (1/\psi)\sqrt{1-t} & (0 \leq t < t_2) \\ \delta & (t_2 \leq t \leq 1) \end{cases} \quad (2.10)$$

$$u = \delta \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (2.11)$$

Здесь t_1 и t_2 — точки переключения; они вычисляются по формулам

$$t_1 = 1 - \psi^2, \quad t_2 = 1 - \delta^2 \psi^2 \quad (2.12)$$

Если никаких ограничений на управление не наложено (кроме $u \geq 0$), т. е. $h_1 = 0$ и h_2 достаточно велико, то (2.7) остается в силе на целом отрезке $0 \leq t \leq 1$.



Фиг. 1

3. Синтез различных случаев. Проекты балок, соответствующие программам управлений (2.9) и (2.10), представлены на фиг. 1, а, б. Программа управления (2.11) не требует специального анализа, так как тогда проект постоянной толщины является проектом наименьшего веса.

1. Проанализируем случай, когда управление изменяется по закону (2.9).

Решая систему (2.1) с учетом (2.9) при граничных условиях (2.2) и удовлетворяя условиям непрерывности фазовых переменных x_0 , x_1 , x_2 в точках переключения t_1 и t_2 , получим

при $0 \leq t < t_1$

$$x_0 = h_2 l t, \quad x_1 = \frac{1}{Q(n+1)} [(1-t)^{n+2} + t(n+2) - 1], \quad x_2 = \frac{n+2}{Q(n+1)} [1 - (1-t)^{n+1}] \quad (3.1)$$

при $t_1 \leq t < t_2$

$$x_0 = \frac{h_2 l}{3} \left[3 - \psi^2 - \frac{2}{\psi} (1-t)^{3/2} \right]$$

$$x_1 = \frac{1}{3Q} \left\{ 4(n+2) \psi^{2n+1} (1-t)^{3/2} + (2n+1) \psi^{2n+4} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{n+1} [-1 + (n+2) [t - (2n+1)(1-t) \psi^{2n+2}]] \right\}$$

$$x_2 = \frac{n+2}{Q(n+1)} [1 + (2n+1) \psi^{2n+2} - 2(n+1) \psi^{2n+1} \sqrt{1-t}] \quad (3.2)$$

при $t_2 \leq t \leq 1$

$$x_0 = \frac{h_2 l}{3} [3 + 3\delta(t-1) - \psi^2(1-\delta^3)]$$

$$x_1 = \frac{1}{Q} \left\{ \frac{(1-t)^{n+2}}{(n+1)\delta^{2n+1}} - \frac{1 - (n+2) [t + (2n+1) \psi^{2n+2} (1-\delta)(t-1)]}{n+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{(2n+1)}{3} \psi^{2n+4} (1-\delta^3) \right\}$$

$$x_2 = \frac{(n+2)}{(n+1)Q} \left[1 - \frac{(1-t)^{n+1}}{\delta^{2n+1}} + (2n+1) \psi^{2n+2} (1-\delta) \right] \quad (3.3)$$

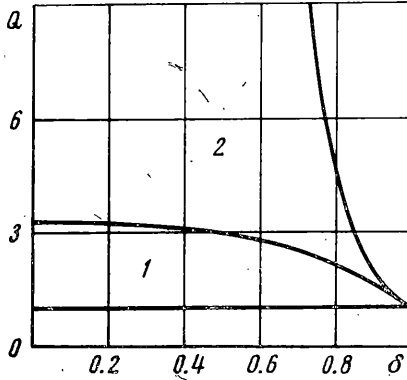
Для вычисления величины ψ получается соотношение

$$\psi = [3(Q-1)(2n+1)^{-1}(1-\delta^3)^{-1}]^{1/(2n+4)} \quad (3.4)$$

Из (3.4) выясняется, что ψ имеет реальные положительные значения, если $Q \geq 1$. Данный проект является оптимальным и реальным, если точки переключения t_1 и t_2 находятся на отрезке $[0, 1]$. Поэтому с помощью (2.12) и (3.4) получим границы множества допустимых значений величины Q (область 1 на фиг. 2)

$$1 \leq Q \leq (1/3) [2(n+2) - (2n+1)\delta^3] \tag{3.5}$$

Объем проекта минимального веса выражает величина $x_0(1)$, вычисляемая по первой формуле (3.3). Пусть $\theta = x_0(1)/(h \cdot l)$, где $h \cdot l$ — объем балки постоянной толщины,



Фиг. 2

имеющей при данной нагрузке P заданное значение скорости прогиба на свободном конце. Тогда

$$\theta = (Q)^{1/(2n+1)} [1 - (1/3) \psi^2 (1 - \delta^3)] \tag{3.6}$$

Результаты вычислений приведены ниже. В вычислениях принималось $\delta = 0.6$, $n = 3$.

Q	1.1	1.5	1.9	2.3	2.7
t_1	0.441	0.228	0.132	0.066	0.015
t_2	0.799	0.722	0.688	0.664	0.645
ψ	0.748	0.878	0.932	0.966	0.993
θ	0.866	0.846	0.847	0.851	0.856

2. Программа управления (2.10) реализуется в случае, когда $t_1 < 0$ и $t_2 \geq 0$. Тогда Q имеет значения больше правой стороны неравенств (3.5).

Интегрируя систему (2.1) с учетом (2.10) и удовлетворяя граничным условиям (2.2), а также условиям непрерывности, получим при $0 \leq t < t_2$

$$x_0 = \frac{2h_2l}{3\psi} [1 - (1-t)^{3/2}], \quad x_1 = \frac{4(n+2)}{3Q} \psi^{2n+1} \left[\frac{3}{2} t + (1-t)^{3/2} - 1 \right]$$

$$x_2 = \frac{2(n+2)}{Q} \psi^{2n+1} (1 - \sqrt{1-t}) \tag{3.7}$$

при $t_2 \leq t \leq 1$

$$x_0 = h_2l \left[\delta(t-1) + \frac{1}{3\psi} (2 + \delta^3 \psi^3) \right]$$

$$x_1 = \frac{1}{Q} \left\{ \frac{(1-t)^{n+2}}{(n+1)\delta^{2n+1}} - \frac{(2n+1)}{3} \delta^3 \psi^{2n+4} + (n+2) \psi^{2n+1} \left[2t - \frac{4}{3} + \frac{2n+1}{n+1} \delta \psi (1-t) \right] \right\}$$

$$x_2 = \frac{n+2}{Q(n+1)} \left\{ -\frac{(1-t)^{n+1}}{\delta^{2n+1}} + \psi^{2n+1} [2(n+1) - (2n+1)\delta\psi] \right\} \tag{3.8}$$

Величина ψ вычисляется из трансцендентного уравнения

$$\psi^{2n+1} [2(n+2) - (2n+1)\delta^3\psi^3] - 3Q = 0 \quad (3.9)$$

В случае данного проекта момент переключения t_2 должен быть неотрицательным, поэтому корень уравнения (3.9) $\psi \leq 1/\delta$. Следовательно, допустимые значения величины Q удовлетворяют условиям

$$1/3 [2(n+2) - (2n+1)\delta^3] \leq Q \leq 1/\delta^{2n+1} \quad (3.10)$$

Условиям (3.10) удовлетворяют точки, лежащие в области 2 на фиг. 2.

Экономию данного проекта по сравнению с проектом постоянной толщины выражает формула $\theta = (2 + \delta^3\psi^3) (3\psi)^{-1} (Q)^{1/(2n+1)}$.

Проведены вычисления при $\delta = 0.6$, $n = 3$. Ниже приводятся значения величин t_2 , ψ и θ при некоторых значениях Q .

Q	4.0	14.0	24.0	29.0	34.0
t_2	0.599	0.391	0.246	0.173	0.080
ψ	1.056	1.300	1.447	1.515	1.599
θ	0.868	0.925	0.963	0.979	0.995

Оптимальный проект балки без ограничений толщины получим, например, из (3.7) и (3.9), приняв там $\delta = 0$ и $t_2 = 1$. Тогда $\theta = 2/3 [2/3(n+2)]^{1/(2n+1)}$. Эту формулу можно получить и методами вариационного исчисления [4]. Здесь θ уже не зависит от величины Q .

Отметим, что в случае задачи с ограничениями на управление при всех точках, лежащих вне областей 1 и 2 на фиг. 2, проект постоянной толщины является проектом наименьшего веса.

Поступила 11 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Рейтман М. И., Шапиро Г. С. Теория оптимального проектирования в строительной механике, теории упругости и пластичности. В сб.: Итоги науки. Механика. Упругость и пластичность. М., ВИНТИ, 1966.
2. Рейтман М. И. Оптимальное проектирование оболочек с помощью принципа максимума. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 3.
3. Lepik O. Minimum weight design of circular plates with limited thickness. Internat. J. Non-linear Mech., 1972, vol. 7, No. 4.
4. Немировский Ю. В. Об учете веса при проектировании конструкций в условиях ползучести. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 4.
5. Соснин О. В. Установившаяся анизотропная ползучесть дисков. ПМТФ, 1963, № 4.
6. Леллер Я. А. Установившаяся ползучесть круглых и кольцевых пластин, выполненных из разномодульного неупругого материала. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, вып. 342.
7. Волгянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М., «Наука», 1969.

НАУЧНАЯ ШКОЛА ПО ПРОБЛЕМАМ ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ СТЕКЛА И КЕРАМИКИ

В г. Обнинске с 1 по 10 июля 1976 г. проводилась летняя Научная школа по проблемам прочности конструкций из стекла и керамики. В работе Научной школы приняли участие 65 ученых — специалистов высших учебных заведений и научно-исследовательских институтов из 16 городов страны (Москвы, Киева, Новосибирска, Казани, Горького, Каунаса, Еревана, Львова, Обнинска, Жуковского, Ленинакана, Новгорода, Ворошиловграда, Одессы, Сумы, Харькова).

Был заслушан 61 доклад по вопросам расчета конструкций из стекла и керамики.

Научную школу открыл член-корреспондент АН СССР Э. И. Григолюк, который сформулировал важнейшие проблемы, стоящие перед участниками школы, отметил актуальность задач теплопрочностного расчета конструкций из стекла и керамики. Армированные, безосколочные трехслойные конструкции, различные виды керамических и металлокерамических материалов нашли применение в различных отраслях народного хозяйства при создании ответственных узлов и конструкций, работающих в широком диапазоне нагрузок и температур. Существенной особенностью таких конструкций является хрупкость материала при обычных условиях и пластичность при высоких температурах. В программе школы представлены доклады, посвященные как теоретическим (аналитическим и численным методам рас-