

УДК 531.391.3

ИЗГИБНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ ПРИ СЛУЧАЙНОМ СТАЦИОНАРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

В. А. ИВОВИЧ

(Москва)

Рассматриваются изгибные колебания прямолинейного стержня постоянного сечения с учетом осевых упругих и инерционных сил при действии случайного стационарного возмущения погонной интенсивности $F(x)R(t)$. Одна из опор стержня является неподвижной, а вторая несет сосредоточенную массу M и имеет упругое закрепление относительно осевых перемещений с коэффициентом жесткости k_0 . Собственные и вынужденные колебания стержня с такими опорными закреплениями изучались в [1-3].

1. Интегро-дифференциальное уравнение изгибных колебаний стержня с учетом переменного характера осевой силы s , вызванного сближением концов, запишем в виде

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - s \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + h \frac{\partial v}{\partial t} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = F(x)R(t) \quad (1.1)$$

где EJ — изгибная жесткость, v — поперечное перемещение стержня, h — коэффициент вязкого затухания, m — погонная масса стержня, s — сила натяжения (в предположении нерастяжимости оси балки).

Сила s определяется выражением

$$s = s_0 + \frac{k_0}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{M}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \quad (1.2)$$

Здесь s_0 — растягивающая сила при отсутствии колебаний. Второй член выражения (1.2) представляет упругий отпор, обусловленный сближением концов балки при изгибных колебаниях. Третий член выражает силу инерции, возникающую при осевом смещении массы M .

Для решения уравнения (1.2) представим перемещение в форме

$$v(x, t) = f(t) \sin(\pi x/l) \quad (1.3)$$

при этом удовлетворяются условия для свободно опертых концов

$$v(0, t) = v(l, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(l, t) = 0 \quad (1.4)$$

Следуя методу Бубнова — Галеркина, приходим к нелинейному дифференциальному уравнению относительно неизвестной функции времени

$$f'' + \alpha f' + \alpha f + \beta g_0(f, f', f'') = VR(t) \quad (1.5)$$

$$\alpha = \frac{h}{m}, \quad \alpha = \omega_0^2 \left(1 + \frac{s_0}{p_0} \right), \quad \beta = \frac{k_0 \pi^4}{4ml^3}, \quad g_0(f, f', f'') = f^3 + 2\mu_1 f[(f')^2 + ff'']$$

$$V = \frac{2}{ml} \int_0^l F(x) \sin \frac{\pi x}{l} dx, \quad \omega_0 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad p_0 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \quad \mu_1 = \frac{\mu}{\beta}, \quad \mu = \frac{M\pi^4}{4ml^3}$$

2. Предположим, что обобщенная сила $VR(t)$ является эргодической случайной стационарной функцией времени с нормальным распределением и нулевым средним значением. Будем считать, что основная полоса спектра частот случайной функции $R(t)$ не охватывает высших частот собственных колебаний стержня. Положим далее, что коэффициенты β и μ являются малыми величинами по сравнению с коэффициентом α . Принимая коэффициент β за малый параметр, будем искать решение уравнения (1.5) в форме

$$f = f_0 + \beta f_1 + \beta^2 f_2 + \dots \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в (1.5) и сравнивая члены, содержащие одинаковые степени параметра β , приходим к рекуррентной последовательности уравнений

$$\begin{aligned} f_0^{**} + \kappa f_0^* + \alpha f_0 &= VR(t), \quad f_1^{**} + \kappa f_1^* + \alpha f_1 = -f^3 - 2\mu_1 f_0 [(f_0^*)^2 + f_0 f_0^{**}] \\ f_2^{**} + \kappa f_2^* + \alpha f_2 &= -3f_0^2 f_1 - 2\mu_1 (2f_1^* f_0^2 + 2f_1 f_0 f_0^{**} + f_0^2 f_1^{**} + f_1 f_0^{*2}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Решение системы уравнений (2.2) может быть построено с помощью импульсной переходной функции

$$h(\tau) = \omega_1^{-1} \exp(-\kappa\tau/2) \sin \omega_1 \tau \quad \text{при } \tau > 0, \quad h(\tau) = 0 \quad \text{при } \tau < 0 \quad (2.3)$$

где $\omega_1 = (\alpha - \kappa^2/4)^{1/2}$ — круговая частота собственных линейных колебаний консервативной системы.

Между входными воздействиями X_i , стоящими в правых частях системы уравнений (2.2), и реакциями на выходе f_i будут иметь место соотношения типа интегралов Дюамеля

$$f_i = \int_0^{\infty} h(\tau) X_i(t-\tau) d\tau \quad (i=0,1,2) \quad (2.4)$$

С помощью интегрального преобразования (2.4) и первого уравнения в системе (2.2) можно найти выражения для $f_0(t)$, $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Внося эти выражения в равенства (2.4) при $i=1, 2$, нетрудно образовать формальное представление последовательности функций, которая при подстановке в ряд (2.1) будет давать решение уравнения (1.5).

Для описания процесса $f(t)$ необходимо вычислить вероятностное среднее (среднее по ансамблю) и дисперсию σ_f^2 . Вероятностное среднее процесса $f(t)$ имеет вид

$$\langle f \rangle = \langle f_0 \rangle + \beta \langle f_1 \rangle + \beta^2 \langle f_2 \rangle + \dots \quad (2.5)$$

Угловые скобки здесь и в дальнейшем обозначают среднее по множеству реализаций.

Дисперсия обобщенной координаты определяется следующим образом:

$$\sigma_f^2 = \langle f^2 \rangle - (\langle f \rangle)^2 \quad (2.6)$$

$$\langle f^2 \rangle = \langle f_0^2 \rangle + 2\beta \langle f_0 f_1 \rangle + \beta^2 [\langle f_1^2 \rangle + 2\langle f_0 f_2 \rangle] + \dots \quad (2.7)$$

В случае малой нелинейности в первом приближении можно ограничиться только членами нулевого и первого порядка. С учетом (2.4) и (2.5) получим

$$\begin{aligned} \langle f \rangle &= V \int_0^{\infty} h(\tau) \langle R(t-\tau) \rangle d\tau - \\ &- \beta V^3 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\tau) h(\tau_1) h(\tau_2) h(\tau_3) \langle R(t-\tau-\tau_1) R(t-\tau-\tau_2) R(t-\tau-\tau_3) \rangle d\tau d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 - \\ &- 2\mu V^3 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\tau) h(\tau_1) h_1(\tau_2) h_1(\tau_3) \langle R(t-\tau-\tau_1) R(t-\tau-\tau_2) R(t-\tau-\tau_3) \rangle d\tau d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 - \\ &- 2\mu V^3 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\tau) h(\tau_1) h(\tau_2) h_2(\tau_3) \langle R(t-\tau-\tau_1) R(t-\tau-\tau_2) R(t-\tau-\tau_3) \rangle d\tau d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 - \\ &- 2\mu V^3 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\tau) h(\tau_1) h(\tau_2) \langle R(t-\tau-\tau_1) R(t-\tau-\tau_2) R(t-\tau) \rangle d\tau d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Среднее значение $\langle R(t-\tau-\tau_1) R(t-\tau-\tau_2) \rangle$ представляет собой автокорреляционную функцию внешнего воздействия

$$K_R(\tau_2 - \tau_1) = \langle R(t-\tau-\tau_1) R(t-\tau-\tau_2) \rangle \quad (2.9)$$

Для нормального случайного процесса с нулевым средним значением моменты высших порядков могут быть выражены через автокорреляционные функции

$$\begin{aligned} \langle z(t_1) \rangle &= 0, \quad \langle z(t_1)z(t_2) \rangle = K_z(t_1-t_2), \quad \langle z(t_1)z(t_2)z(t_3) \rangle = 0 \\ \langle z(t_1)z(t_2)z(t_3)z(t_4) \rangle &= K_z(t_1-t_2)K_z(t_3-t_4) + K_z(t_1-t_3)K_z(t_2-t_4) + K_z(t_1-t_4)K_z(t_2-t_3) \end{aligned} \quad (2.10)$$

В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} \langle R(t-\tau) \rangle &= \langle R(t-\tau-\tau_1)R(t-\tau-\tau_2)R(t-\tau-\tau_3) \rangle = \\ &= \langle R(t-\tau-\tau_1)R(t-\tau-\tau_2)R(t-\tau) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Принимая во внимание соотношения (2.8) и (2.11), получим $\langle f(t) \rangle = 0$. Для определения среднего квадрата обобщенной координаты в соответствии с (2.7) требуется найти моменты второго порядка от функции f_0 и среднее по ансамблю реализаций от произведения f_0 и f_1 .

Введем в рассмотрение автокорреляционную функцию для случайной величины $f_0(t)$

$$\begin{aligned} K_{f_0}(\tau) &= \langle f_0(t)f_0(t+\tau) \rangle = V^2 \int_0^\infty \int_0^\infty h(\tau_1)h(\tau_2)K_R(\tau+\tau_1-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 = \\ &= \frac{V^2}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |\Phi(j\omega)|^2 S_R(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad \Phi(j\omega) = [-\omega^2 + \kappa j\omega + \alpha]^{-1} \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $\Phi(j\omega)$ — частотная характеристика, $S_R(\omega)$ — спектральная плотность возмущающего воздействия.

Предположим, что спектральная плотность возмущающего воздействия является величиной постоянной

$$S_R(\omega) = k_0 = \text{const} \quad (2.13)$$

Из (2.12) и (2.13) будем иметь

$$K_{f_0}(\tau) = \sigma_{f_0}^2 e^{-\kappa|\tau|/2} \left(\cos \omega_1\tau + \frac{\kappa}{2\omega_1} \sin \omega_1\tau \right), \quad \sigma_{f_0}^2 = V^2 k_0 / \pi \kappa \alpha \quad (2.14)$$

На основе (2.4), (2.7), и (2.14) находим выражение для среднего квадрата обобщенной координаты

$$\begin{aligned} \langle f^2 \rangle &= K_{f_0}(0) - \sigma_{f_0}^2 K_{f_0}(0) \int_0^\infty h(\tau) K_{f_0}(\tau) d\tau - \\ &- 4\mu K_{f_0}^{\cdot}(0) \int_0^\infty h(\tau) K_{f_0}(\tau) d\tau - 8K_{f_0 f_0}^{\cdot\cdot}(0) \int_0^\infty h(\tau) K_{f_0}^{\cdot}(\tau) d\tau - \\ &- 8\mu K_{f_0 f_0}^{\cdot\cdot\cdot}(0) \int_0^\infty h(\tau) K_{f_0}(\tau) d\tau - 4\mu K_{f_0}^{\cdot}(0) \int_0^\infty h(\tau) K_{f_0}^{\cdot\cdot}(\tau) d\tau - \\ &- 8\mu \int_0^\infty h(\tau) K_{f_0}(\tau) d\tau V^2 \int_0^\infty h(\tau) K_R(\tau) d\tau - 4\mu K_{f_0}^2(0) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$K_{f_0}(0) = V^2 \int_0^\infty \int_0^\infty h(\tau_1)h(\tau_2)K_R(\tau_1-\tau_2)d\tau_1d\tau_2$$

$$K_{f_0}^{\cdot}(\tau) = V^2 \int_0^\infty \int_0^\infty h(\tau_1)h(\tau_2)K_R(\tau+\tau_1-\tau_2)d\tau_1d\tau_2$$

$$K_{f_0'}(\tau) = V^2 \int_0^\infty \int_0^\infty h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) K_R(\tau + \tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

$$K_{f_0'}(0) = V^2 \int_0^\infty \int_0^\infty h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) K_R(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

$$K_{f_0 f_0'}(0) = V^2 \int_0^\infty \int_0^\infty h(\tau_1) h_1(\tau_2) K_R(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

$$K_{f_0' f_0}(\tau) = V^2 \int_0^\infty \int_0^\infty h_1(\tau_1) h(\tau_2) K_R(\tau - \tau_2 + \tau_1) d\tau_1 d\tau_2$$

$$K_{f_0 f_0''}(\tau) = V^2 \int_0^\infty \int_0^\infty h(\tau_1) h_2(\tau_2) K_R(\tau - \tau_2 + \tau_1) d\tau_1 d\tau_2$$

$$K_{f_0'' f_0}(\tau) = V^2 \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\tau_2) h(\tau_1) K_R(\tau - \tau_2 + \tau_1) d\tau_1 d\tau_2$$

$$K_R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S_R(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = K_0 \delta(\tau)$$

$$h_1(\tau) = e^{-\kappa\tau/2} (-1/2\kappa \sin \omega_1 \tau + \omega_1 \cos \omega_1 \tau) / \omega_1$$

$$h_2(\tau) = e^{-\kappa\tau/2} [-\kappa \omega_1 \cos \omega_1 \tau + (\kappa^2/4 - \omega_1^2) \sin \omega_1 \tau] / \omega_1$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака.

С помощью импульсных переходных функций $h_1(\tau)$ и $h_2(\tau)$ можно образовать следующие зависимости для скорости и ускорения обобщенной координаты:

$$f_0'(t) = V \int_0^\infty h_1(\tau) R(t-\tau) d\tau, \quad f_0''(t) = V \int_0^\infty h_2(\tau) R(t-\tau) d\tau + VR(t)$$

Вычисляя интегралы, входящие в (2.15), находим

$$K_{f_0}(0) = \sigma_{f_0}^2 = \frac{V^2 k_0}{2\kappa\alpha}, \quad \int_0^\infty h(\tau) K_{f_0}(\tau) d\tau = \frac{\sigma_{f_0}^2}{2\alpha} \quad (2.16)$$

$$K_{f_0'}(0) = \frac{V^2 k_0}{2\kappa}, \quad \int_0^\infty h(\tau) K_R(\tau) d\tau = 0, \quad K_{f_0 f_0'}(0) = 0, \quad K_{f_0 f_0''}(0) = -V^2 k_0 \omega_1 / (2\kappa)$$

$$K_{f_0'' f_0}(\tau) = -\frac{V^2 k_0}{2\omega_1} e^{-\kappa\tau/2} \left(\frac{3}{2} \sin \omega_1 \tau + \frac{\omega_1}{\kappa} \cos \omega_1 \tau \right)$$

$$\int_0^\infty h(\tau) K_{f_0'' f_0}(\tau) d\tau = -\frac{V^2 k_0}{2\kappa\alpha} = -\sigma_{f_0}^2$$

Подстановка полученных значений (2.14) и (2.16) в (2.15) приводит к следующей зависимости:

$$(f^2) = \sigma_f^2 = \sigma_{f_0}^2 - 3\beta \sigma_{f_0}^4 / \alpha + 2\mu \sigma_{f_0}^4 \quad (2.17)$$

Нетрудно заметить, что при выполнении неравенства $\mu > 3\beta/2\alpha$ нелинейная инерционность становится преобладающей над нелинейной упругостью. В этом случае средний квадрат обобщенной координаты σ_f^2 становится больше среднего квадрата обобщенной координаты для соответствующей линейной системы, т. е. $\sigma_f^2 > \sigma_{f_0}^2$.

При $\mu < 3\beta/2\alpha$ преобладает нелинейная упругость. В этом случае $\sigma_f^2 < \sigma_{f_0}^2$, т. е. стандарт величины f , найденный с учетом нелинейных членов, становится меньше стандарта величины f , найденного в предположении, что нелинейными членами в основном дифференциальном уравнении (1.5) можно пренебречь. Следует заметить, что при $M=0$ ($\mu=0$) выражение (2.17) совпадает с соответствующим соотношением, полученным в [4].

3. Перейдем к нахождению статистических характеристик скорости обобщенной координаты. Для этого положим

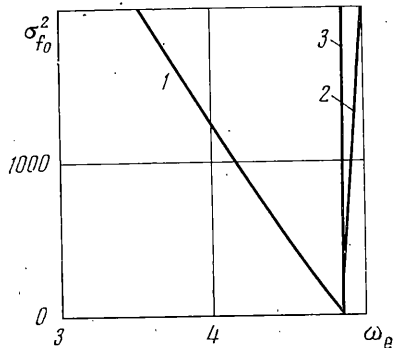
$$f' = f_0' + \beta f_1' + \beta^2 f_2' + \dots \tag{3.1}$$

Пользуясь рядом (3.1) и поступая аналогично изложенному выше, будем иметь

$$\begin{aligned} \langle f'^2 \rangle &= K_{f_0'}(0) - 6\beta K_{f_0'}(0) \int_0^\infty h_1(\tau) K_{f_0 f_0'}(\tau) d\tau - 4\mu K_{f_0'}(0) \int_0^\infty h_1(\tau) K_{f_0 f_0'}(\tau) d\tau - \\ &- 8\mu K_{f_0 f_0'}(0) \int_0^\infty h_1(\tau) K_{f_0'}(\tau) d\tau - 8\mu K_{f_0 f_0'}(0) \int_0^\infty h_1(\tau) K_{f_0 f_0'}(\tau) d\tau - \\ &- 4\mu K_{f_0'}(0) \int_0^\infty h_1(\tau) K_{f_0 f_0'}(\tau) d\tau - \\ &- 8\mu V^2 \int_0^\infty h(\tau) K_R(\tau) d\tau \int_0^\infty h_1(\tau) K_{f_0 f_0'}(\tau) d\tau - 4\mu K_{f_0'}(0) K_{f_0'}(0) \end{aligned} \tag{3.2}$$

На основании зависимостей (2.16) и равенств

$$\begin{aligned} K_{f_0 f_0'}(\tau) &= -\sigma_{f_0}^2 (\alpha/\omega_1) e^{-\kappa\tau/2} \sin \omega_1 \tau \\ K_{f_0'}(\tau) &= \sigma_{f_0}^2 \frac{\alpha}{\omega_1} e^{-\kappa\alpha/2} \left(-\frac{\kappa}{2} \sin \omega_1 \tau + \omega_1 \cos \omega_1 \tau \right) \\ K_{f_0 f_0'}(\tau) &= \frac{V^2 k_0}{2} e^{-\kappa\tau/2} \left[-\cos \omega_1 \tau + \right. \\ &\left. + \left(\frac{3\kappa}{4} + \frac{\omega_1^2}{\kappa} \right) \sin \omega_1 \tau \right] \end{aligned}$$



из (3.2) находим

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= \sigma_{f_0}^2 - 4\mu \sigma_{f_0}^2 \left(-\frac{V^2 k_0}{4\kappa} \right) - 4\mu K_{f_0'}(0) K_{f_0'}(0) = \sigma_{f_0}^2 - 2\mu \sigma_{f_0}^2 \sigma_{f_0}^2 \\ \sigma_{f_0}^2 &= \frac{V^2 k_0}{2\mu\alpha}, \quad \sigma_{f_0}^2 = \frac{\sigma_{f_0}^2}{\alpha} \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой Райса [5], можно определить эффективную частоту при случайно установившихся колебаниях

$$\nu_0^+ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma_f^2}{\sigma_f^2}} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\alpha(1-2\mu\sigma_{f_0}^2)}{1-3\beta\sigma_{f_0}^2/\alpha+2\mu\sigma_{f_0}^2} \right]^{1/2} \tag{3.3}$$

Из выражения (3.3) можно образовать формулу, устанавливающую зависимость эффективной круговой частоты $\omega_e = 2\pi\nu_0^+$ от дисперсии обобщенной координаты.

На фигуре приведены кривые 1, 2, 3 для трех значений параметров (в технической системе единиц): $\mu=0.9 \cdot 10^{-4}$, $\mu=0.08 \cdot 10^{-4}$, $\mu=0.298 \cdot 10^{-4}$. Для остальных параметров были приняты значения: $\alpha=23.56$, $\beta=4.57 \cdot 10^{-4}$.

Поступила 20 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Бологин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956.
2. Гольдблат И. И. Динамическая устойчивость сооружений. М., Стройиздат, 1948.
3. Ивович В. А. Некоторые нелинейные задачи колебания стержней. В сб.: Проблемы прочности в машиностроении, вып. 5. М., Изд-во АН СССР, 1959.
4. Crandall S. H. Perturbation techniques for random vibration of non-linear systems. J. Acoust. Soc. America, 1963, vol. 35, No. 11.
5. Бологин В. В. Статистические методы в строительной механике. М., Госстройиздат, 1961.

УДК 539.376

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ БАЛОК В УСЛОВИЯХ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Я. А. ЛЕЖЛЕП

(Тарту)

Оптимальное проектирование упругих и упругопластических конструкций рассматривалось в ряде работ, среди которых отметим [1-3]. В работе [4] были доказаны некоторые общие теоремы, позволяющие проектировать конструкции минимального веса в условиях ползучести. В последнее время в задачах оптимального проектирования конструкций часто применяются методы математической теории оптимального управления. Популярность их объясняется тем, что они позволяют учитывать ограничения некоторых механических параметров и поэтому приводят к более реальным (по сравнению с классическими методами) проектам. В случае пластических пластин и оболочек методы оптимального управления применялись в работах [2, 3] и др.

Ниже рассматривается оптимальное проектирование балок из материалов, поведение которых является различным при растяжении и сжатии. С помощью принципа максимума Понтрягина определяется толщина балки наименьшего веса. Предполагается, что значение скорости прогиба свободного конца балки задано и толщина ограничена сверху и снизу.

1. Постановка математической задачи. Рассмотрим изгиб прямой консольной балки длины l . Пусть она расположена вдоль оси Ox и нагружена сосредоточенной силой P на ее свободном конце.

Допустим, что балка имеет поперечное сечение вида прямоугольника с постоянной единичной шириной и переменной высотой h . Начало координат поместим в центр тяжести левого конца балки.

Следуя [5, 6], допустим, что поведение материала с различными характеристиками на растяжение и сжатие описывается уравнениями

$$\varepsilon = B(\lambda\sigma)^n \quad (\sigma \geq 0), \quad \varepsilon = -B|\sigma|^n \quad (\sigma < 0) \quad (1.1)$$

где ε — скорость деформации, B , λ и n — постоянные, определяющиеся экспериментально. Из (1.1) с учетом гипотезы Кирхгофа — Лява вытекает

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{w''}{B} (z_1 - z) \right]^{1/n} \quad \left(-\frac{h}{2} \leq z \leq z_1 \right) \\ \sigma = - \left[\frac{w''}{B} (z - z_1) \right]^{1/n} \quad \left(z_1 < z \leq \frac{h}{2} \right) \quad (1.2)$$

Здесь z — вспомогательная координата по толщине балки, z_1 — координата нейтральной линии, w — скорость прогиба. Штрихом обозначено дифференцирование по x .