

К ТЕОРИИ СЛАБОНАГРУЖЕННОГО СФЕРИЧЕСКОГО
ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДВЕСА

К. П. АНДРЕЙЧЕНКО

(Саратов)

Исследуются вопросы радиального центрирования сферического твердого тела во вращающейся сферической камере на тонком поддерживающем слое жидкости, заключенной между сферическими стенками. Получены условия устойчивости и собственные частоты системы сферическое тело — поддерживающий слой.

1. Пусть сферическая камера 1 с центром O_1 и радиусом R_1 (фиг. 1) вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 . Внутри камеры эксцентрично расположена сфера — поплавков 2 с центром O и радиусом R , вращающаяся с постоянной угловой скоростью ω . Оси вращения камеры и сферы — поплавка параллельны. Линия центров OO_1 перпендикулярна этим осям. Внутренняя сфера совершает поступательное перемещение относительно камеры со скоростью V_0 .

Исследуем движение вязкой несжимаемой жидкости в полости между непроницаемыми сферическими стенками и найдем реакцию поддерживающего слоя жидкости.

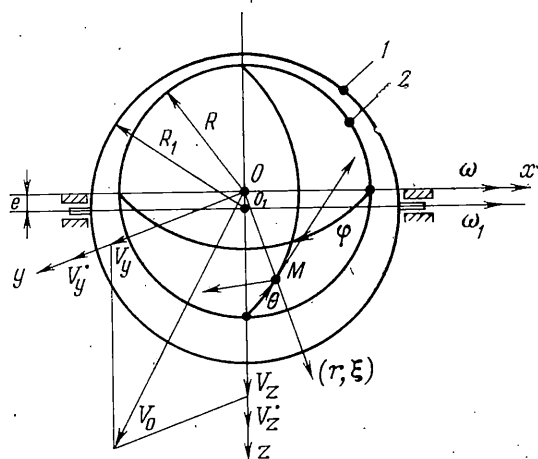
Введем следующие предположения, приемлемые для гироскопов со сферическим гидродинамическим подвесом: радиальный зазор $\varepsilon = R_1 - R$ значительно меньше R ($\varepsilon \ll R$), движение жидкости ламинарное; относительный эксцентриситет $\lambda = e/\varepsilon$ значительно меньше единицы ($\lambda \ll 1$)

Пренебрегая массовыми силами, учитывая преимущественное значение производных от скорости поперек полости (по r) и вводя переменную $\xi = r - R$, запишем упрощенные дифференциальные уравнения движения жидкости в поддерживающем слое и уравнение неразрывности в сферической системе координат r, φ, θ

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_0}{\partial \xi} + \frac{V_0}{R} \frac{\partial V_0}{\partial \theta} + \frac{V_\varphi}{R \sin \theta} \frac{\partial V_0}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta}{R} = -\frac{1}{\rho R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial \xi} + \frac{V_0}{R} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} + \frac{V_\varphi}{R \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_0 V_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{R} =$$

(1.1)



Фиг. 1

$$= -\frac{1}{\rho R \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial \xi} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad (1.2)$$

Граничные условия

$$V_r = V_r^\circ, V_\theta = V_\theta^\circ, V_\varphi = V_\varphi^\circ \text{ при } \xi = 0 \quad (1.3)$$

$$V_r = V_r', V_\theta = V_\theta', V_\varphi = V_\varphi' \text{ при } \xi = h = \varepsilon + e \cos \theta$$

Здесь

$$V_r^\circ = V_z \cos \theta + V_y \sin \theta \sin \varphi, V_\theta^\circ = -V_z \sin \theta + V_y \cos \theta \sin \varphi - \omega R \sin \varphi$$

$$V_\varphi^\circ = V_y \cos \varphi - \omega R \cos \theta \cos \varphi, V_\theta' = -\omega_1 (R+h) \sin \varphi$$

$$V_\varphi' = -\omega_1 (R+h) \cos \theta \cos \varphi, V_r' = -\omega_1 \sin \varphi dh/d\theta = \omega_1 e \sin \theta \sin \varphi$$

Рассмотрим нулевое приближение без учета инерционных членов. Отбрасывая в уравнениях (1.1) и (1.2) левые части и дословно повторяя рассуждения, приведенные в работе [1], получаем выражения для скоростей

$$V_{\theta 0} = \frac{1}{2\mu R} (\xi^2 - h\xi) \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{V_\theta' - V_\theta^\circ}{h} \xi + V_\theta^\circ$$

$$V_{\varphi 0} = \frac{1}{2\mu R \sin \theta} (\xi^2 - h\xi) \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{V_\varphi' - V_\varphi^\circ}{h} \xi + V_\varphi^\circ$$

и выражение для давления

$$p = \theta_0 + (\theta_1 + \theta_2) \sin \varphi, \theta_0 = -6\mu R^2 V_z \varepsilon^{-3} (1 - \cos \theta - {}^3/2 \lambda \sin^2 \theta)$$

$$\theta_1 = 6\mu R^2 V_y \varepsilon^{-3} (\sin \theta - {}^3/4 \lambda \sin 2\theta),$$

$$\theta_2 = -3\mu R^2 (\omega + \omega_1) e \varepsilon^{-3} (\sin \theta - {}^3/4 \lambda \sin 2\theta)$$

Введем в рассмотрение единичные секундные расходы жидкости Q_θ и Q_φ через сечения с единичной площадью $h \cdot 1$ вдоль координат соответственно θ и φ

$$Q_\theta = \int_0^h V_{\theta 0} d\xi = f_1 + f_2 \sin \varphi, \quad Q_\varphi = \int_0^h V_{\varphi 0} d\xi = f_3 \cos \varphi \quad (1.4)$$

$$f_1 = s_1 \sin \theta, f_2 = s_2 (\cos \theta + {}^3/2 \lambda) - s_3 (1 + \lambda \cos \theta)$$

$$f_3 = s_2 (1 + {}^3/2 \lambda \cos \theta) - s_3 (\cos \theta + \lambda \cos^2 \theta)$$

$$s_1 = {}^1/2 R V_z, s_2 = {}^1/4 R (\omega + \omega_1) e - {}^1/2 R V_y, s_3 = {}^1/2 R (\omega + \omega_1) e$$

Перейдем к первому приближению. Определим распределение скоростей и давления с учетом инерционных членов, который будем проводить по осредненным скоростям $V_\theta^* = Q_\theta h^{-1}$, $V_\varphi^* = Q_\varphi h^{-1}$. Вводя обозначения

$$A = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_\theta}{h} \right) + \frac{Q_\theta}{Rh} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{Q_\theta}{h} \right) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{Q_\varphi}{h} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{Q_\theta}{h} \right) - \frac{\text{ctg } \theta}{R} \left(\frac{Q_\varphi}{h} \right)^2$$

$$B = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_\varphi}{h} \right) + \frac{Q_\theta}{Rh} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{Q_\varphi}{h} \right) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{Q_\varphi}{h} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{Q_\varphi}{h} \right) + \frac{\text{ctg } \theta}{R} \frac{Q_\theta Q_\varphi}{h^2}$$

заменяем в левых частях уравнений (1.1) и (1.2) V_θ и V_φ на V_θ^* , V_φ^*

$$A = -\frac{1}{\rho R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \xi^2}, \quad B = -\frac{1}{\rho R \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \xi^2} \quad (1.5)$$

Отметим, что A и B' не зависят от переменной ξ . Интегрируя (1.5) по ξ при граничных условиях (1.3), находим

$$V_{\theta} = \frac{1}{2\mu R} (\xi^2 - h\xi) \left(A\rho R + \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{V_{\theta}' - V_{\theta}^{\circ}}{h} \xi + V_{\theta}^{\circ} \quad (1.6)$$

$$V_{\varphi} = \frac{1}{2\mu R \sin \theta} (\xi^2 - h\xi) \left(B\rho R \sin \theta + \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + \frac{V_{\varphi}' - V_{\varphi}^{\circ}}{h} \xi + V_{\varphi}^{\circ}$$

Интегрируя все слагаемые уравнения неразрывности (1.2) по ξ от 0 до h , запишем

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (h \langle V_{\theta} \rangle \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (h \langle V_{\varphi} \rangle) = V_{r'}^{\circ} R \sin \theta - V_{\theta}'^{\circ} e \sin^2 \theta - V_{r'}^{\circ} R \sin \theta$$

$$\langle V_{\theta} \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h V_{\theta} d\xi, \quad \langle V_{\varphi} \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h V_{\varphi} d\xi \quad (1.7)$$

Вводя (1.6) в (1.7), используя (1.4) и учитывая, что $Rh \ll R^2$, получим основное упрощенное дифференциальное уравнение для отыскания распределения давления в поддерживающем слое жидкости с учетом инерционных членов

$$\begin{aligned} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \sin \theta \right) + h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} = & \left\{ -12\mu R^2 V_z \sin^2 \theta \cos \theta + \right. \\ & \left. + h^3 \rho R b_2 \sin \theta - \rho R \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} [h^3 (a_1 + a_2) \sin \theta] \right\} + \\ + \left[6\mu R^2 (\omega + \omega_1) e \sin^3 \theta - 12\mu R^2 V_y \sin^3 \theta - \rho R \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (h^3 a_2 \sin \theta) + \right. \\ & \left. + h^3 \rho R \sin \theta b_1 \right] \sin \varphi + \left\{ \rho R \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} [h^3 (a_4 - a_3) \sin \theta] - 2h^3 \rho R b_2 \sin \theta \right\} \cos^2 \varphi \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{h} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{f_1 V_z}{h^2} \cos \theta + \frac{f_1}{Rh^2} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + \frac{f_1^2}{Rh^3} e \sin \theta \\ a_2 &= \frac{1}{h} \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{f_1 V_y}{h^2} \sin \theta + \frac{f_2 V_z}{h^2} \cos \theta + \frac{f_1}{Rh^2} \frac{\partial f_2}{\partial \theta} + \frac{f_2}{Rh^2} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + \frac{2f_1 f_2 e}{Rh^3} \sin \theta \\ a_3 &= \frac{f_2 f_3 - f_3^2 \cos \theta}{Rh^2 \sin \theta}, \quad a_4 = \frac{f_2 V_y}{h^2} \sin \theta + \frac{f_2}{Rh^2} \frac{\partial f_2}{\partial \theta} + \frac{f_2^2 e}{Rh^3} \sin \theta \\ b_1 &= \frac{1}{h} \frac{\partial f_3}{\partial t} + \frac{f_1}{Rh^2} \frac{\partial f_3}{\partial \theta} + \frac{f_1 f_3 e \sin \theta}{Rh^3} + \frac{f_1 f_3 \operatorname{ctg} \theta}{Rh^2} + \frac{f_3 V_z}{h^2} \cos \theta \\ b_2 &= \frac{f_3 V_y}{h^2} \sin \theta + \frac{f_2}{Rh^2} \frac{\partial f_3}{\partial \theta} + \frac{f_2 f_3 e \sin \theta}{Rh^3} - \frac{f_3^2}{Rh^2 \sin \theta} + \frac{f_2 f_3}{Rh^2} \operatorname{ctg} \theta \end{aligned} \quad (1.9)$$

Решение уравнения (1.8) будем искать в виде

$$p = p_1 + p_2 \sin \varphi + p_3 \cos^2 \varphi \quad (1.10)$$

где p_1 , p_2 и p_3 — функции переменной θ .

Подставляя (1.10) в (1.8), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(h^3 \frac{dp_1}{d\theta} \sin \theta \right) + 2h^3 p_3 &= -12\mu R^2 V_z \sin^2 \theta \cos \theta - \\ &- \rho R \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} [h^3 (a_1 + a_4) \sin \theta] + h^3 \rho R b_2 \sin \theta \quad (1.11) \\ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(h^3 \frac{dp_2}{d\theta} \sin \theta \right) - h^3 p_2 &= 6\mu R^2 (\omega + \omega_1) e \sin^3 \theta - 12\mu R^2 V_y \sin^3 \theta - \\ &- \rho R \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (h^3 a_2 \sin \theta) + h^3 \rho R b_1 \sin \theta \\ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(h^3 \frac{dp_3}{d\theta} \sin \theta \right) - 4h^3 p_3 &= \rho R \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} [h^3 (a_4 - a_3) \sin \theta] - 2h^3 \rho R b_2 \sin \theta \end{aligned}$$

В силу конечности скорости V_φ из (1.6), в соответствии с принятой формулой решения (1.10) находим граничные условия для уравнений (1.11)

$$p_2 = 0, p_3 = 0 \text{ при } \theta = \pi \text{ и } \theta = 0 \quad (1.12)$$

Определим p_3 . Подставляя в последнее уравнение (1.11) значения a_3 , a_4 и b_2 , используя при этом выражения для f_2 и f_3 и пренебрегая членами, содержащими в качестве сомножителей λ в степени выше первой, после преобразований получаем

$$\begin{aligned} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(h^3 \frac{dp_3}{d\theta} \sin \theta \right) - 4h^3 p_3 &= \\ = 3\rho e [{}^2/_{3s_3} V_y R \lambda - s_2 V_y R + s_3^2 + s_2^2 - {}^7/_{3s_3} s_3 s_2 \lambda] \sin^4 \theta + 12\rho e s_3^2 \lambda \sin^4 \theta \cos \theta \quad (1.13) \end{aligned}$$

Решая (1.13) методом Галеркина, находим

$$\begin{aligned} p_3 &= A_3 \sin \theta + B_3 \sin 2\theta, \quad B_3 = \rho \lambda e^{-2} (0.122 s_3^2 + 0.51 s_2^2) \quad (1.14) \\ A_3 &= -0.453 \rho e^{-2} ({}^2/_{3s_3} V_y R \lambda - s_2 V_y R + s_2^2 + s_3^2 - {}^7/_{3s_3} s_2 s_3 \lambda) \end{aligned}$$

Аналогично из второго уравнения (1.11) имеем

$$\begin{aligned} p_2 &= A_2 \sin \theta + B_2 \sin 2\theta, \quad A_2 = -3\mu R^2 (\omega + \omega_1) e \varepsilon^{-3} + 6\mu R^2 V_y e^{-3} - \rho R s_2^2 \varepsilon^{-4} - \\ &- {}^7/_{12} \rho s_2 s_1 \lambda \varepsilon^{-2} + {}^1/_{3} \rho R s_2 \varepsilon^{-1} \lambda, \quad B_2 = -{}^9/_{4} \mu R^2 (\omega + \omega_1) e \varepsilon^{-3} \lambda + \\ + {}^9/_{2} \mu R^2 V_y e^{-3} \lambda - {}^5/_{4} \rho R s_2^2 s_1 \lambda \varepsilon^{-5} + {}^7/_{12} \rho R s_2 \lambda \varepsilon^{-1} + {}^7/_{12} \rho s_3 s_1 \lambda \varepsilon^{-2} - {}^1/_{4} \rho s_2 s_1 (1 + \lambda) \varepsilon^{-2} \quad (1.15) \end{aligned}$$

Поделив левую и правую части первого уравнения (1.14) на $\sin \theta$, проинтегрируем один раз по θ (c_5 — постоянная интегрирования)

$$\begin{aligned} \partial p_1 / \partial \theta \sin \theta &= -6\mu R^2 V_z h^{-3} \sin^2 \theta - \rho R (a_1 + a_4) \sin \theta + \\ + \frac{1}{h^3} \int h^3 \rho R b_2 d\theta - \frac{1}{h^3} \int \frac{2h^3 p_3}{\sin \theta} d\theta + \frac{c_5}{h^3} \quad (1.16) \end{aligned}$$

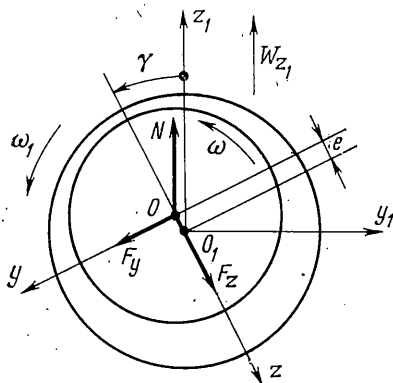
Определим реакцию поддерживающего слоя жидкости. Проекция на оси Oz и Oy главного вектора реакции жидкости на внутреннюю сферу при учете (1.10) принимают вид

$$\begin{aligned} F_y &= -R^2 \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^\pi p \sin^2 \theta d\theta = -\pi R^2 \int_0^\pi p_2 \sin^2 \theta d\theta \quad (1.17) \\ F_z &= -R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi p \sin \theta \cos \theta d\theta = \pi R^2 \int_0^\pi \frac{\partial p_1}{\partial \theta} \sin^2 \theta d\theta - \pi R^2 \int_0^\pi p_3 \sin \theta \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

Подставляя в (1.17) выражения (1.14)–(1.16) и опуская громоздкие выкладки, получаем

$$\begin{aligned}
 F_y &= 4\pi\mu R^4(\omega + \omega_1)e\epsilon^{-3} - 8\pi\mu R^4 V_y \epsilon^{-3} + 4/3\pi R^3 \rho s_2 \epsilon^{-1} + \\
 &\quad 7/9\pi\rho R^2 s_1 s_2 \lambda \epsilon^{-2} - 4/9\pi\rho R^3 s_2 \lambda \lambda^* \epsilon^{-1} \\
 F_z &= -8\pi\mu R^4 V_z \epsilon^{-3} - 4/3\pi R^3 \rho s_1 \epsilon^{-1} + 2/3\pi R^3 \rho s_3 V_y \epsilon^{-2} + \\
 &\quad + 1.537\pi\rho R^2 s_3^2 \lambda \epsilon^{-2} + 1.898\pi\rho R^3 s_3 V_y \lambda \epsilon^{-2} - 2.845\pi\rho R^3 s_2 V_y (1 + 9/4\lambda) - \\
 &\quad - 6.64\pi\rho R^2 s_2 s_3 \lambda \epsilon^{-2} + 2.845\pi\rho R^2 (s_3^2 + s_2^2) \epsilon^{-2} + 2\pi R^2 c_3 \epsilon^{-3}
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$

Заметим, что F_y и F_z должны быть равны нулю, если $e=0$, $V_y=0$, $V_z=0$. Отсюда $c_3 = -1.4225\rho\epsilon s_3^2$. Принимая во внимание малость λ , расписывая



Фиг. 2

значения s_1 , s_2 , s_3 и отбрасывая члены, содержащие V_z^2 , V_y^2 и $V_y V_z$, окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 F_y &= 4\pi\mu R^4(\omega + \omega_1)e\epsilon^{-3} - 8\pi\mu R^4 V_y \epsilon^{-3} - 2/3\pi R^4 V_y \epsilon^{-1} - 1/3\pi\rho R^4(\omega + \omega_1)V_z \epsilon^{-1} \\
 F_z &= -8\pi\mu R^4 V_z \epsilon^{-3} - 2/3\pi\rho R^4 V_z \epsilon^{-1} + 1/3\pi\rho R^4(\omega + \omega_1)V_y(1 + 5.7\lambda)\epsilon^{-1} + \\
 &\quad + 0.3842\pi\rho R^4(\omega + \omega_1)^2 e(1 - 2.16\lambda)\epsilon^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{1.19}$$

Пусть основание совершает переносное движение вертикально вверх вдоль оси $O_1 z_1$ (фиг. 2) с постоянным ускорением W_{z_1} .

К поплавку будет приложена децентрирующая сила

$$N = 4/3\pi R^3(\rho - \rho_c)(W_{z_1} + g)
 \tag{1.20}$$

где ρ_c — усредненная плотность поплавка, g — ускорение свободного падения.

Центр поплавка переместился в равновесное положение O . Собственная угловая скорость поплавка ω зависит от эксцентриситета e . Определим эту зависимость.

К поплавку приложен момент сил вязкого трения

$$\begin{aligned}
 L_x &= -R^3 \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} (\tau_{r\theta} \sin \varphi + \tau_{r\varphi} \cos \theta \cos \varphi) \sin \theta d\varphi \\
 \tau_{r\theta} &= \mu \left[\frac{\partial V_\theta}{\partial \xi} \right]_{\xi=0}, \quad \tau_{r\varphi} = \mu \left[\frac{\partial V_\varphi}{\partial \xi} \right]_{\xi=0}
 \end{aligned}
 \tag{1.21}$$

Так как центр поплавка находится в установившемся равновесном положении, то $\omega = \text{const}$ и, следовательно, $L_x = 0$. Из этого условия и определяется ω . Опуская несложные, но весьма длинные преобразования, запишем конечный результат

$$\omega = \omega_1 (1 - 3/2 \lambda^2) \quad (1.22)$$

Таким образом, положение равновесия центра внутренней сферы O представится в виде

$$e = 0.868 \left(1 - \frac{\rho_c}{\rho}\right) \frac{g + W_{z1}}{R \omega_1^2} \varepsilon \left[1 + \left(\frac{5.2\nu}{\omega_1 \varepsilon^2}\right)^2\right]^{-1/2}, \quad \gamma = \text{arctg} \frac{5.2\nu}{\omega_1 \varepsilon^2} \quad (1.23)$$

2. Далее проведем исследование устойчивости равновесного положения поплавка на поддерживающем слое жидкости. Полагаем, что центр поплавка совершает малые колебания относительно равновесного положения O . Вводя в рассмотрение массу внутренней сферы m_c , запишем уравнения собственных малых движений поплавка

$$(M + m_c) y'' + ky' + ny + fz' + qz = 0 \quad (2.1)$$

$$(M + m_c) z'' + kz' + nz - fy' - qy = 0$$

Здесь $M = 2/3 \pi \rho R^3 \varepsilon^{-1}$, $k = 8\pi \mu R^4 \varepsilon^{-3}$, $f = M \omega_1$, $n = 2.3 M \omega_1^2$, $q = k \omega_1$, $m_c = 2MR^{-1} \varepsilon \rho_c \varepsilon^{-1}$.

Составляя характеристическое уравнение системы (2.1) и исследуя его в соответствии с критерием Гурвица, получаем условие устойчивости равновесного положения внутренней сферы на поддерживающем слое жидкости

$$6.6 \left\{1 + \frac{M^2 \omega_1^2}{k^2} \left[1 + 4.6 \left(1 + \frac{m_c}{M}\right)\right]\right\} > 21.78 \frac{M^2 \omega_1^2}{k^2} \left(1 + \frac{m_c}{M}\right) + 2 \left(1 + \frac{m_c}{M}\right) \left(1 + 5.29 \frac{M^2 \omega_1^2}{k^2}\right)$$

Задаваясь любым отношением $\psi = M \omega_1 k^{-1}$ (т. е. отношением инерционных сил к вязкостным силам), приходим к одному и тому же достаточно простому условию устойчивости

$$\rho_c < 1.15 \rho R \varepsilon^{-1} \quad (2.2)$$

Применительно к гидродинамическому поплавковому гироскопу это условие всегда выполняется и подвес устойчив, что подтверждается на практике.

Определим собственные частоты и коэффициенты затухания системы: поддерживающий слой жидкости — внутренняя сфера. Вводя в рассмотрение комплексную переменную $\eta = y + jz$, коэффициенты затухания $\alpha_{1,2}$ и собственные частоты $\beta_{1,2}$, получаем корни характеристического уравнения системы (2.1) в виде

$$D_{1,2} = -\alpha_{1,2} + j\beta_{1,2} = -\frac{k}{2M_1} + j \frac{f}{2M_1} \pm \frac{1}{2M_1} \left[(k^2 - f^2 - 4M_1 n) + j(4M_1 q - 2kf) \right]^{1/2}, \quad M_1 = m_c + M = M(1 + 2\varepsilon \delta^{-1} \rho_c \varepsilon^{-1}) \quad (2.3)$$

Несмотря на то, что учет инерционных членов в сферическом поддерживающем слое жидкости производился по первому приближению, рассмот-

рим, хотя бы формально, подвес со слабовязкой жидкостью ($M\omega_1 \gg k$) и легкой внутренней сферой ($\rho_c \leq \rho$). Так как $\varepsilon/R \ll 1$, из (2.3) имеем

$$\alpha_1 = 0.3434kM^{-1}, \beta_1 = 2.097\omega_1, \alpha_2 = 0.6566kM^{-1}, \beta_2 = 1.097\omega_1 \quad (2.4)$$

Рассмотрим подвес с горизонтальной неподвижной осью вращения. Согласно (1.19) при $\lambda \ll 1$ и $\varepsilon \ll R$ имеем: $F_y = 8\pi\mu R^4 \omega_1 \varepsilon \varepsilon^{-3}$, $F_z = \kappa \pi \rho R^4 \omega_1^2 \varepsilon \varepsilon^{-4}$, $\kappa = 1.537$.

Учитывая силу веса, имеем

$$\lambda = \left(1 - \frac{\rho_c}{\rho}\right) g \frac{4}{3\kappa\omega_1^2 R} \left(1 + \frac{64\nu^2}{\delta^4 \omega_1^2 \kappa^2}\right)^{-1/2}$$

Поплавок должен при этом проскальзывать относительно камеры со скоростью $\Delta\omega = \frac{3}{2}\lambda^2\omega_1$. Отсюда находим

$$\kappa = \left[\frac{8(1 - \rho_c \rho^{-1})^2 g^2}{3\omega_1^3 R^2 \Delta\omega} - \frac{192\nu^2}{3\varepsilon^4 \omega_1^2} \right]^{1/2} \quad (2.5)$$

Величина коэффициента κ может быть определена по выражению (2.5) через полученные в эксперименте $\Delta\omega$.

3. Для проведения экспериментальных исследований были изготовлены физические модели сферического гидродинамического подвеса с легкими поплавками и горизонтальной осью вращения. При помощи строботаксметра с импульсной лампой регистрировалась скорость проскальзывания $\Delta\omega$ поплавок относительно камеры в поле сил притяжения к Земле при различных установившихся значениях скорости вращения камеры, т. е. при различных отношениях $\psi = M\omega_1 k^{-1} = \frac{1}{12}\varepsilon^2 \omega_1 \nu^{-1}$. По формуле (2.5) подсчитывались соответствующие экспериментальные значения искомого коэффициента κ . Результаты даны ниже.

ψ	0.37	0.422	0.475	0.528	0.792	1.06	1.32	10.4	11.63	13.03	14.35
κ	1.414	1.315	1.308	1.16	1.153	1	1.04	1.015	1.061	1.062	1.037

Напомним, что теоретическое значение коэффициента κ равно 1.537. Как видно, результаты теории и эксперимента лучше всего согласуются в случае сильновязкой жидкости ($\psi = 0.37$). По мере увеличения ψ коэффициент κ несколько уменьшается и остается приблизительно равным единице как при средневязкой жидкости ($\psi = 1$), так и при слабовязкой жидкости ($\psi \gg 1$).

Важно отметить, что при сильновязкой жидкости центр поплавок должен смещаться согласно (1.23) в направлении, перпендикулярном действию децентрирующей силы. В случае слабовязкой жидкости центр поплавок должен перемещаться в направлении децентрирующей силы. Этот теоретический вывод подтвердили экспериментальные наблюдения.

Далее физическая модель подвеса с маловязкой жидкостью была установлена на основании, совершающем малые вертикальные синусоидальные установившиеся колебания. Скорость вращения камеры плавно изменялась. Регистрировались те значения критических скоростей камеры, при которых поплавок совершал наибольшие колебания относительно камеры. Разница между значениями критических скоростей, рассчитанными по формулам (2.4) и полученными экспериментально, не выходила при различных частотах за пределы восьми процентов.

Приведенная теория гидродинамического подвеса может быть приложена к слабонагруженному ($\lambda \ll 1$) сферическому подшипнику скольжения. Для обеспечения условия ламинарности течения жидкости полагаем жидкость сильновязкой. Несложно убедиться, что в случае традиционного под-

шипника скольжения ($\omega_1=0$) и в случае обращенного [2] подшипника скольжения ($\omega=0$) условие устойчивости будет иметь вид неравенства (2.2). Для обращенного подшипника под ρ_c следует понимать усредненную плотность внешнего ротора $\rho_c=3m_p/4\pi R^3$, где m_p — масса ротора.

В слабоагруженном цилиндрическом подшипнике скольжения при $\lambda \ll 1$ для обеспечения условия устойчивости нужно [3], чтобы усредненная плотность вала была меньше плотности жидкости. Сферический же подшипник скольжения согласно условию (2.2) будет устойчив, даже если ρ_c намного больше плотности жидкости.

Таким образом, для обеспечения условия устойчивости (2.2) применительно к слабоагруженным сферическим подшипникам скольжения следует уменьшать радиальный зазор ε , увеличивать радиус внутренней сферы R и уменьшать усредненную плотность ρ_c , т. е. облегчать ротор. Практика создания гироскопов с жесткими чувствительными элементами на сферических газовых подшипниках качественно подтверждает данные выводы.

Поступила 14 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
2. Веннерхолм Р. Гироскоп со свободным ротором. Вопросы ракетной техники, 1967, № 7.
3. Андрейченко К. П., Андрейченко О. Г. Об устойчивости цилиндрического гидродинамического подвеса применительно к интегрирующим акселерометрам. Изв. вузов. Приборостроение, 1974, т. 17, № 12.