

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ
И МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ,
ЗАПОЛНЕННЫХ ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТЬЮ

В. А. СВЕТЛИЦКИЙ

(Москва)

Дается вывод нелинейных уравнений движения нерастяжимых пространственных криволинейных стержней (трубопроводов), заполненных идеальной несжимаемой жидкостью. Рассматривается наиболее общий случай, когда стержень имеет переменное по длине сечение (поток жидкости тоже имеет переменное сечение). Частный случай, когда сечения стержня и потока постоянны, рассмотрен в [1]. Поток жидкости считается одномерным с общей (средней по сечению) скоростью. Из общих уравнений движения получены уравнения малых колебаний стержня с учетом начального (статического) напряженного состояния. Как частный случай, из уравнений малых колебаний получены уравнения, позволяющие исследовать статическую устойчивость трубопроводов. Частоты колебаний и статическая устойчивость трубопроводов при стационарном потоке жидкости существенно зависят от начального напряженного состояния, что не учитывается в работах, посвященных малым колебаниям и статической устойчивости криволинейных трубопроводов [2-7].

В одной из последних работ [8], посвященных колебаниям трубопроводов, статическое напряженное состояние частично учитывается, однако для общего случая криволинейного стержня этого недостаточно. Одна из особенностей малых колебаний стержня с движущейся жидкостью заключается в том, что в зависимости от крайних условий и параметров потока малые колебания могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми, что следует учитывать при выборе метода решения.

1. Рассматривая отдельно элемент стержня и элемент жидкости, совпадающий в данный момент с элементом стержня, можно получить следующие два уравнения движения:

$$m_1(s) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{Q}'}{\partial s} + \mathbf{q} + \mathbf{f} + \boldsymbol{\gamma}_1, \quad m_1(s) = F_1(s) \beta_1 \quad (1.1)$$

$$m_2(s) \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} w + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s} w \right) = - \frac{\partial (p F_2 \mathbf{e}_1)}{\partial s} - \mathbf{f} + \boldsymbol{\gamma}_2$$

$$m_2(s) = F_2(s) \beta_2 \quad (1.2)$$

Здесь $m_1(s)$ — масса единицы длины стержня; β_1 — плотность материала стержня; $m_2(s)$ — масса жидкости, приходящаяся на единицу длины стержня; β_2 — плотность жидкости; $F_1(s)$, $F_2(s)$ — площадь сечения стержня и площадь отверстия в стержне; \mathbf{v} — вектор абсолютной скорости центра тяжести элемента стержня; $\mathbf{w} = w \mathbf{e}_1$ — вектор относительной скорости жидкости; \mathbf{Q}' — вектор внутренних сил в стержне; \mathbf{q} — вектор внешних распределенных сил, приложенных к стержню; $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\boldsymbol{\gamma}_2$ — векторы распределенных сил, вызванные силовыми полями; p — давление в жидкости; \mathbf{e}_1 — единичный вектор, направленный по касательной к осевой линии стержня; \mathbf{f} — вектор сил взаимодействия между стержнем и жидкостью

Для стержня с переменной по координате s площадью отверстия вектор \mathbf{f} равен

$$\mathbf{f} = -p \frac{\partial F_2}{\partial s} \mathbf{e}_1 + f_2' \mathbf{e}_2 + f_3' \mathbf{e}_3$$

где $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — единичные векторы, направленные по главным осям сечения стержня (\mathbf{e}_{i0} — единичные векторы, определяющие положение связанного трехгранника осей при равновесии стержня).

Если $F_2 = \text{const}$, то для идеальной жидкости вектор \mathbf{f} всегда ортогонален вектору \mathbf{e}_1 (это не учтено в [5]). Движение жидкости может быть как стационарным (в этом случае скорость w зависит только от s), так и нестационарным (w зависит от s и t), причем в любом из этих случаев для несжимаемой жидкости справедливо условие $F_{20} w_-(0, t) = F_2 w(s, t)$.

Скорость жидкости на входе известна, если известен массовый расход на входе, поэтому и в любом сечении стержня скорость жидкости равна $w(s, t) = F_{20} w_-(0, t) / F_2(s)$. Скорость $w(s, t)$ не зависит от движения стержня (это справедливо только для несжимаемой жидкости). Давление в жидкости (в отличие от скорости) неизвестно, так как зависит от возникающих при движении стержня сил инерции $m_2(\partial v / \partial t + w \partial v / \partial s)$, действующих на жидкость.

Если при решении конкретных задач не требуется определять силы взаимодействия, то, исключив \mathbf{f} из (1.1) и (1.2), получим

$$(m_1 + m_2) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + m_2 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} w + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial s} + \mathbf{q} + \boldsymbol{\gamma} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}' - (p F_2 + m_2 w^2) \mathbf{e}_1, \quad \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2$$

Пренебрегая инерцией вращения жидкости и стержня, будем иметь $\partial \mathbf{M} / \partial s = \mathbf{Q}' \times \mathbf{e}_1 + \boldsymbol{\mu} = \mathbf{Q} \times \mathbf{e}_1 + \boldsymbol{\mu}$ (1.4) где \mathbf{M} — внутренний момент в стержне, $\boldsymbol{\mu}$ — распределенный момент, приложенный к стержню. Рассматривая движение стержня относительно состояния равновесия, получим

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + A(s) (\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_0) \quad (\mathbf{M}_0 = M_{i0} \mathbf{e}_i, \boldsymbol{\kappa}_0 = \kappa_{i0} \mathbf{e}_i) \quad (1.5)$$

$$A(s) = \begin{vmatrix} A_{11}(s) & 0 & 0 \\ 0 & A_{22}(s) & 0 \\ 0 & 0 & A_{33}(s) \end{vmatrix}$$

Здесь M_{i0} и κ_{i0} — компоненты соответствующих векторов при равновесии стержня, $A(s)$ — матрица жесткостей ($A_{11}(s)$ — жесткость стержня при кручении, $A_{22}(s)$ и $A_{33}(s)$ — жесткости стержня при изгибе).

Компоненты векторов $\boldsymbol{\kappa}$ и $\boldsymbol{\kappa}_0$ можно выразить или через углы, определяющие положение связанного трехгранника в пространстве, или через кривизну $1/\rho_1$, кручение $1/\rho_2$ и угол ϕ_1 , характеризующий отклонение главных осей поперечного сечения от естественных. В этом последнем случае вектор $\boldsymbol{\kappa}$ равен

$$\boldsymbol{\kappa} = \kappa_i \mathbf{e}_i = \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{\partial \phi_1}{\partial s} \right) \mathbf{e}_1 + \frac{\sin \phi_1}{\rho_1} \mathbf{e}_2 + \frac{\cos \phi_1}{\rho_1} \mathbf{e}_3 \quad (1.6)$$

Анализируя движение стержня, можно получить еще два кинематических уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1 = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial s} - \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial t} - \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (1.7)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости элемента стержня.

При исследовании движения стержня с определением перемещений точек осевой линии полученные уравнения следует дополнить уравнением $\partial \mathbf{u} / \partial t = \mathbf{v}$, где \mathbf{u} — вектор перемещения центра тяжести сечения. Рассматривая перемещения стержня в произвольный момент времени, можно составить еще одно уравнение

$$\partial \mathbf{u} / \partial s = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_{10} \quad (1.8)$$

где \mathbf{e}_{10} — единичный вектор, направленный по касательной к осевой линии стержня в статике.

Первое уравнение в (1.7) и уравнение (1.8) связаны между собой, но при решении прикладных задач бывает удобнее использовать или (1.7) или (1.8). Перейдем в уравнениях (1.1) — (1.8) к безразмерным величинам

$$\begin{aligned} s &= l\varepsilon, \quad t = \tau/p_0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^\circ l p_0, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ l, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^\circ A_{33}(0)/l^2 \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}^\circ A_{33}(0)/l, \quad F_1(s) = F_{10}f_1(\varepsilon), \quad F_2(s) = F_{20}f_2(\varepsilon), \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}^\circ l p_0 \\ \boldsymbol{\mu} &= \boldsymbol{\mu}^\circ A_{33}(0)/l^2, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^\circ p_0, \quad \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}_0/l, \quad \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^\circ A_{33}(0)/l^3 \\ \mathbf{q} &= \mathbf{q}^\circ A_{33}(0)/l^3, \quad p_0 = [A_{33}(0)/(m_{10} + m_{20})l^4]^{1/2}, \quad P = pF_{20}l^2/A_{33}(0) \end{aligned}$$

где $A_{33}(0)$, m_{10} , m_{20} , F_{10} , F_{20} — значения соответствующих величин в фиксированном сечении, например в начале координат. После преобразований уравнения (1.3), (1.4), (1.7), (1.8) принимают вид (опущен градус над безразмерными величинами и при этом сделан переход к локальным производным $\partial'/\partial\tau$, $\partial'/\partial\varepsilon$)

$$\begin{aligned} n_2(\varepsilon) \left(\frac{\partial' \mathbf{v}}{\partial \tau} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \right) + 2n_1 w_- \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1 + n_1 \frac{\partial(w_- \mathbf{e}_1)}{\partial \tau} - \frac{\partial' \mathbf{Q}}{\partial \varepsilon} - \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{Q} = \mathbf{q} + \boldsymbol{\gamma} \\ n_1 = \frac{m_{20}}{m_{10} + m_{20}} \\ \frac{\partial'}{\partial \varepsilon} [A(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_0)] + \boldsymbol{\kappa} \times A(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_0) + \frac{\partial \mathbf{M}_0}{\partial \varepsilon} + \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{M}_0 - \mathbf{Q} \times \mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\mu} \\ n_2 = \frac{m_{10} f_1(\varepsilon) + m_{20} f_2(\varepsilon)}{m_{10} + m_{20}} \\ \frac{\partial' \mathbf{u}}{\partial \tau} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} - \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial' \mathbf{u}}{\partial \varepsilon} + \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_{10} \\ \frac{\partial' \mathbf{v}}{\partial \varepsilon} + \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1 = 0, \quad \frac{\partial' \boldsymbol{\omega}}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial' \boldsymbol{\kappa}}{\partial \tau} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\kappa} = 0 \\ \mathbf{Q} = \mathbf{Q}' - [P f_2(\varepsilon) + w_-^2 n_1 / f_2(\varepsilon)] \mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (1.9)$$

где A — матрица жесткостей с безразмерными элементами $A_{ii}(\varepsilon)/A_{33}(0)$.

Система уравнений (1.9) не является полной, так как чтобы получить уравнения в проекциях на связанные оси, необходимо иметь проекции вектора \mathbf{e}_{10} в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$, для чего необходимо ввести три независимых угла ψ , φ , θ , характеризующие поворот связанного трехгранника осей относительно его положения при статике стержня. Векторы двух базисов $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{e}_{i0}\}$ связаны соотношениями

$$\mathbf{e}_i = k_{ij} \mathbf{e}_{j0}, \quad \mathbf{e}_{i0} = k_{ji} \mathbf{e}_i \quad (1.10)$$

при этом k_{ij} — элементы матрицы K .

В качестве матрицы $K(\psi, \varphi, \theta)$ может быть взята матрица, равная $K(\psi, \varphi, \theta) = K_1(\psi) K_2(\varphi) K_3(\theta)$, где K_i — матрицы последовательных незави-

симых поворотов трехгранника $\{e_{i0}\}$ последовательно на углы ψ , φ и θ (ψ — угол поворота относительно оси, определяемой вектором e_{20} ; φ — угол поворота относительно оси, совпадающей с новым направлением вектора e_{30} ; θ — угол поворота относительно вектора e_1). Матрица $K(\psi, \varphi, \theta)$ равна

$$K(\psi, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \psi \cos \varphi & \cos \psi \sin \varphi \cos \theta + \cos \psi \sin \varphi \sin \theta - \\ & + \sin \psi \sin \theta & - \sin \psi \cos \theta \\ - \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi & \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \varphi & \sin \psi \sin \varphi \cos \theta - \sin \psi \sin \varphi \sin \theta + \\ & - \cos \psi \sin \theta & + \cos \psi \cos \theta \end{vmatrix} \quad (1.11)$$

Используя соотношения (1.10), представим уравнения (1.9) в скалярной форме (штрих в локальной производной опущен)

$$n_2(\varepsilon) \left(\frac{\partial v_k}{\partial \tau} + \varepsilon_{kij} \omega_i v_j \right) + 2n_1 w - \varepsilon_{k1i} \omega_i + n_1 \varepsilon_{k23} \frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{\partial Q_k}{\partial \varepsilon} - \varepsilon_{kij} \kappa_i Q_j = q_k + \gamma_k \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [A_{k\gamma} (\kappa_\gamma - \kappa_{\gamma 0})] + \varepsilon_{kij} \kappa_i A_{j\gamma} (\kappa_\gamma - \kappa_{\gamma 0}) + \\ & + \frac{\partial M_{k0}}{\partial \varepsilon} + \varepsilon_{kij} \kappa_i M_{j0} - \varepsilon_{k1i} Q_i = \mu_k \\ \frac{\partial u_k}{\partial \tau} + \varepsilon_{kij} \omega_i u_j - v_k &= 0, \quad \frac{\partial u_k}{\partial \varepsilon} + \varepsilon_{kij} \kappa_i u_j = \delta_{k1} - k_{k1} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial \varepsilon} + \varepsilon_{kij} \kappa_i v_j - \varepsilon_{k1i} \omega_i = 0 \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial \tau} - \frac{\partial \kappa_k}{\partial \tau} - \varepsilon_{kij} \omega_i \kappa_j = 0 \quad (1.14)$$

$$Q_k = Q_k' - (Pf_2 + w^2 n_1 / f_2) \varepsilon_{k23} \quad (1.15)$$

где δ_{k1} — символ Кронекера, ε_{kij} — символы Леви — Чивита.

Найдем выражения для проекций κ_i и ω_i , выраженные через углы ψ , φ , θ . Дифференцируя по ε e_i и e_{i0} , будем иметь

$$\frac{\partial e_i}{\partial \varepsilon} = \kappa \times e_i = \varepsilon_{kij} \kappa_j e_k, \quad \frac{\partial e_{i0}}{\partial \varepsilon} = \varepsilon_{mnj} \kappa_{n0} e_{m0}$$

Используя первое соотношение в (1.10), после преобразований можно получить следующие выражения для проекций κ_i :

$$\varepsilon_{kij} \kappa_j = \left(\frac{\partial k_{im}}{\partial \varepsilon} + \varepsilon_{mnj} \kappa_{n0} k_{ij} \right) k_{km} \quad (1.16)$$

Для матрицы (1.11) имеем

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \left(\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} + \kappa_{10} \right) \cos \psi \cos \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \sin \psi + (\sin \psi \sin \theta + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta) \kappa_{20} + \\ & + (\cos \psi \sin \varphi \sin \theta - \sin \psi \cos \theta) \kappa_{30} \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\kappa_2 = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} + \kappa_{10} \right) \sin \varphi + \cos \varphi \cos \theta \kappa_{20} + \cos \varphi \sin \theta \kappa_{30}$$

$$\kappa_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \cos \psi + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \varepsilon} + \kappa_{10} \right) \sin \psi \cos \varphi + (\sin \psi \sin \varphi \cos \vartheta - \cos \psi \sin \vartheta) \kappa_{20} + \\ + (\cos \psi \cos \vartheta + \sin \psi \sin \varphi \sin \vartheta) \kappa_{30}$$

Соотношения (1.17) дают возможность представить компоненты вектора κ (κ_i) через введенные углы и начальные значения κ_{i0} . Угол ϑ в выражениях (1.17) характеризует поворот сечения относительно касательной, в отличие от угла φ_1 , который характеризует отклонение главных осей от естественных, поэтому компоненты вектора κ в выражении (1.6) представляют собой вторую возможную форму записи для κ_i . В (1.6) эти компоненты выражены через угол φ_1 , кривизну и кручение осевой линии стержня. Компоненты ω_j вектора ω связаны с элементами матрицы $K(\psi, \varphi, \vartheta)$ соотношениями

$$\varepsilon_{kji} \omega_j = \frac{\partial k_{im}}{\partial \tau} k_{km} \quad (1.18)$$

Для (1.14) имеем

$$\omega_1 = \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \cos \psi \cos \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \sin \psi, \quad \omega_2 = \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \sin \varphi \\ \omega_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \cos \psi + \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \sin \psi \cos \varphi$$

При переходе к углам ψ, φ, ϑ уравнение (1.14) превращается в тождество и для определения 18 неизвестных $Q_k, \omega_k, \kappa_k, v_k$ ($k=1, 2, 3$) и ψ, φ, ϑ будем иметь 18 нелинейных уравнений (1.12) или (1.14), (1.16) и (1.18). Уравнение (1.14) приведено потому, что при исследовании малых колебаний очень часто можно не переходить к углам ψ, φ, ϑ и тогда (1.14) является самостоятельным уравнением [1].

Для решения системы (1.12), (1.16), (1.18) необходимо иметь 18 краевых условий, которые, например для консольного криволинейного стержня, зависят от компонент Q'_k вектора Q' (а не Q). Для определения Q'_k при известных Q_k , как следует из выражения (1.15), необходимо знать давление (безразмерную величину P). Поэтому рассмотрим проекцию уравнения (1.2) на направление касательной. Переходя к локальным производным и безразмерным величинам, будем иметь

$$n_1 f_2 \left[\frac{\partial v_1}{\partial \tau} + (v_3 \omega_2 - v_2 \omega_3) \right] + n_1 \frac{\partial w_-}{\partial \tau} = P \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial (P f_2 + w_-^2 n_1 / f_2)}{\partial \varepsilon} + \gamma_{21} \quad (1.19)$$

Из уравнения (1.19) находим безразмерную силу P , зависящую от давления

$$P = \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{f_2} \left\{ \gamma_{21} - n_1 f_2 \left[\frac{\partial v_1}{\partial \tau} + (v_3 \omega_2 - v_2 \omega_3) \right] - n_1 \frac{\partial w_-}{\partial \tau} - n_1 w_-^2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{1}{f} \right) \right\} d\varepsilon + P_{00}$$

Безразмерная сила P_{00} находится из краевых условий для потока жидкости. Уравнения (1.12) — (1.14), (1.16), (1.18) дают возможность исследовать нелинейные параметрические колебания стержней заполненных неустановившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости.

2. Рассмотрим малые колебания и статическую устойчивость стержней, заполненных потоком жидкости. Движущаяся внутри криволинейного стержня жидкость нагружает стержень, создавая в стержне начальное напряженное состояние.

Уравнения малых колебаний с учетом начального напряженного состояния для частного случая $F_1 = \text{const}$, $F_2 = \text{const}$ были получены в [1]. Без учета начального напряженного состояния решить задачу о малых колебаниях и о статической устойчивости стержня нельзя. В этом заключается основная ошибка решений [2-7].

Ограничимся случаем, когда поток жидкости, нагружающий стержень, практически не изменяет пространственную форму стержня. Начальное напряженное состояние (статическое) считается известным, т. е. известны компоненты векторов Q_{i0} , M_{i0} , κ_{i0} и других, характеризующие статическое состояние стержня. Считая колебания малыми, положим $Q = Q_0 + \Delta Q$, $M = M_0 + \Delta M$, $\kappa = \kappa_0 + \Delta \kappa$, ..., где ΔQ , ΔM , $\Delta \kappa$, ... — малые динамические составляющие соответствующих векторов; векторы Q_0 , M_0 , κ_0 , ... имеют компоненты в базисе $\{e_i\}$, равные статическим значениям. Возможны два случая влияния потока жидкости на колебания стержня.

В первом случае поток жидкости при колебаниях стержня остается стационарным по скорости (возможно только для несжимаемой жидкости). В этом случае изменение давления в жидкости ΔP , вызванное силами инерции при малых колебаниях стержня, можно считать малым.

Во втором случае практический интерес представляет задача определения частот стержня с учетом влияния параметров стационарного потока и задача о влиянии параметров потока на критические значения внешних сил. Вторым возможным случаем связан с колебаниями, вызванными нестационарным потоком, например пульсирующим потоком (т. е. имеют место параметрические колебания). При пульсирующем потоке имеем

$$P(\varepsilon, \tau) = P_0(\varepsilon) + P_1(\varepsilon, \tau) + \Delta P(\varepsilon, \tau), \quad w(\varepsilon, \tau) = w_0(\varepsilon) + w(\varepsilon, \tau)$$

где P_0 , w_0 — параметры стационарного потока; P_1 , w_1 — параметры нестационарной составляющей потока (известные величины); ΔP — сила давления, обусловленная силами инерции при колебаниях стержня, поэтому

$$Q = Q_0 + Q_1 + \Delta Q, \quad Q_0 = Q_0' - (P_0 f_2 + w_0^{-2} n_1 / f_2) e_1$$

$$Q_1 = -[P_1 f_2 + (2w_0 w_1 + w_1^{-2}) n_1 / f_2] e_1, \quad \Delta Q = \Delta Q' - \Delta P f_2 e_1,$$

В состоянии равновесия v , u и ω равны нулю, поэтому при колебаниях $v_i \omega_j = u_i \omega_j \approx 0$. Из уравнений (1.12) — (1.14), (1.16), (1.18) можно получить следующие уравнения малых колебаний стержня, заполненного потоком идеальной несжимаемой жидкости:

$$n_2(\varepsilon) \frac{\partial v_k}{\partial \varepsilon} + 2n_1(w_0 + w_1) \varepsilon_{k11} \omega_i + n_1 \varepsilon_{k23} \frac{\partial w_{1-}}{\partial \tau} - \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial Q_{11}}{\partial \varepsilon} \varepsilon_{k23} - \varepsilon_{k11} \Delta \kappa_i Q_{11} - \varepsilon_{k1j} \Delta \kappa_i Q_{j0} - \varepsilon_{kij} \kappa_{i0} \Delta Q_j - \varepsilon_{k1i} \kappa_{i0} Q_{11} = \Delta q_k + \Delta \gamma_k \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} [A_{k\gamma} \Delta \kappa_\gamma] + \varepsilon_{kij} \kappa_{i0} A_{j\gamma} \Delta \kappa_\gamma + \varepsilon_{kij} M_{j0} \Delta \kappa_i - \varepsilon_{k11} \Delta Q_k = \Delta \mu_k \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial \tau} - v_k = 0, \quad \frac{\partial u_k}{\partial \varepsilon} + \varepsilon_{kij} \kappa_{i0} u_j = \delta_{k1} - k_{k1} \quad (2.3)$$

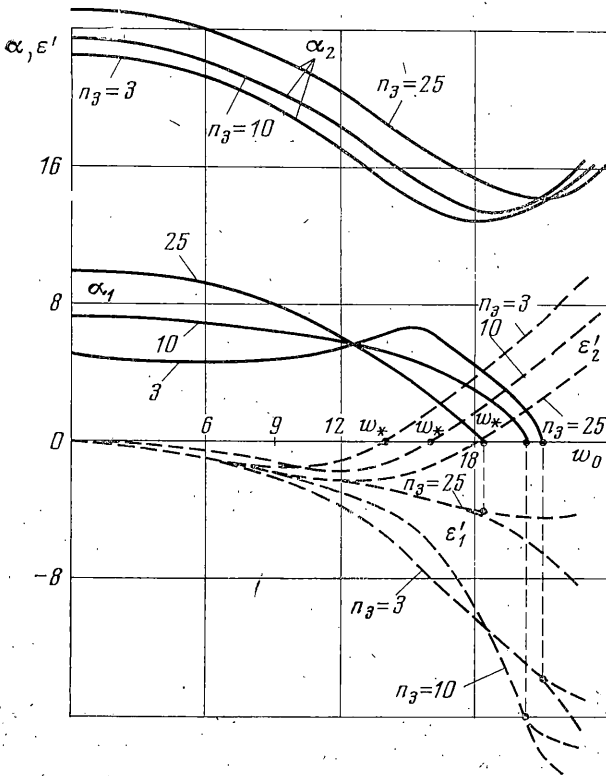
$$\frac{\partial v_k}{\partial \varepsilon} + \varepsilon_{kij} \kappa_{i0} v_j - \varepsilon_{k11} \omega_i = 0, \quad \frac{\partial \omega_k}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \Delta \kappa_k}{\partial \tau} - \varepsilon_{kij} \omega_i \kappa_{j0} = 0$$

$$\varepsilon_{kji} \Delta \kappa_j = \left(\frac{\partial k_{im}}{\partial \varepsilon} + \varepsilon_{mnj} \kappa_{n0} k_{ij} \right) k_{km} - \varepsilon_{kji} \kappa_{j0}, \quad \varepsilon_{kij} \omega_j = \frac{\partial k_{im}}{\partial \tau} k_{km}$$

При малых колебаниях углы ψ , φ и θ являются малыми и поэтому матрица (1.11) принимает следующий вид:

$$K(\psi, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} 1 & \varphi & -\psi \\ -\varphi & 1 & \theta \\ \psi & -\theta & 1 \end{vmatrix}$$

Из уравнения (2.1) следует, что при пульсирующем потоке жидкости для криволинейных стержней параметрические колебания всегда являются вынужденными (из-за слагаемых $\epsilon_{k23} \partial Q_{11} / \partial \epsilon$ и $\epsilon_{k11} \kappa_{10} Q_{11}$). Если в (2.1) положить $w_{1-} = Q_{11} = 0$, то получим уравнения малых колебаний стержня при стационарном (по скорости) потоке. Уравнения (2.1) и (2.2) зависят



от начального напряженного состояния (Q_{k0}, M_{k0}) , поэтому, прежде чем перейти к определению частот колебаний, необходимо найти значения Q_{k0} и M_{k0}

$$Q_{k0} = Q_{k0}' - (P_0 f_2 + w_0^{-2} n_1 / f_2) \epsilon_{k23}$$

которые в свою очередь зависят от закрепления стержня. Например, для шарнирно-закрепленного кругового стержня (при $f_1 = f_2 = 1$)

$$Q_{10}' = P_0 + n_1 w_0^{-2}, \quad Q_{20}' = Q_{30}' = 0, \quad M_{k0} = 0 \quad (k=1, 2, 3)$$

поэтому $Q_{k0} = 0$ и уравнения свободных колебаний не зависят от давления (P_0) и от величины $n_1 w_0^{-2}$, т. е. частоты колебаний стержня в этом частном случае зависят от скорости потока только через силы Кориолиса.

Таким образом, чтобы получить правильные значения частот и критических значений параметров потока жидкости, необходимо учитывать начальное напряженное состояние (это обстоятельство не принималось во внимание в [6, 7]).

В качестве примера рассмотрим свободные колебания прямолинейного трубопровода с одной упругой опорой, считая $f_1 = f_2 = 1$, $w_0 = \text{const}$ и $P = 0$. Уравнение колебаний стержня имеет вид

$$\frac{\partial^4 u_2}{\partial \epsilon^4} + 2n_1 w_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \epsilon \partial \tau} + n_1 w_0^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \epsilon^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} = 0 \quad (2.4)$$

Решение уравнения (2.4) будем искать в форме

$$u_2 = [u_{21}(\varepsilon) + iu_{22}(\varepsilon)] \exp(\varepsilon' + i\alpha)\tau$$

После подстановки u_2 в (2.4) и разделения действительной и мнимой частей получим два уравнения (относительно $u_{21}(\varepsilon)$ и $u_{22}(\varepsilon)$), зависящие от ε' и α . Решая уравнения (численно) и требуя, чтобы выполнялись краевые условия (с учетом упругой опоры), найдем ε_j' и α_j .

Результаты счета для ряда значений безразмерного параметра $n_3 = Cl^2/A_{33}$ при фиксированном значении $n_1 = 0, 1$ в зависимости от безразмерной скорости w_0 представлены на фигуре (C — жесткость опоры). Пунктирные кривые соответствуют ε_1' и ε_2' при $n_3 = 3, 10, 25$, а сплошные — α_1 и α_2 при тех же значениях параметра n_3 . Частный случай этой задачи, когда $C = 0$, рассмотрен в [9]. Из графиков следует, что увеличение жесткости опоры C приводит к увеличению критической скорости жидкости w_{0*} . Причем неустойчивой является всегда вторая форма колебаний, т. е. для приближенных решений аналогичных задач одночленного приближения недостаточно.

Если в системе уравнений (2.1) — (2.3) положить $v_k = \omega_k = Q_{11} = w_{1-} = 0$, то получим систему уравнений, которая дает возможность исследовать статическую устойчивость стержня (например устойчивость в «малом»)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \varepsilon} + \varepsilon_{kij} \Delta \kappa_i Q_{j0}^* + \varepsilon_{kij} \kappa_{i0} \Delta Q_j &= \Delta q_k(\psi, \varphi, \vartheta, u_\nu) + \Delta \gamma_k(\psi, \varphi, \vartheta, u_\nu) \quad (\nu=1,2,3) \\ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [A_{k\gamma} \Delta \kappa_\gamma] + \varepsilon_{kij} \kappa_{j0} A_{j\gamma} \Delta \kappa_\gamma + \varepsilon_{kij} \Delta \kappa_i M_{j0}^* - \varepsilon_{kii} \Delta Q_i &= \Delta \mu_k(\psi, \varphi, \vartheta, u_\nu) \quad (2.5) \\ \frac{\partial u_k}{\partial \varepsilon} + \varepsilon_{kij} \kappa_{i0} u_j &= \delta_{k1} - k_{k1}, \quad \varepsilon_{kij} \Delta \kappa_j = \left(\frac{\partial k_{im}}{\partial \varepsilon} + \varepsilon_{mnj} \kappa_{n0} k_{ij} \right) k_{km} - \varepsilon_{kij} \kappa_{j0} \end{aligned}$$

где Q_{k0}^* , M_{k0}^* — критические значения. Для шарнирно-закрепленного кругового стержня $Q_{k0}^* = M_{k0}^* = 0$ и из (2.5) (при $\Delta Q_k = \Delta \gamma_k = \Delta \mu_k = 0$) следует, что в этом случае в отличие от результатов [2] стержень не теряет устойчивости.

Поступила 25 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Светлицкий В. А. Статика, устойчивость и малые колебания гибких стержней, заполненных движущейся идеальной несжимаемой жидкостью. В сб.: Расчеты на прочность, вып. 14. М., «Машиностроение», 1969.
2. Unny T. E., Martin E. L., Dubey R. N. Hydroelastic instability of uniformly curved pipe-fluid systems. Trans. ASME. Ser. E: J. Appl. Mech., 1970, vol. 37, No. 3. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. Е, 1970, № 3.)
3. Stein R. A., Tobriner M. W. Vibration of pipes containing flowing fluids. Trans. ASME. Ser. E: J. Appl. Mech., 1970, vol. 37, No. 4. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. Е, 1970, № 4.)
4. Chen S. S. Vibration and stability of a uniformly curved tube conveying fluid. J. Acoust. Soc. America, 1972, vol. 51, No. 1, pt 2.
5. Chen S. S. Out-of-plane vibration and stability of curved tubes conveying fluid. Trans. ASME. Ser. E: J. Appl. Mech., 1973, vol. 40, No. 2. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. Е, 1973, № 2.)
6. Доценко П. Д. Об уравнениях малых колебаний криволинейного трубопровода. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 5.
7. Дерябин В. С., Доценко П. Д. О колебаниях трубопровода постоянной кривизны. Прикл. механ., 1975, т. 11, вып. 1.
8. Hill I. L., Davis C. G. The effect of initial forces on the hydroelastic vibration and stability of planar curved tubes. Trans. ASME. Ser. E: J. Appl. Mech., 1974, vol. 41, No. 2.
9. Феодосьев В. И. Избранные задачи по сопротивлению материалов. М., «Наука», 1973.