

О ДВИЖЕНИИ В УПРУГОЙ СРЕДЕ
ЖЕСТКОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТЕЛА
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

М. А. РЫЛКО

(Москва)

Рассматривается плоская динамическая задача для безграничной упругой среды с жестким однородным включением прямоугольной формы. Предполагается, что трение между средой и включением отсутствует. Исследуется движение тела под действием плоской волны, падающей на него под произвольным углом.

Показано, что для моментов времени, меньших времени пробега продольной волной одной из сторон прямоугольника, движение тела описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Найдены зависимости ускорения поступательного движения тела от времени, угла падения, соотношения сторон и других параметров. Процесс рассматривается с учетом лишь первичных дифракционных волн, что позволяет, однако, для нагрузок, имеющих резкий фронт, оценить перегрузки, испытываемые телом.

Близкие задачи для полосы, лежащей на поверхности упругого полупространства, и полосы, впаянной в упругую среду, рассматривались в работах [1, 2].

1. Постановка задачи. Пусть в безграничной упругой среде находится жесткое однородное тело прямоугольной формы. Начало декартовой системы координат совместим с центром масс тела, направляя оси вдоль сторон прямоугольника. Требуется изучить движение тела под действием падающей под произвольным углом плоской (продольной или поперечной) волны, фронт которой достигает в момент времени $t=0$ границы тела (фиг. 1).

При $t < 0$ тело покоится, а полный вектор смещения в среде \mathbf{u} с компонентами u и v совпадает с вектором смещения \mathbf{u}_+ в падающей волне

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_+(ct - x \sin e + y \cos e) \quad (\mathbf{u}_+(t) = 0, t \leq 0) \quad (1.1)$$

где e — угол между осью x и фронтом падающей волны, c — скорость распространения падающей волны.

Движение жесткого прямоугольного тела описывается смещением центра масс \mathbf{u}_* с компонентами u_* и v_* и малым углом поворота α_*

$$m\mathbf{u}_*''(t) = \mathbf{R}(t), \quad I\alpha_*''(t) = M(t) \quad (1.2)$$

с нулевыми начальными условиями

$$\mathbf{u}_*(0) = \mathbf{u}_*' (0) = 0, \quad \alpha_*(0) = \alpha_*' (0) = 0 \quad (1.3)$$

где m — масса тела единичной толщины, I — момент инерции тела относительно центра масс, \mathbf{R} и M — соответственно равнодействующая и момент (относительно центра масс) напряжений, действующих на тело со стороны упругой среды.

Движение среды описывается динамическими уравнениями Лямэ

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (1.4)$$

где коэффициенты Лямэ λ и μ , а также плотность ρ связаны со скоростями продольных a и поперечных b волн в среде формулами $a^2 = (\lambda + \mu)/\rho$, $b^2 = \mu/\rho$.

Начальные условия для решения уравнений (1.4) задаются в виде (1.1). Краевые условия снесем на невозмущенную границу тела Γ и примем их в виде

$$\tau_{xy}|_{\Gamma} = 0, \quad \mathbf{u}_n^*|_{\Gamma} = \mathbf{u}_*^* + [\mathbf{r} \times \alpha_*^* \cdot \mathbf{k}] \quad (1.5)$$

Равнодействующая \mathbf{R} и момент \mathbf{M} в (1.2) выражаются через нормальное напряжение σ_n на поверхности тела следующим образом:

$$\mathbf{R}(t) = \oint_{\Gamma} \sigma_n(t) d\Gamma, \quad \mathbf{M}(t) = \oint_{\Gamma} [\sigma_n(t) \times \mathbf{r}] d\Gamma \quad (1.6)$$

В окрестностях углов тела напряжения предполагаются интегрируемыми с квадратом.

Задача определения движения тела сводится к нахождению из (1.1), (1.4) и (1.5) зависимости интегральных характеристик (1.6) от падающей волны и параметров движения тела \mathbf{u}_* , α_*^* и к определению последних из уравнений (1.2). В данном случае исследование поступательного движения можно провести независимо от изучения его поворотов. Здесь ограничиваемся исследованием лишь поступательного движения тела. Вращательное движение будет рассмотрено в отдельной статье.

2. Сведение исходной задачи. Представим поле смещений в упругой среде, возникающее в результате падения плоской волны и движения находящегося в ней тела, в виде суммы

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_+ + \mathbf{u}_- \quad (2.1)$$

Здесь \mathbf{u}_0 — смещение, определяемое из решения задачи дифракции плоской волны на неподвижном теле с начальными условиями (1.1) для среды и (1.3) для тела и краевыми условиями

$$\tau_{xy}|_{\Gamma} = 0, \quad \mathbf{u}_n|_{\Gamma} = 0 \quad (2.2)$$

\mathbf{u}_+ — смещение в падающей волне (1.1), \mathbf{u}_- — смещение, соответствующее отраженно-дифрагированным волнам.

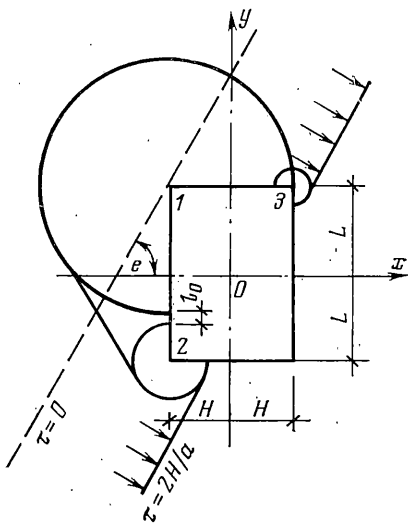
Смещение \mathbf{u}_1 определяется из решения задачи о поступательном движении тела в среде со скоростью \mathbf{u}_*^* , с нулевыми начальными и краевыми условиями

$$\tau_{xy}|_{\Gamma} = 0, \quad \mathbf{u}_n^*|_{\Gamma} = 0 \quad (2.3)$$

Смещение \mathbf{u}_2 определяется из решения задачи о вращении прямоугольного тела вокруг центра масс с угловой скоростью α_*^* , с нулевыми начальными условиями для среды и тела и со следующими краевыми условиями:

$$\tau_{xy}|_{\Gamma} = 0, \quad \mathbf{u}_n^*|_{\Gamma} = [\mathbf{r} \times \alpha_*^* \cdot \mathbf{k}] \quad (2.4)$$

Нетрудно убедиться, что в сумме начальные и краевые условия задач по определению \mathbf{u}_0 , \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 совпадают с условиями задачи, сформулированной в п. 1.



Фиг. 1

Такое разделение, возможное в силу линейности задачи, будет справедливым, если скорость движения тела удовлетворяет уравнениям (1.2).

В силу линейности задачи, очевидно, и интегральные характеристики (1.6) можно вычислять в виде сумм

$$R=R_0+R_1+R_2, \quad M=M_0+M_1+M_2 \quad (2.5)$$

где каждое составляющее равнодействующей и момента напряжений находится через соответствующее смещение из (2.1).

3. Решение для одного угла. Основную трудность в решении задачи о взаимодействии падающей волны с прямоугольным телом представляет учет дифракционных возмущений на углах тела.

В силу независимости дифракционных возмущений на различных углах прямоугольного тела и линейности задачи можно, при определении соответствующих напряжений, воспользоваться решением задачи дифракции плоской упругой волны на одном угле (жестком клине), полученном в [3] для случая, когда на гранях клина имеют место условия типа (2.2). Подчеркнем, что речь идет о вычислении напряжений, соответствующих первичным дифракционным волнам.

Для падающей продольной волны в виде ступеньки потенциала смещения в [3] приведены выражения продольного и поперечного потенциалов волнового поля

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_a(r, \vartheta, t) + \frac{4}{\pi} [1 + \gamma^{-2k}]^{-1} \sin k\pi \cos k\vartheta_0 \cos k\vartheta \left[P\left(\frac{at}{r}\right) - \frac{1}{P(at/r)} \right] \\ \psi &= \frac{4}{\pi} \gamma^k [1 + \gamma^{-2k}]^{-1} \sin k\pi \cos k\vartheta_0 \sin k\vartheta \left[P\left(\frac{bt}{r}\right) - \frac{1}{P(bt/r)} \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

где φ_a — решение акустической задачи с краевым условием $\partial\varphi/\partial\vartheta=0$, $P(\tau) = (\tau + \sqrt{\tau^2 - 1})^k$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — полярные координаты; $\gamma = b/a$, $\vartheta_0 = e + \pi/2$ — угол между гранью клина $\vartheta=0$ и нормалью к фронту падающей волны; $\pi k^{-1} < \vartheta \leq 2\pi$ — угол раствора клина (фиг. 1–4 в [3]).

Отметим, что окончательное решение в [3] приведено с опечаткой в коэффициентах, которая исправлена в формулах (3.1).

С помощью интеграла Дюамеля перейдем от (3.1) к решению, соответствующему ступеньке скорости

$$\varphi_0 = \int_{r/a}^t \varphi\left(\frac{a\tau}{r}, \vartheta\right) \omega'(t-\tau) d\tau, \quad \psi_0 = \int_{r/b}^t \psi\left(\frac{b\tau}{r}, \vartheta\right) \omega'(t-\tau) d\tau \quad (3.2)$$

где $\omega(\xi) = -a^2 \xi^2 / 2$ — потенциал, соответствующий ступеньке скорости.

Вычисляя нормальные к граням клина напряжения через продольный φ_0 и поперечный ψ_0 потенциалы

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \rho \left[\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} - 2b^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial \vartheta} \right) \right] \quad (3.3)$$

и интегрируя затем согласно (1.6) в пределах круга $r=at$ для продольной и $r=bt$ для поперечной составляющей, получим формулы для равнодействующей и момента напряжений, обусловленных дифракцией плоской продольной волны на клине в упругой среде

$$R_0'(t) = \rho a^3 C_0 t, \quad M_0'(t) = \rho a^4 D_0 t^2 \quad (3.4)$$

$$C_0 = \int_0^1 \alpha(\eta) d\eta + \int_0^{\gamma} \beta(\eta) d\eta, \quad D_0 = \int_0^1 \alpha(\eta) \eta d\eta + \int_0^{\gamma} \beta(\eta) \eta d\eta \quad (3.5)$$

$$\alpha(\eta) = (1 + 2\gamma^2\eta^{-2})\varphi_0(\eta^{-1}, \vartheta) + 4\gamma^2 \int_1^{1/\eta} \xi \varphi_0(\xi, \vartheta) d\xi, \quad \beta(\eta) = 2 \int_1^{1/\eta} \xi \frac{\partial \varphi_0}{\partial \vartheta}(\xi, \vartheta) d\xi$$

Интегралы (3.5) вычислялись методом Симпсона на ЭВМ. Интегрируемые особенности при $r \rightarrow 0$ устранялись путем разбиения интервала интегрирования от 0 до γ на два $(0, \eta_0)$ и (η_0, γ) ; замены подынтегральных функций на первом интервале асимптотическими выражениями и вычислением здесь интегралов в явном виде.

ϑ	γ	$e=\pi/4$		$e=\pi/3$		$e=\pi/2$	
0	0.1	0.497	0.785	0.390	0.744	0.081	0.580
	0.2	0.542	0.705	0.288	0.769	-0.307	0.613
	0.3	0.618	0.838	0.086	0.802	-1.041	0.646
	0.4	0.724	0.885	-0.217	0.843	-2.128	0.676
	0.5	0.861	0.945	-0.623	0.801	-3.576	0.701
	0.6	1.025	1.017	-1.133	0.946	-5.382	0.722
	0.7	1.225	1.104	-1.747	1.007	-8.549	0.740
$\frac{3\pi}{2}$	0.1	0.497	0.785	0.584	0.812	0.717	0.842
	0.2	0.542	0.705	0.777	0.827	1.183	0.848
	0.3	0.618	0.838	1.127	0.861	2.053	0.882
	0.4	0.724	0.885	1.640	0.913	3.328	0.946
	0.5	0.861	0.945	2.315	0.985	5.018	1.040
	0.6	1.025	1.017	3.155	1.076	7.119	1.165
	0.7	1.225	1.104	5.215	1.372	9.636	1.320

В таблице приведены значения коэффициентов C_0 (третий, пятый и седьмой столбцы) и D_0 (четвертый, шестой и восьмой столбцы) для прямоугольного клина ($k=2/3$) на сторонах $\vartheta=0$ и $\vartheta=3\pi/2$ при $0.1 \leq \gamma \leq 0.7$ и $0 \leq e \leq \pi/2$. Коэффициенты для $e=0, \pi/6$ при $\vartheta=0$ равны коэффициентам для $e=\pi/2, \pi/3$ при $\vartheta=3\pi/2$.

Рассмотрим задачу о поступательном движении в упругой среде жесткого прямоугольного клина при условии, что скорость его описывается ступенчатой функцией Хэвисайда, а на гранях имеют место условия (2.3).

Нетрудно показать, что смещение в этой задаче будет отличаться от смещения в задаче дифракции плоской волны на неподвижном теле лишь на величину смещения в падающей волне. Следовательно, равнодействующие и моменты в этой задаче также могут быть определены из (3.4), где вместо C_0 и D_0 следует положить

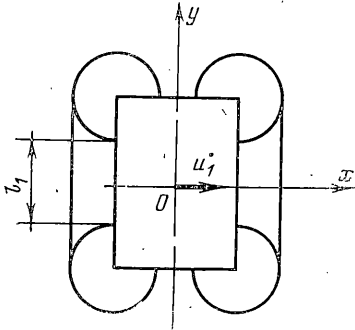
$$C_* = C_0 - 1, \quad D_* = D_0 - 1 \quad (3.6)$$

При этом значения C_0 и D_0 должны соответствовать $\vartheta=0$ или $\vartheta=\pi/k$, в зависимости от направления движения клина.

4. Поступательное движение тела. Результаты, полученные в п. 3 для жесткого прямоугольного клина, позволяют составить и решить уравнения движения (1.2) для $t \leq 2H/a$, т. е. с учетом первичных дифракционных волн. Ниже рассматривается лишь поступательное движение тела вдоль оси x при произвольных углах падения плоской волны. Движение вдоль оси y аналогично.

Система волн, образующихся при взаимодействии плоской волны с неподвижным прямоугольным телом, зависит от времени, соотношения сторон $s=L/H$, угла падения e (фиг. 1).

Обобщая решение (3.4) на случай прямоугольного тела, т. е. учитывая дифракционные возмущения на нескольких углах тела, в проекциях на ось x получим



Фиг. 2

$$R_0 = 2\rho a l_0(\tau) u_+ + \rho a^2 [\nu u_+ - \chi a^{-1} u_+] \quad (4.1)$$

Первый член в формуле (4.1) соответствует реакции от плоских (падающих и отраженных) волн на большей стороне прямоугольного тела длиной

$$l_0(\tau) = \tau H(1/\cos e - 1) \quad \text{при } 0 < \tau \leq 2, s \cos e > 1 \\ \text{при } 0 < \tau \leq 2s \cos e, s \cos e < 1 \\ l_0(\tau) = 2H[(s - \tau) + s \cos e] \quad \text{при } 2s \cos e < \tau \leq s[1 + \cos e]$$

$$l_0(\tau) = 0 \quad \text{при } s(1 + \cos e) < \tau \leq 2 \quad (\tau = at/H)$$

Второй член в (4.1) соответствует дифракционным возмущениям на углах тела. Величины ν и χ определяют порядок прохождения падающей волной углов тела в течение времени $t \leq 2H/a$ и радиус образующихся при этом цилиндрических волн.

Для $e > \arctg s$

$$\nu = C_0^{(1)}, \quad \chi = 0 \quad \text{при } 0 < \tau \leq 2s \cos e$$

$$\nu = \sum_{i=1,2} C_0^{(i)}, \quad \chi = 2HC_0^{(2)} s \cos e \quad \text{при } 2s \cos e < \tau \leq 2 \sin e$$

$$\nu = \sum_{i=1,2,3} C_0^{(i)}, \quad \chi = 2H[C_0^{(2)} s \cos e + C_0^{(3)} \sin e] \quad \text{при } 2 \sin e < \tau \leq 2$$

Для $e < \arctg s$

$$\nu = C_0^{(1)}, \quad \chi = 0 \quad \text{при } 0 < \tau \leq 2 \sin e$$

$$\nu = \sum_{i=1,3} C_0^{(i)}, \quad \chi = 2HC_0^{(3)} \sin e \quad \text{при } 2 \sin e < \tau \leq 2s \cos e$$

$$\nu = \sum_{i=1,2,3} C_0^{(i)}, \quad \chi = 2H[C_0^{(2)} s \cos e + C_0^{(3)} \sin e] \quad \text{при } 2s \cos e < \tau \leq 2$$

Значение индекса при C_0 указывает, какие углы тела (фиг. 1) взаимодействуют в данный момент с падающей плоской волной.

Реакция R_1 также складывается из реакций, соответствующих участкам плоских волн на большей стороне тела длиной

$$l_1(\tau) = 2H(s - \tau) \quad \text{при } \tau \leq s, \quad l_1(\tau) = 0 \quad \text{при } \tau > s$$

и реакций, соответствующим цилиндрическим волнам, излучаемым углами прямоугольного тела при поступательном движении его (фиг. 2)

$$R_1 = -2\rho a l_1(\tau) u_* - 4\rho a^2 C_* u_* \quad (4.2)$$

Отметим, что формулы (4.1) и (4.2) будут справедливы при произвольных выражениях скоростей падающей волны и тела.

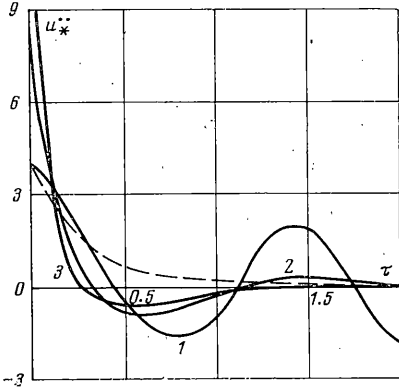
Окончательно для описания поступательного движения тела получим обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$nu_*'' + 2l_1(\tau)u_*' + 4C_*u_* = [2l_0(\tau) - \chi]u_+ + \nu u_+ \quad (4.3)$$

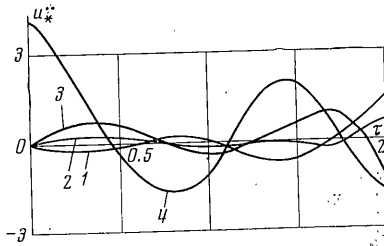
$$n = \rho H^2 / m$$

где линейные величины u_+ , u_* , l_0 , l_1 отнесены к половине меньшей стороны прямоугольника H , и в дальнейшем считаются безразмерными.

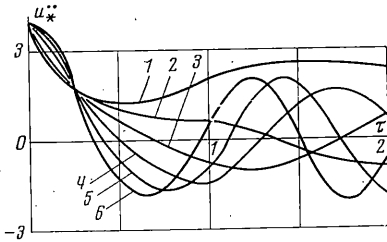
Начальные условия для уравнения (4.3) определяются соотношениями (1.3).



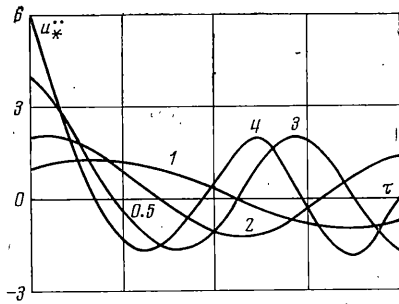
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Уравнение (4.3) решалось численно методом Рунге — Кутты для падающей волны с потенциалом, соответствующим ступеньке скорости. К решению для произвольной скорости падающей волны, как известно [4], можно перейти при помощи интеграла Дюамеля.

В качестве иллюстрации приведем графики зависимостей ускорения поступательного движения u_*'' от времени и параметров задачи.

Характерной особенностью всех приводимых ниже графиков является наличие ярко выраженного колебательного процесса, ненаблюдаемого при изучении движения полосы в упругой среде под действием падающей волны [1, 2].

На фиг. 3 приведена зависимость ускорения u_*'' от отношения сторон прямоугольника s при нормальном падении плоской волны ($e = \pi/2$) для $\gamma = 0.6$ и $n = 1$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям параметра $s = 1, 2, 3$. Наибольшая частота и амплитуда колебаний наблюдается для квадратного тела ($s = 1$). С ростом s происходит быстрое затухание колебаний, и уже при $s = 3$ характер зависимости становится близок к случаю нормального падения плоской волны на полосу, впаиванную в упругую среду [2]. На фиг. 3 полосе соответствует пунктирная линия.

Зависимость ускорения u_*'' от угла падения e представлена на фиг. 4. Кривые 1, 2, 3, 4 получены для значений $e = \pi/6, \pi/4, \pi/3$ и $\pi/2$ при $s = 1, \gamma = 0.6$ и $n = 1$. Влияние

угла падения на ускорение поступательного движения сказывается резко лишь для углов, близких к $\pi/2$ (нормальное падение). При $e=0$, как и следовало ожидать, тело не будет совершать никаких движений вдоль оси x . С увеличением угла падения от 0 до $\pi/3$ частота колебаний и амплитуда практически не меняются, но при дальнейшем увеличении резко возрастают, достигая максимума при $e=\pi/2$. Это можно объяснить тем, что при $e < \pi/2$ падающая волна взаимодействует в начальный момент времени лишь с одним углом тела с нулевым начальным ускорением, а при $e=\pi/2$ ускорение u_{*}'' в начальный момент времени определяется в силу (1.5) плоскими волнами на всей длине той стороны тела, которая взаимодействует с падающей волной.

Кривые, изображенные на фиг. 5, дают представление о зависимости ускорения u_{*}'' от параметра γ , количественно характеризующего среду, в которой происходит движение тела. Величина γ , как известно [4], для реальных сред имеет диапазон от 0.1 до 0.7, возрастая по мере увеличения жесткости среды. Кривым 1, 2, 3, 4, 5, 6 на фиг. 5 отвечают значения $\gamma=0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$, полученные в случае нормального падения волны ($e=\pi/2$) на квадратное тело ($s=1$) при $s=1$. При $\gamma \rightarrow 0$, т. е. для сред, близких к акустическим, наблюдается плавно затухающее во времени движение. При $0.5 \leq \gamma \leq 0.7$ движение тела приобретает ярко выраженный характер колебаний. Из сравнения кривых на фиг. 5 видно, что по мере увеличения жесткости среды частота колебаний находящегося в ней тела будет возрастать. Амплитуда ускорения u_{*}'' в течение времени $t \leq 2H/a$ может достигать и даже превосходить начальное ускорение тела.

На фиг. 6 изображена зависимость u_{*}'' от параметра n , характеризующего отношение некоторой массы среды к массе включения. Значениям $n=0.25, 0.5, 1, 1.5$ соответствуют кривые 1, 2, 3, 4, полученные при $s=1, \gamma=0.6$ и $e=\pi/2$.

Для всех значений параметра n движение тела носит характер колебаний. Частота колебаний тела оказывается обратно пропорциональной массе тела. При этом для «тяжелых» ($n < 1$) наблюдается более быстрое затухание колебаний, чем для «легких» ($n > 1$).

Характер приведенных на фиг. 3–6 графиков ускорения поступательного движения тела не изменяется и при других допустимых значениях параметров задачи.

Таким образом, из исследования лишь поступательного движения прямоугольного тела в упругой среде видно, что по своему характеру последнее существенно отличается от изученного ранее [4, 3] движения полосы в этих же условиях.

Автор благодарит Н. В. Зволинского и Л. М. Флитмана за внимание и большую помощь в работе.

Поступила 26 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Флитман Л. М. О движений под действием сейсмической волны жесткой массивной полосы, лежащей на упругом полупространстве. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
2. Костров Б. В. Движение жесткой массивной полосы, впаивной в упругую среду под действием плоской волны. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
3. Костров Б. В. Дифракция плоской волны на жестком клине, вставленном без трения в безграничную упругую среду. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
4. Соболев С. Л. Некоторые вопросы теории распространения колебаний. Гл. XII в кн.: Ф. Франк и Р. Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.— М., Гостехиздат, 1937.