

ОПТИМАЛЬНАЯ КРУГЛАЯ ПЛАСТИНКА ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ
ПО ЖЕСТКОСТИ И ЧАСТОТЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Н. М. ГУРА, А. П. СЕЙРАНЯН

(Москва)

Рассматривается задача проектирования свободно опертой упругой круглой пластинки минимального веса (объема) при ограничениях в виде неравенств, наложенных на жесткость при действии изгибающей нагрузки постоянной интенсивности и частоту первого тона осесимметричных собственных колебаний при свободных колебаниях. Предполагается, что указанные воздействия прилагаются к пластинке по отдельности. Под жесткостью будем понимать величину среднего прогиба пластинки. Варьируемой функцией служит толщина пластинки.

Получены необходимые условия оптимальности поставленной задачи, исследуется зависимость оптимального решения от параметров задачи, приведены численные результаты. В области значений параметров, где оба ограничения выходят на равенства, построено квазиоптимальное решение с оценками близости к оптимальному решению по функционалу объема.

Задача о пластинке с минимальным значением среднего прогиба при постоянном объеме материала решена численно в [1], оптимальные задачи о колебаниях круглых пластинок рассмотрены в [2], кольцевая пластинка при ограничениях по прочности изучена в [3].

1. Постановка задачи. Запишем уравнения осесимметричных колебаний и изгиба круглой пластинки переменной толщины [4] в безразмерных координатах

$$L_h w_1 = \omega^2 h(r) w_1(r) r, \quad r \in (0, 1) \quad (1.1)$$

$$L_h w_2 = q r, \quad r \in (0, 1) \quad (1.2)$$

$$L_h = \frac{d}{dr} \left\{ r \left[h^3(r) \left(\frac{d}{dr} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \right) + \frac{d}{dr} (h^3(r)) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \right) \right] \right\} \quad (1.3)$$

$$\omega^2 = 12(1-\nu^2)\Omega^2 R^2 \rho / E, \quad q = 12(1-\nu^2)P / E \quad (1.4)$$

$$h(r) = H(r) / R, \quad w_1(r) = W_1(r) / R, \quad w_2(r) = W_2(r) / R$$

где E , ρ , ν , R , Ω , P — размерные величины: модуль упругости, плотность материала, коэффициент Пуассона, радиус пластинки, частота собственных колебаний и распределенная изгибающая нагрузка; $H(r)$, $W_1(r)$, $W_2(r)$ — размерные функции: толщина пластинки и функции прогибов при колебаниях и изгибе соответственно, $h(r)$, $w_1(r)$, $w_2(r)$ — соответствующие им безразмерные величины.

Выпишем граничные условия свободного опирания пластинки [4]:

$$[h^3(r) (w_i'' + \nu w_i' / r)]_{r=1} = 0, \quad w_i(1) = 0 \quad (i=1, 2) \quad (1.5)$$

$$\left[h^3(r) \left(w_i'' + \frac{w_i'}{r} \right)' + (h^3(r))' \left(w_i'' + \frac{\nu w_i'}{r} \right) \right]_{r=0} = 0, \quad w_i'(0) = 0 \quad (i=1, 2)$$

Безразмерный средний прогиб пластинки при изгибе равен

$$a = \int_0^1 r w_2(r) dr / \int_0^1 r dr = 2 \int_0^1 r w_2(r) dr \quad (1.6)$$

а безразмерный объем пластинки выражается соотношением

$$v = \int_0^1 r h(r) dr \quad (1.7)$$

Для получения соответствующих размерных величин A и V интегралы (1.6), (1.7) следует умножить на R и $2\pi R^3$.

Накладывая на частоту собственных колебаний Ω и средний прогиб A ограничения в виде неравенств, для безразмерных величин ω и a получим

$$\omega \geq \omega_0, \quad a \leq a_0 \quad (1.8)$$

где ω_0 и a_0 — заданные безразмерные константы.

Сформулируем оптимальную задачу: требуется найти функции $h^\circ(r)$, $w_1^\circ(r)$, $w_2^\circ(r)$, удовлетворяющие уравнениям (1.1) и (1.2), граничным условиям (1.5), а также ограничениям (1.8), так что функция $h^\circ(r)$ реализует минимальное значение функционала объема (1.7).

2. Необходимые условия оптимальности. Поскольку линейная краевая задача (1.2), (1.5) является самосопряженной и положительно-определенной, то задача (1.1), (1.5) будет самосопряженной задачей на собственные значения [2]. Для этих задач справедливы соотношения

$$\omega^2(h) = (L_n w_1, w_1) / (h w_1 r, w_1) \quad (2.1)$$

$$a(h) = (2/q)(qr, w_2) = (2/q)(L_n w_2, w_2) \quad (2.2)$$

где скалярное произведение $(L_n w_i, w_i)$ описывается выражением [2, 4]

$$(L_n w_i, w_i) = \int_0^1 h^3(r) \left[w_i''^2 + \frac{2\nu w_i'' w_i'}{r} + \left(\frac{w_i'}{r} \right)^2 \right] r dr \quad (i=1,2) \quad (2.3)$$

Для задач (1.1), (1.5) и (1.2), (1.5) справедливы вариационные принципы: минимальный принцип Рэля для собственных значений и принцип минимума полной энергии деформации [5, 6]

$$\omega^2(h) = \min_w (L_n w, w) / (h r w, w) = (L_n w_1, w_1) / (h r w_1, w_1) \quad (2.4)$$

$$-(qr, w_2) = \min_u [(L_n u, u) - 2(qr, u)] \quad (2.5)$$

Из соотношений (2.2), (2.5) получим выражение для среднего прогиба

$$a(h) = -(2/q) \min_u [(L_n u, u) - 2(qr, u)] \quad (2.6)$$

В выражениях (2.4)–(2.6) функции w и u удовлетворяют граничным условиям $w'(0) = u'(0) = 0$, $w(1) = u(1) = 0$ и соответствующим условиям гладкости.

Общие необходимые условия экстремума для задач математического программирования приводятся в [7]. Ограничения (1.8) для удобства запишем в виде $\omega^2(h) - \omega_0^2 \geq 0$, $a_0 - a(h) \geq 0$. Градиенты этих функционалов с использованием выражений (2.1), (2.2) и минимальных принципов (2.4),

(2.6) с точностью до постоянных множителей представим в форме [1, 2, 8]

$$\begin{aligned} & \text{grad}(\omega^2(h) - \omega_0^2) = \\ & = \left\{ 3h^2(r) \left[w_1''^2 + \frac{2\nu w_1'' w_1'}{r} + \left(\frac{w_1'}{r} \right)^2 \right] - \omega^2 w_1^2 \right\} r = \psi_1(h, w_1) r \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & \text{grad}(a_0 - a(h)) = \\ & = 3h^2(r) \left[w_2''^2 + \frac{2\nu w_2'' w_2'}{r} + \left(\frac{w_2'}{r} \right)^2 \right] r = \psi_2(h, w_2) r \end{aligned} \quad (2.8)$$

Поскольку градиент функционала объема (1.7) равен r , то, предполагая $h^\circ(r) > 0$, $r \in (0, 1)$, получим необходимые условия оптимальности функции $h^\circ(r)$

$$\mu_1 \psi_1(h^\circ, w_1^\circ) + \mu_2 \psi_2(h^\circ, w_2^\circ) = 1, \quad r \in (0, 1) \quad (2.9)$$

$$\mu_1(\omega^2(h^\circ) - \omega_0^2) = 0, \quad \mu_1 \geq 0 \quad (2.10)$$

$$\mu_2(a(h^\circ) - a_0) = 0, \quad \mu_2 \geq 0 \quad (2.11)$$

Таким образом, для неизвестных $h^\circ(r)$, $w_1^\circ(r)$, $w_2^\circ(r)$, μ_1 , μ_2 имеем соотношения (1.1), (1.2), (1.8), (2.9)–(2.11) и граничные условия (1.5).

3. Зависимость оптимального решения от параметров задачи. Исследуем зависимость оптимального решения задачи от параметров q , ω_0 , a_0 .

Предварительно рассмотрим случай выхода на равенство первого ограничения (1.8), т. е. случай $\omega^2(h^\circ) = \omega_0^2$, $a(h^\circ) < a_0$. Для него из уравнений (2.9)–(2.11) имеем $\mu_1 > 0$, $\mu_2 = 0$.

Воспользовавшись однородностью оператора L_h и функционалов (2.1), (1.7) относительно функции $h(r)$, нетрудно заключить, что решение системы необходимых условий (1.1), (1.2), (2.9)–(2.11) имеет вид

$$h_1^\circ(r) = \omega_0 h_1^*(r) \quad (3.1)$$

где $h_1^*(r)$ — решение системы уравнений (1.1), (1.5), (2.9)–(2.11) для значений $\omega_0 = 1$ и $1/a_0 = 0$.

Решив для функции $h_1^\circ(r)$ краевую задачу (1.2), (1.5) и вычислив значение среднего прогиба по формуле (2.2), потребуем $a(h_1^\circ) \leq a_0$. Отсюда вследствие однородности функционала $a(h)$ (степень однородности $\gamma = -3$) получим неравенство

$$(q/a_0) / \omega_0^3 \leq \beta_1, \quad \beta_1 = q/a(h_1^*) \quad (3.2)$$

Рассмотрим случай выхода на равенство второго ограничения (1.8), т. е. $a(h^\circ) = a_0$, $\omega^2(h^\circ) > \omega_0^2$. Для этого случая из соотношений (2.9)–(2.11) получим $\mu_1 = 0$, $\mu_2 > 0$. Оптимальное решение для этого случая запишем в виде

$$h_2^\circ(r) = (q/a_0)^{1/3} h_2^*(r) \quad (3.3)$$

где $h_2^*(r)$ — решение системы уравнений (1.2), (1.5), (2.9)–(2.11) для значений $\omega_0 = 0$, $(q/a_0) = 1$.

Решив задачу на собственные значения (1.1), (1.5) для функции $h_2^*(r)$, определим $\omega^2(h)$ и потребуем $\omega^2(h) \geq \omega_0^2$. Тогда, поскольку степень однородности функционала $\omega^2(h)$ равна $\gamma = 2$, будем иметь

$$(q/a_0) / \omega_0^3 \geq \beta_2, \quad \beta_2 = [\omega^2(h_2^*)]^{-2} \quad (3.4)$$

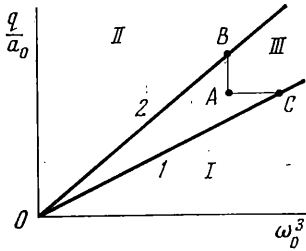
Введем параметр $\beta = (q/a_0) / \omega_0^3$. Таким образом, для значений $\beta \leq \beta_1$ (область I на фиг. 1) решением оптимальной задачи служит функция $h_1^\circ(r) = \omega_0 h_1^*(r)$; для значений $\beta \geq \beta_2$ (область II на фиг. 1) оптималь-

ным решением служит функция $h_2^\circ(r) = (q/a_0)^{1/2} h_2^*(r)$ (прямая 1 соответствует $\beta = \beta_1$, а прямая 2 — $\beta = \beta_2$). Если предположить, что решение оптимальной задачи для произвольного набора параметров a_0, ω_0, q единственно, а функции $h_1^*(r), h_2^*(r)$ линейно-независимы, то необходимо $\beta_2 > \beta_1$.

Действительно, в противном случае для параметров ω_0, a_0, q , удовлетворяющих неравенству $\beta_1 \geq \beta \geq \beta_2$, имелось бы два решения $h_1^\circ(r)$ и $h_2^\circ(r)$, которые не могут совпадать ввиду линейной независимости функций $h_1^*(r), h_2^*(r)$. Таким образом, приходим к противоречию с предположением о единственности оптимального решения.

Значениям параметра β , удовлетворяющим двустороннему неравенству $\beta_1 < \beta < \beta_2$ (область III на фиг. 1), соответствует случай $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$, т. е. случай выхода обоих ограничений (1.8) на равенства; это следует из выражений (2.10), (2.14). Параметр β является, таким образом, основным параметром, определяющим оптимальное решение. С учетом (1.4) представим β в виде

$$\beta = P [E / (12(1 - \nu^2))]^{1/2} / A_0 \Omega_0^3 R^2 \rho^{3/2}$$



Фиг. 1

где A_0 и Ω_0 — размерные величины среднего прогиба и частоты собственных колебаний.

4. Квазиоптимальное решение. Пусть параметры задачи q, a_0, ω_0 таковы, что введенный в п. 3 параметр β удовлетворяет двустороннему неравенству $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$ (точка A на фиг. 1). Этой точке соответствует оптимальное решение $h^\circ(r)$ со значением функционала объема

$$v_0 = \int_0^1 h^\circ(r) r dr$$

Тогда точке B на фиг. 1 будут соответствовать параметры $a_0' = a_0 \beta / \beta_2, \omega_0' = \omega_0$ и, следовательно, согласно результатам п. 3 оптимальное решение будет иметь вид: $h_2(r) = (\beta_2 / \beta)^{1/2} (q/a_0)^{1/2} h_2^*(r)$ со значением объема

$$v_2 = \left(\frac{\beta_2}{\beta}\right)^{1/2} \left(\frac{q}{a_0}\right)^{1/2} v_2^*, \quad v_2^* = \int_0^1 h_2^*(r) r dr$$

Решение $h_2(r)$ является допустимым для исходной задачи, поскольку удовлетворяет ограничениям $a_0' \leq a_0, \omega_0' = \omega_0$, поэтому $v_2 \geq v_0$; или

$$v_0 \leq (\beta_2 / \beta)^{1/2} (q/a_0)^{1/2} v_2^* \tag{4.1}$$

Аналогично, взяв допустимое решение $h_1(r)$, соответствующее точке C на фиг. 1, получим оценку

$$v_0 \leq \omega_0 (\beta / \beta_1)^{1/2} v_1^* \tag{4.2}$$

Объединяя (4.1), (4.2), можно установить неравенство

$$v_0 \leq v_q = \min [\omega_0 (\beta / \beta_1)^{1/2} v_1^*, (q/a_0)^{1/2} (\beta_2 / \beta)^{1/2} v_2^*] \tag{4.3}$$

Допустимое решение, составленное из $h_1(r), h_2(r)$, отвечающее минимуму правой части (4.3), назовем квазиоптимальным решением со значением функционала объема v_q .

С другой стороны, имеем оценку снизу

$$\max [\omega_0, v_1^*, (q/a_0)^{1/2} v_2^*] \leq v_0 \tag{4.4}$$

поскольку функция $h^\circ(r)$, являющаяся решением задачи с двумя ограничениями, не может сообщать функционалу объема меньшее значение, чем функции $\omega_0 h_1^*(r)$, $(q/a_0)^{1/2} h_2^*(r)$, отвечающие решению той же задачи, но с одним из ограничений. Из (4.3), (4.4) нетрудно получить соотношения

$$1 \leq v_q/v_0 \leq \min(\dots)/\max(\dots) \leq \leq \min \left[\left(\frac{\beta}{\beta_1} \right)^{1/2}, \left(\frac{\beta_2}{\beta} \right)^{1/2}, \frac{v_1^*}{v_2^* \beta_1^{1/2}}, \frac{v_2^* \beta_2^{1/2}}{v_1^*} \right] \quad (4.5)$$

Первые два члена в квадратных скобках последнего неравенства зависят от параметра β , т. е. от местоположения точки A в области III на фиг. 1; между тем как последние два члена дают абсолютную оценку. Так как, очевидно, что $\min [(\beta/\beta_1)^{1/2}, (\beta_2/\beta)^{1/2}, v_1^*/(\beta_1^{1/2} v_2^*), v_2^* \beta_2^{1/2}/v_1^*] \leq \leq \min [v_1^*/(\beta_1^{1/2} v_2^*), v_2^* \beta_2^{1/2}/v_1^*]$, то из (4.5) окончательно имеем

$$1 \leq v_q/v_0 \leq \min [v_1^*/(\beta_1^{1/2} v_2^*), v_2^* \beta_2^{1/2}/v_1^*] \quad (4.6)$$

Таким образом, зная функции $h_1^*(r)$, $h_2^*(r)$, а следовательно, и константы β_1 , β_2 (см. (3.2), (3.4)), для любой точки A , лежащей в области III, строим допустимые решения $h_1(r) = \omega_0 (\beta/\beta_1)^{1/2} h_1^*(r)$, $h_2(r) = (q/a_0)^{1/2} \times (\beta_2/\beta)^{1/2} h_2^*(r)$; затем по формуле (4.3) находим квазиоптимальное решение, причем для него из (4.6) имеем абсолютную оценку близости по функционалу объема.

5. Исследование особенностей в точке $r=1$. В [1], где рассмотрена задача о пластинке минимального среднего прогиба при постоянном объеме, получен следующий результат: оптимальная толщина пластинки в точке $r=1$ стремится к нулю, а вторая производная от прогиба в этой точке стремится к бесконечности. В [2], в которой решена задача о пластинке максимальной частоты первого тона собственных колебаний при постоянном объеме, получены разложения функций $w(r)$ и $h(r)$ в ряд в окрестности точки $r=1$.

Поскольку необходимые условия оптимальности для задач, рассмотренных в [1, 2], совпадают с условиями (2.9)–(2.11) (случаи $\mu_1=0$, $\mu_2>0$ и $\mu_1>0$, $\mu_2=0$ соответственно), а функционалы объема (1.7) и ограничений (1.8) однородны относительно функции $h(r)$, то решения этих задач с точностью до нормировочного множителя совпадают с введенными в п. 3 функциями $h_1^\circ(r)$ и $h_2^\circ(r)$. Разложения, полученные в [2], имеют вид

$$\begin{aligned} w_1^\circ(r) &= a_1(1-r) + a_2(1-r)^{3/2} + a_3(1-r)^2 + o(1-r)^2 \\ h_1^\circ(r) &= b_0(1-r)^{1/2} + b_1(1-r) + o(1-r) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Как нетрудно проверить, те же разложения, но с другими коэффициентами справедливы и для функций $w_2^\circ(r)$, $h_2^\circ(r)$. Найдем связь между коэффициентами в разложении (5.1). Предварительно продelaем это для функций $w_2^\circ(r)$, $h_2^\circ(r)$. Выражение (5.1) для этого случая удобно записать в форме

$$\begin{aligned} w_2^\circ(r) &= c_0 [a_1(1-r) + a_2(1-r)^{3/2} + a_3(1-r)^2 + a_4(1-r)^{5/2} + o(1-r)^{5/2}] \\ h_2^\circ(r) &= (q/c_0)^{1/2} [(1-r)^{1/2} + b_1(1-r) + o(1-r)] \end{aligned} \quad (5.2)$$

Нормировочная константа c_0 не влияет на коэффициенты a_i , b_i и определяется условием $a(h_2^\circ) = a_0$.

Подставим разложения (5.2) в уравнения (1.2) и (2.9), положив в последнем $\mu_1=0$. Приравнявая коэффициенты при главных членах разложения к нулю, получим

$$b_1=0, \quad a_2=-^2/3, \quad a_3=a_1v/2, \quad a_4=-v/5 \quad (5.3)$$

Вследствие того, что функция $w_1^\circ(r)$ определена с точностью до произвольного множителя, разложения (5.1) можно записать следующим образом:

$$w_1^\circ(r) = d_1(1-r) + d_2(1-r)^{3/2} + d_3(1-r)^2 + d_4(1-r)^{5/2} + o(1-r)^{5/2}$$

$$h_1^\circ(r) = e_0((1-r)^{1/2} + c_1(1-r) + o(1-r)) \quad (5.4)$$

где e_0 — константа, определяемая изопериметрическим условием $\omega^2(h_1^\circ) = \omega_0^2$.

Подставляя эти разложения в (1.1) и (2.9), аналогичным образом можно получить связь между коэффициентами c_i, d_i , при этом $c_1=0$.

6. Решение краевой задачи и задачи на собственные значения. В дальнейшем для получения оптимальных решений $h_1^\circ(r), h_2^\circ(r)$ потребуется решать краевую задачу (1.2), (1.5) и задачу на собственные значения (1.1), (1.5) для заданных функций $h(r)$, которые в окрестности точки $r=1$ ведут себя как $c(1-r)^{1/2}$, так как согласно результатам п. 5 оптимальные решения $h_1^\circ(r), h_2^\circ(r)$ ведут себя таким же образом.

Рассмотрим краевую задачу (1.2), (1.5). С использованием последнего граничного условия (1.5) уравнение (1.2) проинтегрируем один раз. В результате краевую задачу (1.2), (1.5) сведем к следующей:

$$L_h^4 \varphi_2 = qr^2/2 = Q(r), \quad r \in (0, 1), \quad \varphi_2(r) = \frac{dw_2}{dr} \quad (6.1)$$

$$L_h^4 = r \left[h^3(r) \frac{d}{dr} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) + \frac{d}{dr} (h^3(r)) \left(\frac{d}{dr} + \frac{v}{r} \right) \right]$$

$$\varphi_2(0) = 0, \quad [h^3(r) (\varphi_2' + v\varphi_2/r)]_{r=1} = 0 \quad (6.2)$$

$$w_2(r) = - \int_r^1 \varphi_2(r) dr \quad (6.3)$$

Для численного решения задачи отрезок $[0, 1]$ разобьем на N равных частей. На отрезке $[0, \alpha]$ уравнение (6.1) аппроксимируем уравнением в конечных разностях второго порядка, а на отрезке $[\alpha, 1]$ запишем для функции $\varphi_2(r)$ в узлах сетки продифференцированное один раз соотношение (5.2) с учетом (5.3). Добавляя граничное условие $\varphi_2(0)=0$, в результате получим систему линейных уравнений $N+1$ -го порядка, которую решим на ЭВМ методом Гаусса с итерационным уточнением. Вычислив функцию $\varphi_2(r)$, численным интегрированием из (6.3) получим $w_2(r)$.

Аналогично, задачу на собственные значения (1.1), (1.5) сведем к следующей:

$$L_h^4 \varphi_1 = \omega^2 \int_0^1 rhw_1 dr, \quad \varphi_1(0) = 0, \quad \left[h^3(r) \left(\varphi_1' + \frac{v\varphi_1}{r} \right) \right]_{r=1} = 0$$

$$\varphi_1(r) = \frac{dw_1}{dr}, \quad w_1(r) = - \int_r^1 \varphi_1(r) dr \quad (6.4)$$

Задавшись начальным приближением $w_1^{(0)}(r)$, задачу на собственные значения (6.4) будем решать на ЭВМ численно методом последовательных приближений [6]. Для функции $\psi_1^{i+1}(r)$ на каждой итерации решается крайняя задача (6.1)–(6.3), в которой правая часть $Q(r)$ (на i -й итерации) имеет вид

$$Q^{(i)}(r) = \int_0^r r h(r) w_1^{(i)}(r) dr$$

Собственное значение $\omega^{2(i)}$ на каждой итерации определяется из (2.1), при этом для функции $w_1^{(i+1)}$ на отрезке $[\alpha, 1]$ использовалось представление (5.4), в котором коэффициенты связаны между собой следующим образом:

$$d_2 = -4/3 Q^{(i)}(1)/e_0^3, \quad d_3 = d_1 \nu / 2, \quad d_4 = d_2 (3\nu + 2) / 10$$

7. Оптимальные решения $h_1^0(r)$, $h_2^0(r)$. Для получения оптимальных решений $h_1^0(r)$, $h_2^0(r)$ воспользуемся градиентным методом первого порядка. Согласно (2.9) функции $h_1^0(r)$, $h_2^0(r)$ удовлетворяют соответственно соотношениям $\psi_1(h_1^0, w_1^0) = \text{const}$, $\psi_2(h_2^0, w_2^0) = \text{const}$, $r \in (0, 1)$. Поэтому алгоритм градиентной процедуры удобно записать в виде

$$h_i^{(n+1)}(r) = h_i^{(n)}(r) [(\psi_i^{(n)}(r) / \langle \psi_i^{(n)} \rangle - 1) / 2^m + 1], \quad r \in [0, \alpha] \quad (i=1,2)$$

$$h_i^{(n+1)}(r) = c_i^{(n)} (1-r)^{1/2}, \quad r \in [\alpha, 1] \quad \langle \psi_i^{(n)} \rangle = \int_0^\alpha \psi_i(r) dr \quad (7.1)$$

Здесь функции $\psi_i^{(n)}(r) = \psi_i^{(n)}(h(r), w_i(r))$, $i=1,2$ определяются соотношениями (2.7), (2.8); $\langle \psi_i^{(n)} \rangle$ — среднее значение функции $\psi_i^{(n)}(r)$ на n -й итерации; m — число $\sim 2-3$; константа $c_i^{(n)}$ определяется на каждом шаге из условия непрерывности $h_i^{(n)}(r)$ в точке $r=\alpha$.

Начальное приближение $h_i^{(0)}(r)$ бралось в виде $h_i^{(0)}(r) = (1-r)^{1/2}$, $i=1,2$. На каждом шаге итерационной процедуры (7.1) для определения функций $\psi_i^{(n)}(r)$, $i=1,2$ требуется решать задачу (1.1), (1.5) либо (1.2), (1.5) соответственно.

Пусть последовательность $h_i^{(n)}(r)$ сходится в метрике $C[0, 1]$ к некоторой функции $h_i(r)$, тогда на отрезке $[0, \alpha]$ согласно (7.1) имеем $\psi_i(r) = \langle \psi_i \rangle = \text{const}$, а на отрезке $[\alpha, 1]$ это условие выполняется согласно результатам п. 5.

Получив таким образом, например, функцию $h_1(r)$ и вычислив для нее собственное значение $\omega^2(h_1)$, будем иметь $h_1^*(r) = h_1(r) / \omega(h_1)$. Функция $h_1^*(r)$ будет удовлетворять (2.9) и изопериметрическому условию $\omega^2(h_1^*) = 1$ (см. п. 3). Наконец, из (3.4) вычислим $h_1^0(r) = \omega_0 h_1^*(r)$.

Аналогично, для функции $h_2^0(r)$ найдем $h_2^*(r) = h_2(r) q / a^{1/2}(h_2)$ и окончательно из (3.3) получим $h_2^0(r) = (q/a_0^{1/2}) h_2^*(r)$.

В расчетах число m бралось равным двум; если на каком-то шаге последовательность

$$\max_{r \in [0, \alpha]} |\psi_i^{(n)}(r) / \langle \psi_i^{(n)} \rangle - 1|$$

переставала убывать, то число m увеличивалось на единицу и т. д. до выполнения неравенства

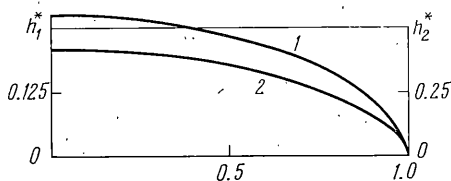
$$\max_{r \in [0, \alpha]} |\psi_i^{(n)}(r) / \langle \psi_i^{(n)} \rangle - 1| < \varepsilon \quad (7.2)$$

(где ε — точность вычислений).

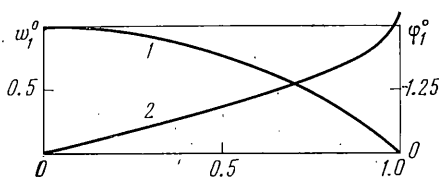
8. Численные результаты. При проведении расчетов отрезок $[0, 1]$ разбивался на $N=30$ равных частей, число α равнялось $\alpha=K/30$ ($K=27, 28$). Результаты вычислений слабо зависели от α . Число ε в (7.2) бралось равным $\varepsilon=10^{-3}$.

На фиг. 2 приведены графики функций $h_1^*(r)$, $h_2^*(r)$ (кривые 1, 2) для коэффициента Пуассона $\nu=0.3$; соответствующие объемы равны: $\nu_1^*=0.08804$, $\nu_2^*=0.1304$.

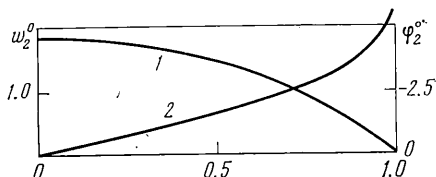
На фиг. 3 приведены функции $w_1^{\circ}(r)$, $\varphi_1^{\circ}(r)$ (кривые 1, 2); аналогичные кривые 1, 2 для функций $w_2^{\circ}(r)$, $\varphi_2^{\circ}(r)$ представлены на фиг. 4. Функция $w_1^{\circ}(r)$ норми-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

рована: $w_1^{\circ}(0)=1$, функция $w_2^{\circ}(r)$ приводится в единицах a_0 . Если толщины $h_1^*(r)$ и $h_2^*(r)$ соответствующей нормировкой привести к единичному объему $2\pi\nu_1=2\pi\nu_2=1$ и вычислить собственное значение ω^2 и значение среднего прогиба a для этих функций, то результаты можно сравнить с данными, полученными в [1, 2] (в [1] коэффициент Пуассона равен $1/3$). Отличие по объемам составляет менее 0.3%.

Числа β_1 , β_2 из (3.2), (3.4) равны соответственно $\beta_1=0.2952$, $\beta_2=0.3002$. Вычислив минимум квадратной скобки в (4.6), получим оценку $1 \leq \nu_1/\nu_0 \leq 1.009$. Таким образом, квазиоптимальное решение, определяемое (4.3), отличается по функционалу объема от оптимального менее чем на один процент.

Авторы благодарят Ф. Л. Черноушко и Н. В. Баничука за полезные обсуждения результатов.

Поступила 9 X 1975.

ЛИТЕРАТУРА

1. Huang N. C. Optimal design of elastic structures for maximum stiffness. Internat. J. Solids and Structures, 1968, vol. 4, p. 689-700.
2. Olhoff N. Optimal design of vibrating circular plates. Internat. J. Solids and Structures, 1970, vol. 6, p. 139-156.
3. Аристов М. В., Троицкий В. А. Упругая кольцевая пластинка минимального веса. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3.
4. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер. С. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
5. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., Гостехиздат, 1957.
6. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М., «Мир», 1969.
7. Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума. М., «Наука», 1969.
8. Сейранян А. П. Упругие пластины и балки минимального веса при наличии нескольких видов изгибающих нагрузок. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 5.