МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1977

УДК 539.3:534.1

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНКАХ

В. Б. ГРИНЕВ, А. П. ФИЛИППОВ

(Харьков)

Рассматриваются круглые пластинки, оптимальные по объему или значениям собственных частот. Проведено качественное исследование необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума [1], полученных в [2]. Найдены формулы, выражающие оптимальную конфигурацию пластинки через переменные состояния. Показано, что постановка рассматриваемых задач оптимизации без ограничений на закон изменения толщины по радиусу является некорректной в случае сплошных пластин.

Приведены примеры расчета оптимальных пластинок методом последовательных приближений.

1. Собственные изгибные колебания пластинки с n узловыми диаметрами характеризуются формой срединной поверхности $w(r)\cos(n\theta)$. В используемой системе координат координата z направлена по оси симметрии пластинки, а плоскость $r\theta$ совпадает со срединной плоскостью. Амплитудные значения изгибающих и скручивающего моментов задаются выражениями

$$M_r=-D\left[\frac{d^2w}{dr^2}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}-\frac{n^2}{r^2}w\right)\right]$$

$$M_\theta=-D\left[\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}w-\frac{n^2}{r^2}+\nu\frac{d^2w}{dr^2}\right]$$

$$H=D(1-\nu)n\frac{d}{dr}\left(\frac{w}{r}\right)\qquad D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Здесь E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона; $h(r)$ — закон изменения толщины пластинки по радиусу (конфигурация); $r\in[r_1, r_2]$, r_1, r_2 — радиусы внутреннего отверстия и внешнего контура. Дифференциальное уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{d^2(rM_r)}{dr^2}-\frac{2n}{r}\frac{d(rH)}{dr}-\frac{n^2}{r}M_\theta-\frac{dM_\theta}{dr}+\rho hp^2w=0$$

где ρ — масса единицы объема материала, p — частота.

Введем новые переменные

$$\varphi=\frac{dw}{dr},\quad M=rM_r,\quad Q=\frac{dM}{dr}-2nH-M_\theta$$

Тогда колебания пластинки могут быть описаны системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dw}{dr}=\varphi,\quad \frac{d\varphi}{dr}=-\frac{M}{rD}-\frac{\nu}{r}\varphi+\frac{\nu n^2}{r^2}w$$

$$\frac{dM}{dr}=Q+(3+\nu)(1-\nu)\frac{n^2}{r^2}Dw-(1-\nu)(1+\nu+2n^2)\frac{D}{r}\varphi+\frac{\nu}{r}M$$

$$\frac{dQ}{dr}=\left[(1-\nu)(2+n^2+\nu n^2)\frac{n^2}{r^3}D-\rho hp^2r\right]w-(1-\nu)(3+\nu)\frac{n^2}{r^2}D\varphi+\frac{\nu n^2}{r^2}M \tag{1.1}$$

с линейными однородными граничными условиями общего вида

$$\alpha_1 w(r_1)+\beta_1 Q(r_1)=0,\ \alpha_2\varphi(r_1)+\beta_2 M(r_1)=0$$
$$\alpha_3 w(r_2)+\beta_3 Q(r_2)=0,\ \alpha_4\varphi(r_2)+\beta_4 M(r_2)=0 \tag{1.2}$$

реализующими для различных значений параметров α_i, β_i типичные способы закрепления внутреннего и внешнего контура.

Варьируемой будем считать конфигурацию пластинки, изменяющуюся в рамках ограничений

$$h_1(r)\leqslant h(r)\leqslant h_2(r) \tag{1.3}$$

имеющих конструктивный или прочностной характер. Собственным частотам сопоставляются формы изгибных колебаний с n узловыми диаметрами и s узловыми окружностями. При всевозможных изменениях конфигурации в пределах ограничений (1.3) частоты p_{ns} меняются в интервалах $[p_{ns}^-, p_{ns}^+]$; p_{ns}^-, p_{ns}^+ — минимальное и максимальное значения частоты с рассматриваемой формой колебаний в силу (1.3).

Примем $p_{ns}\in[p_{ns}^-, p_{ns}^+]$. В общем случае существует некоторая совокупность конфигураций, для которых p_{ns} будет собственной частотой для соответствующей формы колебаний. Обозначим символически $p_{ns}\to V$ задачу нахождения конфигурации пластинки, сообщающей минимум функционалу

$$J=\lambda\int_{r_1} rh(r)\,dr \tag{1.4}$$

когда собственная частота p_{ns} фиксирована. Минимизация функционала качества (1.4) для положительных (отрицательных) λ свидетельствует о минимизации (максимизации) объема пластинки.

Как показано в [2], самосопряженность краевой задачи (1.1), (1.2) при формулировке необходимых условий оптимальности на основе принципа максимума приводит к пропорциональности исходных и сопряженных переменных состояния: $\psi_w=kQ$, $\psi_\varphi=-kM$, $\psi_m=k\varphi$, $\psi_q=-kw$, где k — произвольный множитель. В связи с этим гамильтониан может быть представлен в виде (без учета слагаемых, не зависящих явным образом от варьируемого h)

$$H=k\left(\frac{a}{h^3}-bh^3+ch\right)-dh \tag{1.5}$$

$$a=\frac{12(1-\nu^2)M^2}{rE},\quad c=\rho rp_{ns}^2w^2,\quad d=\lambda r$$

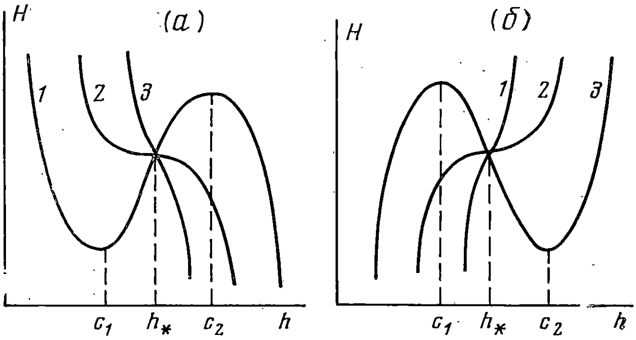
$$b=\frac{E}{12r(1+\nu)}\left[(2+n^2+\nu n^2)\frac{n^2}{r^2}w^2-2(3+\nu)\frac{n^2}{r}w\varphi+(1+\nu+2n^2)\varphi^2\right]$$

Необходимые условия оптимальности для задачи $p_{ns}\to V$ будут представлены краевой задачей (1.1), (1.2), где $h(r)$ выражается через переменные состояния из условия максимума гамильтониана (1.5).

Учитывая, что значение h, максимизирующее гамильтониан, не изменяется при умножении H на произвольное положительное число, можно считать, что параметр k принимает лишь значения $+1$, -1, 0. Далее нетрудно установить, что $b \geqslant 0$. Первая и вторая производные гамильтониана по h (рассматриваемому как параметр) имеют вид

$$H_h' = k\left(-\frac{3a}{h^4} - 3bh^2 + c\right) - d, \quad H_{hh}'' = k\left(\frac{12a}{h^5} - 6bh\right)$$

Положительный корень уравнения $H_{hh}''=0$, $h_* = (2a/b)^{1/6}$, делит полуось $(0, \infty)$ на интервалы $(0, h_*)$, (h_*, ∞): при $k=+1$ на первом из них гамильтониан является выпуклой вниз функцией h ($H_{hh}'' \geqslant 0$), а на втором — выпуклой вверх ($H_{hh}'' \leqslant 0$) (фиг. 1, *а*); при $k=-1$ порядок чередования участков выпуклости вверх и вниз меняется на противоположный



Фиг. 1

(фиг. 1, *б*). Кривые *1* соответствуют $\lambda < \lambda_*$, $2 - \lambda = \lambda_*$, $3 - \lambda > \lambda_*$, где λ_* — характерное значение λ, которое свидетельствует о том, что уравнение $H_h'=0$ имеет один положительный (кратный) корень, совпадающий с точкой перегиба h_*. Подставляя h_* в уравнение $H_h'=0$, определим соответствующее λ_*:

$$\lambda_* = k(c - 9(ab^2/4)^{1/3})/r$$

Для $k=+1$ и $\lambda \geqslant \lambda_*$ функция $H(h)$ монотоно убывает, а для $k=-1$ и $\lambda \leqslant \lambda_*$ $H(h)$ монотонно возрастает. При $k=+1$ и $\lambda < \lambda_*$, а также $k=-1$ и $\lambda > \lambda_*$ функция $H(h)$ имеет две точки локального экстремума c_1 и c_2 (фиг. 1).

Преобразуем уравнение $H_h'(h)=0$ к стандартному виду

$$y^3 + 3Ay + 2B = 0 \tag{1.6}$$

$$A = -\left(\frac{c-kd}{9b}\right)^2, \quad B = -\left(\frac{c-kd}{9b}\right)^3 + \frac{a}{2b}, \quad y = h^2 - \frac{c-kd}{9b}$$

Данное уравнение будет иметь три вещественных корня при условии $A<0$, $B^2 + A^3 \leqslant 0$, что эквивалентно соотношению $\lambda \leqslant \lambda_*$ при $k=+1$ и $\lambda \geqslant \lambda_*$ при $k=-1$. С помощью вспомогательных величин $q = \operatorname{sign}(B)\sqrt{|A|}$, $\gamma = \arccos(|B|/|A|^{3/2})$ корни уравнения (1.6) выражаются следующим образом:

$$y_1 = 2q\cos(\gamma/3), \quad y_2 = 2q\cos(\pi/2 - \gamma/3), \quad y_3 = 2q\cos(\pi/2 + \gamma/3)$$

Из величин $z_i = y_i + (c-kd)/9b$ $(i = \overline{1, 3})$ две, которые обозначим z_*, z_{**} $(z_* \leqslant z_{**})$, положительны. Точки экстремума гамильтониана $c_1 = \sqrt{z_*}$, $c_2 = \sqrt{z_{**}}$.

Окончательно конфигурация, максимизирующая гамильтониан, выражается через переменные состояния формулами: при $k=0$, $h=h_1$, если $\lambda>0$, и $h=h_2$, если $\lambda<0$; при $k=+1$ равенство $h=h_1$ имеет место для любых $\lambda \geqslant \lambda_*$, а в случае $\lambda < \lambda_*$, в зависимости от положения точки экстремума c_2

относительно интервала $[h_1, h_2]$, будем иметь ($h=h_1$, если $c_2<h_1$)

$$h=\begin{cases} h_1, & H(h_1)\geqslant H(c_2) \\ c_2, & H(h_1)<H(c_2)\end{cases} \qquad c_2\in[h_1, h_2]$$

$$h=\begin{cases} h_1, & H(h_1)\geqslant H(h_2) \\ h_2, & H(h_1)<H(h_2)\end{cases} \qquad c_2>h_2$$

при $k=-1$ равенство $h=h_2$ выполняется для $\lambda\leqslant\lambda_*$, а при $\lambda>\lambda_*$ характер конфигурации определяется положением точки c_1 относительно интервала $[h_1, h_2]$ ($h=h_2$, если $c_1>h_2$)

$$h=\begin{cases} c_1, & H(c_1)\geqslant H(h_2) \\ h_2, & H(c_1)<H(h_2)\end{cases} \qquad c_1\in[h_1, h_2]$$

$$h=\begin{cases} h_1, & H(h_1)\geqslant H(h_2) \\ h_2, & H(h_1)<H(h_2)\end{cases} \qquad c_1<h_1$$

2. Обозначим

$$V^{\mp}=2\pi\int_{r_1}^{r_2} rh_{1,2}(r)\,dr$$

Под $V\to p$ (индекс ns у частоты в дальнейшем опущен для сокращения записей) будем понимать задачу нахождения конфигурации пластинки, сообщающей минимальное или максимальное значение собственной частоте p при условии, что значение объема $V\in[V^-, V^+]$ фиксировано.

Решения задач оптимизации $p\to V$ и $V\to p$ в координатах V_p образуют замкнутые кривые S_p и S_v. Такими же рассуждениями, как и в [2], можно показать, что S_p и S_v совпадают и, следовательно, решения данных задач оптимизации на плоскости V_p будут характеризоваться единой замкнутой кривой S. Любая точка на кривой S и соответствующая ей конфигурация могут быть получены как результат решения задачи $p\to V$ на основе приведенных выше необходимых условий оптимальности, так и путем решения задачи $V\to p$.

Таким образом задача $V\to p$ может быть решена на основе необходимых условий оптимальности для задачи $p\to V$ при соответствующих значениях k и λ. Отметим, что в рамках задачи $V\to p$ параметр λ играет роль неопределенного множителя Лагранжа для учета условия постоянства объема; аналогичную функцию относительно собственной частоты в задаче $p\to V$ выполняет параметр k.

Введем обозначения

$$U_1=\frac{1}{2}\int_{r_1}^{r_2} D\left[\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}-\frac{n^2}{r^2}w\right)^2-\right.$$

$$\left.-2(1-\nu)\left\{\frac{d^2w}{dr^2}\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}-\frac{n^2}{r^2}w\right)-\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{n}{r}w\right)\right]^2\right\}\right] r\,dr$$

$$U_2=\frac{1}{2}\int_{r_1}^{r_2}\left[\frac{M^2}{rD}+(1-\nu)\,(2+n^2+\nu n^2)\frac{n^2}{r^3}Dw-\right.$$

$$\left.-2(3+\nu)\,(1-\nu)\frac{n^2}{r^2}Dw\varphi+(1-\nu)\,(1+\nu+2n^2)\frac{D}{r}\varphi^2\right]dr$$

$$T=\frac{1}{2}\int_{r_1}^{r_2}\rho p^2hw^2\,dr, \qquad U_1=U_2$$

Величины U_1, U_2 представляют собой различные формы записи амплитудного значения потенциальной энергии, а T — амплитудное значение кинетической энергии пластинки для рассматриваемой формы колебаний. Для задачи $V \to p$ в гамильтониане (1.5) можно опустить последнее слагаемое, записав условие постоянства объема в исходной форме

$$V=2\pi\int_{r_1}^{r_2} rh\,dr=\mathrm{const} \tag{2.1}$$

Условие максимума гамильтониана для каждого $r\in[r_1, r_2]$ означает, что на оптимальной конфигурации, подчиняющейся условию (2.1), достигает максимального значения функционала $L_0=k(T-U_2+2U_c)$.

Величину

$$U_c=\frac{1}{2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{M^2}{rD}dr$$

можно трактовать как потенциальную энергию стержня с законом изменения момента инерции поперечного сечения $I(r)=D(r)/E$, нагруженного изгибающим моментом $M(r)/r$. Переменные состояния находятся из краевой задачи (1.1), (1.2), которая эквивалентна условию стационарности функционала Остроградского — Гамильтона при исследовании собственных частот и форм колебаний $L=T-U_1$.

Взаимосвязь вариационных задач для функционалов L_0, L осуществляется следующим образом: для заданной $h(r)$ переменные состояния могут быть определены из условия стационарности L; при заданных переменных состояния оптимальная $h(r)$ находится при выполнении (2.1) из условия максимума L_0.

Для подобных задач оптимизации стержней $U_2=U_c$ и оптимальная конфигурация будет обеспечивать максимум (при $k=+1$) или минимум (при $k=-1$) сумме амплитудных значений кинетической и потенциальной энергии стержня для соответствующей формы колебаний [2].

Для задачи $p\to V$ интегральная форма необходимых условий оптимальности состоит в стационарности функционала L, дополненном условием максимума функционала $L_1=L_0+\lambda V$.

Для трехслойных пластин симметричного строения при условии, что толщина обкладок $h(r)$ мала по отношению к общей толщине пластинки, а модуль упругости линейного заполнителя существенно меньше модуля упругости материала обкладок, можно считать $D=\alpha h$ (α — постоянная, зависящая от размеров сечения). В рамках задач оптимизации $p\to V$, $V\to p$, где V — объем материала обкладок с варьируемой в пределах (1.3) толщиной, гамильтониан имеет вид

$$H=k\left[\frac{M^2}{r\alpha h}-(1-\nu^2)\frac{\alpha}{r}h\varphi^2+\rho hp^2rw^2\right]-\lambda rh$$

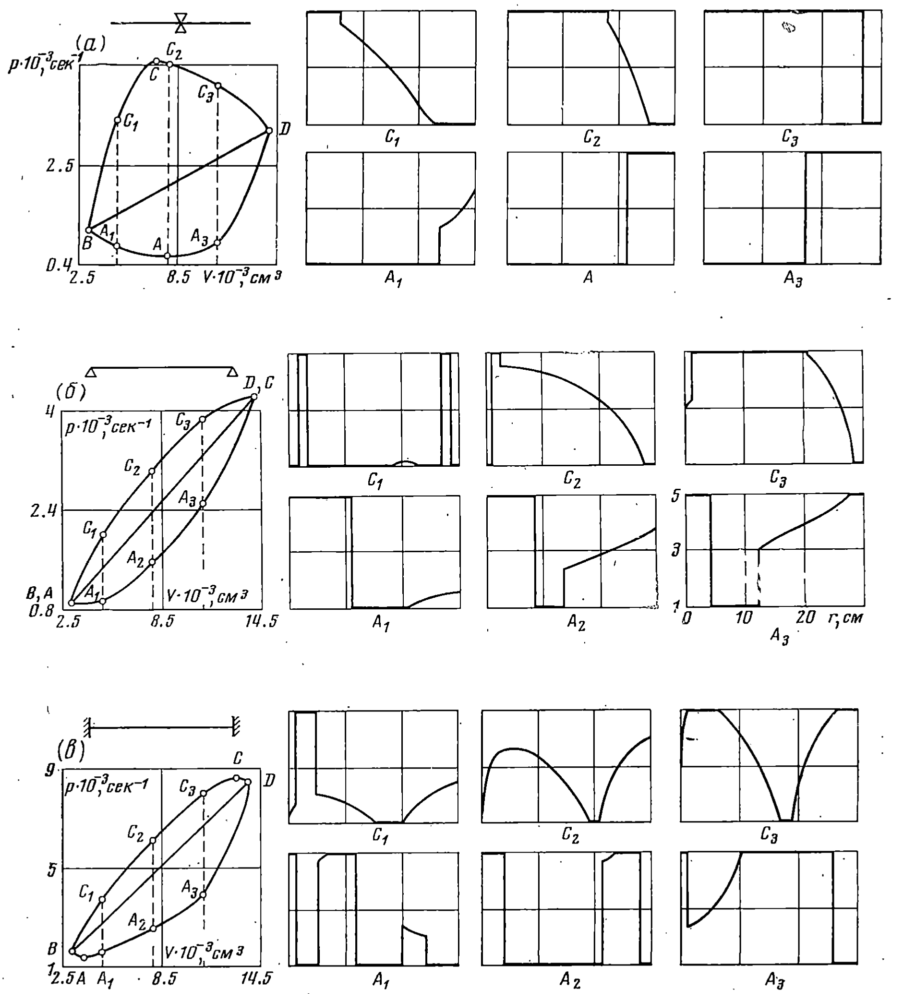
Для сокращения записей здесь рассмотрен вариант $n=0$. Нетрудно установить, что $H(h)$ для $k=-1$ будет выпуклой вверх, а для $k=+1$ — выпуклой вниз функцией, что совпадает с видом гамильтониана для стержней [2]. Учитывая это, можно получить формулы, выражающие оптимальную конфигурацию через переменные состояния: при $k=0$ толщина $h=h_1$, если $\lambda<0$, и $h=h_2$, если $\lambda>0$; при $k=-1$ и $\beta\leqslant 0$ ($\beta=\rho p^2rw^2-(1-\nu^2)\alpha\varphi^2/r+\lambda r$) толщина $h=h_2$, а в случае $\beta>0$ $h=h_2$, если $h_a\geqslant h_2$, $h=h_1$, если $h_a\leqslant h_1$, $h=h_a$ в случае $h_a\in[h_1, h_2]$ ($h_a|M|/(r\alpha\beta)^{1/2}$); при $k=+1$ и $\beta-2\lambda r\leqslant 0$ толщина $h=h_1$, а в случае $\beta-2\lambda r>0$ толщина $h=h_1$, если $h_b\geqslant(h_1h_2)^{1/2}$, и $h=h_2$, если $h_b<(h_1h_2)^{1/2}$ ($h_b=|M|/(r\alpha(\beta-2\lambda r)^{1/2})$.

На участках оптимального закона $h(r)$, попадающего во внутреннюю область ограничений (1.3), имеем

$$\alpha\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right)^2+(1-\nu^2)\frac{\alpha}{r^2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2-\rho p^2w^2=\lambda$$

Данное равенство представляет собой условие постоянства разности амплитудных значений потенциальной и кинетической энергии, приходящихся на единицу объема, и является соотношением Прагера для данной задачи оптимизации [3].

3. Как показано в [2], удобным средством решения задач оптимизации $p \to V$ и $V \to p$ служит метод последовательных приближений по варьируе-



Фиг. 2

мым функциям [4]. Более простыми для численного исследования являются задачи $V \to p$. Это связано с тем, что подбор λ, удовлетворяющего условию постоянства объема, можно проводить в рамках нахождения нового приближения конфигурации из условия максимума гамильтониана; в данном случае эта операция проводится с использованием полученных выше формул. Удовлетворение условия постоянства собственной частоты является гораздо более трудной задачей, и применение метода последовательных приближений при этом основывается на процедуре управления спектром [2], заключающейся в подборе значений k, λ, удовлетворяющих соотношению p=const.

В качестве примера рассмотрим сплошную ($r_1=0$) круглую пластинку радиуса $r_2=30$ *см*. Параметры материала: $E=2\cdot10^6$ *кг/см*^{2}, $\nu=0.3$. Толщина пластинки меняется в пределах от 1 *см* до 5 *см*. На фиг. 2, *а—в* приведены кривые S для трех случаев закрепления и соответствующие конфигурации, полученные решением задач $V\to p$ для первой собственной частоты без узловых диаметров ($n=0$, $s=0$) методом последовательных приближений и его простейшими модификациями, обеспечивающими монотонное изменение по шагам функционала качества [4]. Для нахождения одной точки на кривой S необходимо было решить 10—15 задач нахождения собственных частот и форм колебаний; при этом применялась процедура метода начальных параметров относительно краевой задачи (1.1), (1.2).

В рамках задачи $p\to V$ участок ABC кривых S соответствует пластинкам минимального, а участок CDA – максимального объема; для задачи $V\to p$ участок DAB характеризует минимальные, а участок BCD – максимальные собственные частоты. Прямая BD соответствует пластинкам постоянной толщины.

Сравнивая полученные конфигурации с решением [5], где задача $V\to p$ без ограничений на конфигурацию исследовалась методами классического вариационного исчисления, можно заметить существенные качественные различия. Здесь уместно сделать следующее замечание. С точки зрения принципа максимума решение задачи оптимизации без ограничений на варьируемую функцию $h(r)$ возможно лишь при условии строгой выпуклости вверх гамильтониана $H(h)$. Тогда условие максимума гамильтониана заменяется (если точка экстремума $H(h)$ существует) эквивалентным равенством $H_h'=0$, и принцип максимума переходит в условия оптимальности классического вариационного исчисления [1]. Из уравнения $H_h'=0$ следует выражение для конфигурации, найденное в [5]:

$$h=\left\{[12(1-\nu^2)(p^2\rho w^2+\lambda)]\Big/E\left[\left(\frac{d^2w}{dr^2}\right)^2+\frac{2\nu}{r}\frac{dw}{dr}\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2\right]\right\}^{1/2}$$

После подстановки данного $h(r)$ в (1.1) получается нелинейное дифференциальное уравнение относительно $w(r)$, методика решения которого предложена в [5]. Следует, однако, учитывать, что это уравнение будет иметь по крайней мере два решения, соответствующих точкам экстремума гамильтониана c_1 и c_2.

Отметим также, что для задач $p\to V$, $V\to p$ в случае стержней и трехслойных пластин гамильтониан может быть (для $k=-1$) строго выпуклой вверх функцией, и нахождение некоторых типов оптимальных конфигураций при этом возможно и без ограничений. Вид функции $H(h)$, изображенный на фиг. 1, свидетельствует о невозможности решения задач $p\to V$, $V\to p$ круглой пластинки без ограничений на конфигурацию. В связи с этим результаты [5] следует оценивать критически.

Необходимо отметить, что решения задач оптимизации $p\to V$, $V\to p$ можно искать и в классе непрерывных функций $h(r)$. Для этого, например, достаточно дополнить систему дифференциальных уравнений (1.1) уравнением $dh/dr=u$ и считать варьируемой функцией угол наклона профиля пластинки $u(r)$. Добавляя уравнение $du/dr=v$, можно считать варьируемым, как и в [6], закон изменения кривизны образующей профиля пластинки.

Поступила 12 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.
2. *Гринев В. Б., Филиппов А. П.* Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам. Киев, «Наукова думка», 1975.
3. *Prager W., Taylor J. E.* Problems of structural design. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, vol. 35, No. 3. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1968, т. 35, № 3.)
4. *Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В.* Вариационные задачи механики и управления. М., «Наука», 1973.
5. *Olhoff N.* Optimal design of vibrating circular plates. Internat. J. Solids and Structures, 1970, vol. 6, No. 1.
6. *De Silva B. M. E.* Optimal vibrational modes of a disc. J. Sound and Vibration, 1972, vol. 21, No. 1.