

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМУЩАЮЩИХ МОМЕНТОВ СИЛ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ В ПОДВЕСЕ ПОПЛАВКОВОГО ГИРОСКОПА

О. М. ГОРОДЕЦКИЙ

(Гродно)

Дефекты подшипника и динамическая неуравновешенность ротора являются источником вибраций гироскопа в кардановом подвесе и могут приводить¹ к уходу [1]. В поплавковом гироскопе между корпусом и поплавком (внешним кольцом карданова подвеса и кожухом) помещают вязкую жидкость, для того чтобы разгрузить опоры поплавка и ввести демпфирование в гироскопическую систему. Вибрация поплавка сопровождается движением жидкости. При этом момент, приложенный к поплавку со стороны жидкости, в некоторых случаях может достигать значительной величины и вызывать уход поплавкового гироскопа.

В данной работе определяется скорость ухода поплавкового гироскопа при наличии возмущений внутри поплавка.

1. Рассматривается поплавковый гироскоп с цилиндрическим поплавком. Его конструктивная схема представлена на фиг. 1, где 1 — основание, 2 — корпус, 3 — поплавок, 4 — ротор [2].

Пространство между поплавком и корпусом заполнено вязкой несжимаемой жидкостью. Между опорами поплавка и подшипниками, укрепленными в корпусе, существует некоторый зазор, поэтому в пределах этого зазора поплавок может совершать поступательные перемещения относительно корпуса.

В силу причин, оговоренных ранее, на поплавок со стороны ротора действуют периодические силы. В данной работе рассматривается случай, когда результирующая этих сил параллельна основанию поплавка.

Предполагается, что течение жидкости ламинарное, плоское (траектории всех частиц жидкости параллельны основанию поплавка), изотермическое; конструкция системы абсолютно жесткая; собственный кинетический момент гироскопа постоянен; результирующие сил тяжести, приложенные к поплавку с ротором и корпусу, не создают моментов вокруг осей вращения корпуса и поплавка; внешние возмущающие моменты отсутствуют.

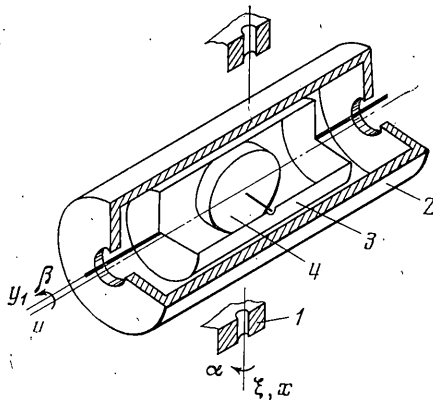
Введем системы координат $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$, $\xi\eta\zeta$, связанные с поплавком, корпусом и основанием соответственно, причем оси ξ , x совпадают с осью вращения корпуса, ось y_1 совпадает с осью вращения поплавка, ось y — с осью симметрии корпуса (фиг. 1). В начальный момент времени соответствующие оси введенных систем координат параллельны между собой.

Положение поплавка определяется углами Эйлера — Крылова α , β — углами поворота вокруг осей ξx , y_1y (фиг. 2) соответственно и координатами центра масс поплавка x_0 , y_0 , z_0 относительно системы координат $x_2y_2z_2$, а положение ротора — координатами его центра масс x_c , y_c , z_c относительно системы координат $x_1y_1z_1$ и углом собственного вращения γ . Наличие внут-

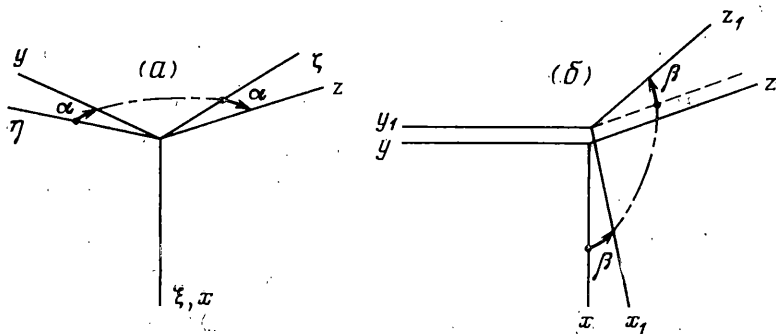
¹ Журавлев В. Ф. Теория вибрации гироскопов. М., Ин-т проблем механики АН СССР, 1972, Препринт № 22.

ренной вибрации гироскопа соответствует тому, что величины x_c, y_c, z_c являются периодическими функциями времени.

В этих предположениях уравнения движения гироскопа [3] и уравнения движения центра масс поплавок с точностью до квадратичных членов



Фиг. 1



Фиг. 2

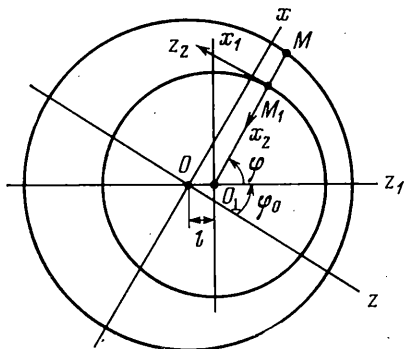
включительно относительно переменных $\alpha, \beta, x_0, z_0, \dot{x}_c, z_c$ и их производных по времени имеют вид

$$\begin{aligned}
 I(0)\alpha'' + H\beta' &= 0, \quad B_0\beta'' - H\alpha' = M_1(x_0 \dot{z}_c - z_0 \dot{x}_c) + M_y - M_2 \dot{z} \\
 Mx_0'' &= F_x - F_1'', \quad Mz_0'' = F_z - F_2'', \quad H = \text{const}, \quad y_0 = 0, \quad y_c = 0 \\
 I(0) &= A_2 + A_1 + A, \quad B_0 = B_1 + A, \quad M_2 = x_c \dot{z}_c + x_0 \dot{z}_c - z_c \dot{x}_c - z_0 \dot{x}_c \\
 F_1 &= M_1(x_c + x_0 + z_c \beta), \quad F_2 = M_1(z_c + z_0 - \beta x_c)
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

Здесь M — масса поплавок, M_1 — масса ротора, H — собственный кинетический момент гироскопа; M_y — проекция момента реакции жидкости на ось y ; F_x, F_z — проекции на оси x, z силы воздействия жидкости на поплавок; A_2 — момент инерции корпуса относительно оси x ; A_1, B_1 — моменты инерции поплавок относительно осей x_1, y_1 соответственно; A — экваториальный момент инерции ротора; точки над величинами $\alpha, \beta, x_0, z_0, x_c, z_c$ означают дифференцирование по времени.

2. Для определения величин M_y, F_x, F_z необходимо решить плоскую гидродинамическую задачу о движении вязкой несжимаемой жидкости

между коаксиальными круговыми цилиндрами, причем внешний цилиндр (корпус) покоится, а внутренний (поплавок) относительно внешнего вращается с угловой скоростью β и движется поступательно. Проекции вектора скорости центра масс внутреннего цилиндра на оси системы координат xuz равны $x_0, 0, z_0$ соответственно.



Фиг. 3

Введем в рассмотрение систему координат $M_1z_2x_2$ в некоторой точке поверхности поплавка M_1 (фиг. 3), ось x_2 которой направлена по радиусу круга — сечения поплавка к точке O_1 , лежащей на оси поплавка, а ось z_2 — по касательной к поверхности поплавка.

В дальнейшем потребуется полярная система координат r, φ с центром в точке O_1 , угол φ отсчитывается от линии центров OO_1 (точка O лежит на оси симметрии корпуса). Угол φ считается положительным, если он отложен против хода часовой стрелки.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности в проекциях на оси системы координат $O_1z_2x_2$ имеют вид

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial z_2} u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} v_2 \right) &= - \frac{\partial p}{\partial z_2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial z_2} u_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} v_2 \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) \\ \frac{\partial u_2}{\partial z_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь u_2, v_2 — компоненты вектора скорости частицы жидкости в системе координат $M_1z_2x_2$, ρ — плотность жидкости, μ — коэффициент вязкости, p — гидродинамическое давление.

Точные решения системы уравнений (2.1) известны лишь для немногих частных случаев.

В данной работе применяется приближенный способ [4].

Пусть R_1, R — радиусы сечений камеры и поплавка; δ — радиальный зазор между камерой и поплавком ($\delta = R_1 - R$); T — период возмущающих сил вибрации ($T = 2\pi/\omega$, где ω — частота вращения ротора). Характерным размером в направлении z_2 является R , в направлении $x_2 - \delta$, характерным масштабом времени — T .

Третье уравнение системы (2.1) показывает, что

$$\max |v_2| / \max |u_2| \sim \delta / R \quad (2.2)$$

С учетом выражения (2.2) можно получить следующие оценки:

$$\begin{aligned} \max \left| \frac{\partial^2 u_2}{\partial z_2^2} \right| / \max \left| \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right| &\sim \delta^2 / R^2 \\ \max \left| \rho \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial z_2} u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} v_2 \right) \right| / \max \left| \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right| &\sim \rho \delta^2 / \mu T \end{aligned}$$

В реальных приборах [2] оказывается, что $\delta/R \sim 0.01$, $Re = \rho \delta^2 / \mu T \sim 0.1$, поэтому, отбрасывая в первых двух уравнениях (2.1) члены, величина ко-

торых относится к величине оставшихся как δ/R , и члены меньшей величины, получим приближенные уравнения Рейнольдса

$$\frac{\partial p}{\partial z_2} = \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \quad (2.3)$$

Пусть линия центров OO_1 образует с осью z угол φ_0 , а длина отрезка OO_1 равна l (фиг. 3). Длина h отрезка MM_1 находится из простых геометрических соображений по формуле

$$h = \delta - l \cos \varphi \quad (2.4)$$

В соотношении (2.4) опущены члены, не превышающие $l\delta/R$. Граничные условия (условия прилипания жидкости к поверхностям цилиндров) имеют вид

$$\begin{aligned} u_2|_{x_2=0} &= \beta R + x_0 \cos(\varphi + \varphi_0) - z_0 \sin(\varphi + \varphi_0), \quad u_2|_{x_2=-h} = 0 \\ v_2|_{x_2=0} &= -x_0 \sin(\varphi + \varphi_0) - z_0 \cos(\varphi + \varphi_0), \quad v_2|_{x_2=-h} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Интегрируя систему уравнений (2.3) с учетом выражений (2.5) и перейдя от координаты z_2 к φ , получаем

$$u_2 = \frac{1}{2\mu R} \frac{dp}{d\varphi} (x_2 + h) x_2 + [\beta R + x_0 \cos(\varphi + \varphi_0) - z_0 \sin(\varphi + \varphi_0)] \frac{x_2 + h}{h} \quad (2.6)$$

Взяв интеграл от обеих частей уравнения неразрывности, записанного в полярных координатах

$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

по r от поверхности поплавка до поверхности корпуса, найдем

$$\frac{\partial Q}{\partial \varphi} = Ru_r|_{r=R} \quad (2.7)$$

Здесь u_r , u_φ — компоненты вектора скорости частицы жидкости в полярной системе координат; Q — расход жидкости, определенный по формуле

$$Q = \int_R^{R+h} u_\varphi dr \quad (2.8)$$

Обращаясь к фиг. 2, заметим, что

$$u_r = -v_2, \quad u_\varphi = u_2, \quad r = R - x_2 \quad (2.9)$$

Подставляя выражение для компоненты u_2 (2.6) в формулу (2.7) с учетом выражений (2.5), (2.9) и интегрируя полученное соотношение по φ , находим распределение давления по поверхности поплавка

$$\frac{dp}{d\varphi} = \frac{6\mu R^2}{h^3} [\beta h + 2x_0 \cos(\varphi + \varphi_0) - 2z_0 \sin(\varphi + \varphi_0) - C_0(t)] \quad (2.10)$$

в котором $C_0(t)$ — неизвестная функция времени, определяемая из условия непрерывности давления по поверхности поплавка

$$p(0) = p(2\pi) \quad (2.11)$$

Сила трения q , действующая на поверхность поплавок со стороны жидкости в точке M , определяется формулой

$$q = -\mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial z_2} \right) \Big|_{x_2=0} \quad (2.12)$$

В силу оценки (2.2)

$$\max \left| \frac{\partial v_2}{\partial z_2} \right| / \max \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right| \sim \frac{\delta^2}{R^2}$$

поэтому, пренебрегая вторым членом в формуле (2.12), учитывая соотношение (2.6), (2.10) и пренебрегая членами, относящимися к оставленным как δ/R , получим

$$q = -\mu R h^{-2} [4\beta^* h + 6x_0^* \cos(\varphi + \varphi_0) - 6z_0^* \sin(\varphi + \varphi_0) - C_0] \quad (2.13)$$

Интегрируя выражение (2.10) по φ в пределах $0 \div 2\pi$ с учетом выражения (2.11), определяем

$$C_0 = 2\delta [\beta^* (\delta^2 - l^2) + 3(x_0^* z_0 - x_0 z_0^*)] (l^2 + 2\delta^2)^{-1} \quad (2.14)$$

Проекция силы воздействия на поплавок со стороны жидкости определяются выражениями

$$F_z = -l_1 \int_0^{2\pi} [p \cos(\varphi + \varphi_0) + q \sin(\varphi + \varphi_0)] R d\varphi \quad (2.15)$$

$$F_x = -l_1 \int_0^{2\pi} [p \sin(\varphi + \varphi_0) - q \cos(\varphi + \varphi_0)] R d\varphi$$

где l_1 — длина поплавок. Интегрируя правые части в равенствах (2.15) по частям и учитывая, что по формулам (2.10), (2.13)

$$\max |q| / \max \left| \frac{dp}{d\varphi} \right| \sim \frac{\delta}{R}$$

отбросим в выражениях (2.15) вторые члены, а затем, используя выражение (2.10), найдем

$$F_z = 6\pi\mu R^3 l_1 (l^2 + 2\delta^2)^{-1} (\delta^2 - l^2)^{-1/2} [-2\beta^* x_0 (\delta^2 - l^2) - 2z_0^* (l^2 + 2\delta^2) + 6x_0 (x_0 z_0^* - x_0^* z_0)] \quad (2.16)$$

$$F_x = 6\pi\mu R^3 l_1 (l^2 + 2\delta^2)^{-1} (\delta^2 - l^2)^{-1/2} [2\beta^* z_0 (\delta^2 - l^2) - 2x_0^* (l^2 + 2\delta^2) - 6z_0 (x_0 z_0^* - x_0^* z_0)] \quad (2.17)$$

При вычислении C_0 , F_x , F_z были использованы следующие интегралы:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h(\varphi)} = 2\pi (\delta^2 - l^2)^{-1/2}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2(\varphi)} = 2\pi\delta (\delta^2 - l^2)^{-3/2}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{h^2(\varphi)} = 2\pi l (\delta^2 - l^2)^{-3/2}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{h^3(\varphi)} = 3\pi\delta l (\delta^2 - l^2)^{-5/2}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^3(\varphi)} = \pi (l^2 + 2\delta^2) (\delta^2 - l^2)^{-5/2}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(\varphi) d\varphi}{h^3(\varphi)} = \pi (\delta^2 - l^2)^{-5/2} (\delta^2 + 2l^2)$$

Интегрированием выражения момента силы трения (2.13) по всей поверхности поплавок получаем величину M_y в виде

$$M_y = \frac{4\pi\mu R^3 l_1}{(l^2 + 2\delta^2) (\delta^2 - l^2)^{5/2}} [\beta (\delta^2 + 2l^2) - 3(x_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{x}_0)] \quad (2.18)$$

3. Подставляя величины F_z , F_x , M_y из выражений (2.16)–(2.18), в которых оставлены лишь линейные и квадратичные члены по переменным β , x_0 , z_0 и их производным по времени, в систему уравнений (1.1), получаем

$$\begin{aligned} I(0)\alpha'' + H\beta' &= 0, \quad B_0\beta'' - H\alpha' = -2a\delta^2\beta' + 6a(x_0 \dot{z}_0 - x_0 z_0 \dot{}) + \\ &\quad + M_1(x_0 \dot{z}_c - z_0 \dot{x}_c) - M_2' \quad (3.1) \\ Mx_0'' &= -12ax_0 \dot{} + 6a\beta' z_0 - F_1'', \quad Mz_0'' = -12az_0 \dot{} - 6a\beta' x_0 - F_2'' \\ a &= \pi\mu R^3 l_1 / \delta^3 \end{aligned}$$

Система уравнений (3.1) является системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка. Для определения ухода гироскопа под действием вибрации ротора применяется метод последовательных приближений. Линеаризуя последние два уравнения (3.1), получаем

$$(M + M_1)x_0'' + 12ax_0 \dot{} + M_1 x_c'' = 0, \quad (M + M_1)z_0'' + 12az_0 \dot{} + M_1 z_c'' = 0 \quad (3.2)$$

Пусть x_c , z_c заданы в виде рядов Фурье периода T

$$x_c = \sum_{h=-\infty}^{\infty} b_h^x e^{ikh\omega t}, \quad z_c = \sum_{h=-\infty}^{\infty} b_h^z e^{ikh\omega t}, \quad b_h^x = \bar{b}_{-h}^x, \quad b_h^z = \bar{b}_{-h}^z \quad (3.3)$$

Тогда уравнения (3.2) имеют решение

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 e^{-\varepsilon t} + C_2 + \sum_{h=1}^{\infty} (d_h^x e^{ikh\omega t} + d_{-h}^x e^{-ikh\omega t}) \\ z_0 &= C_3 e^{-\varepsilon t} + C_4 + \sum_{h=1}^{\infty} (d_h^z e^{ikh\omega t} + d_{-h}^z e^{-ikh\omega t}) \\ \varepsilon &= \frac{12a}{M + M_1}, \quad d_h^s = -\frac{M_1 k \omega b_h^s (\omega k + i\varepsilon)}{(M + M_1) (k^2 \omega^2 + \varepsilon^2)} \quad (s=x, z) \quad (3.4) \end{aligned}$$

где C_1 , C_2 , C_3 , C_4 — произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям для системы уравнений (3.1).

Из первых двух уравнений системы (3.1) следует, что средние скорости $\langle \beta \rangle$, $\langle \alpha \rangle$ определяются выражениями

$$\langle \beta \rangle = 0, \quad \langle \alpha \rangle = \frac{1}{HT} \int_0^T [6a(x_0 \dot{z}_0 - x_0 z_0 \dot{}) + M_1(z_0 \dot{x}_c - x_0 \dot{z}_c)] dt \quad (3.5)$$

Здесь предполагается, что нутационная частота и частота вибрации не совпадают.

Формула ухода гироскопа по углу α (3.5) с учетом проинтегрированных по времени соотношений (3.2) преобразуется к виду

$$\langle \alpha \rangle = \frac{6a}{HT} \int_0^T (z_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{z}_0) dt \quad (3.6)$$

Оставляя в выражениях (3.4) только периодические слагаемые (для достаточно большого интервала времени вклад отброшенных слагаемых в уход $\langle \alpha \rangle$ становится незначительным), находим по формуле (3.6)

$$\langle \alpha \rangle = \frac{12ia\omega}{H} \sum_{k=1}^{\infty} k [d_k^x d_{-k}^z - d_k^z d_{-k}^x] \quad (3.7)$$

В случае круговой вибрации

$$\begin{aligned} x_c &= -1/2 bi e^{i\omega t} + 1/2 bi e^{-i\omega t} + b_0, \quad z_c = 1/2 b e^{i\omega t} + 1/2 b e^{-i\omega t} + b_1 \\ d_{\pm 1}^x &= \frac{M_1 \omega b (\mp \omega - \varepsilon i)}{2(M+M_1)(\omega^2 + \varepsilon^2) i}, \quad d_{\pm 1}^z = \frac{M_1 \omega b (-\omega \mp \varepsilon i)}{2(M+M_1)(\omega^2 + \varepsilon^2)} \\ \langle \alpha \rangle &= 6M_1^2 \omega^2 a b^2 [(M+M_1)^{-2} H (\omega^2 + \varepsilon^2)]^{-1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Формула (3.7) показывает, что уход может быть равен нулю, если составляющие вибрации по разным осям состоят из гармоник с разными частотами.

Если в интеграле выражения (3.6) перейти от параметрической записи $x_0 = x_0(t)$, $z_0 = z_0(t)$ к декартовым координатам $x_0 = x_0(z_0)$, то получим криволинейный интеграл

$$J = \int_{\Gamma} z_0 dx_0 - x_0 dz_0 \quad (3.9)$$

Выражение (3.9) показывает, что интеграл в соотношении (3.6) равен удвоенной площади поверхности, ограниченной траекторией Γ точки O_1 . Эта площадь берется положительной, если обход совершается против хода часовой стрелки, и отрицательной — в противном случае. Если контур Γ имеет самопересечения, то его надо разбить на простые контуры и взять алгебраическую сумму из площадей поверхностей, охваченных этими контурами, со знаками, которые выбираются в зависимости от обходов этих контуров, как указывалось ранее.

4. *Пример.* Пусть точка O_1 оси поплавка описывает окружность радиуса 0.03 мм. Воспользуемся параметрами, указанными в работе [2]: $H=10$ Г·см·сек, $\mu=6.5$ г/см·сек, $\omega=800$ рад/сек, $R=1$ см, $\delta=0.25$ мм, $l_1=3$ см.

По формуле (3.7) находим $\langle \alpha \rangle \approx 3.5$ град/час, в то время как для данного класса приборов допустимы лишь уходы, не превышающие 10 град/час. В конкретном приборе траектория точки O_1 , конечно, отличается от круговой, тем не менее, приведенный пример указывает на необходимость учитывать рассмотренное явление в практике конструирования поплавковых гироскопов.

Автор благодарит Д. М. Климова и В. Ф. Журавлева за постановку задачи и обсуждение работы.

Поступила 25 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Журавлев В. Ф. О движении свободного гироскопа при наличии внутренних возмущений. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 5.
2. Сломьянский Г. А., Прядилов Ю. Н. Поплавковые гироскопы и их применение. М.: Оборонгиз, 1958.
3. Ишлинский А. Ю. Теория гироскопов. (Курс лекций). Изд-во МГУ, 1974.
4. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат, 1955.