



Границы между областями применимости каждого из уравнений (1.1) определяются условиями

$$\frac{M}{M_0} + \frac{P}{P_0} - 1 = 0 \quad (\text{II-I}), \quad \frac{M}{M_0} - \frac{P}{P_0} + 1 = 0 \quad (\text{II-III})$$

$$\frac{M}{M_0} - \frac{P}{P_0} - 1 = 0 \quad (\text{II-IV}) \quad (1.2)$$

Римские цифры после уравнений (1.1), означающие номер фазы изгиба, соответствуют номерам областей в координатах безразмерных параметров  $M/M_0$  и  $P/P_0$ , где реализуется каждая из фаз (фиг. 1).

Равенства (1.1) и (1.2) справедливы, если изгиб стержня не сопровождается разгрузкой. Поскольку рассматриваемая задача не относится к этой категории, некоторые из них нуждаются в корректировке. Ограничиваясь рассмотрением изгиба прямолинейных стержней осевой сжимающей силой, естественно ожидать, что пока сила не достигнет некоторой конечной величины, боковое перемещение стержня отсутствует. Если ориентироваться на это представление, то в зависимости от истории нагружения может быть реализовано восемь принципиально различных вариантов состояния стержня, помеченных цифрами 1—8 на фиг. 1. Сплошными тонкими линиями показаны соответствующие истории нагружения.

Переход стержня в состояния, помеченные цифрами 1—6, не сопровождается разгрузкой: ни в одном из этих случаев не возникает ситуации, чтобы напряжения в элементе профиля превысили предел текучести и затем стали уменьшаться.

Что касается оставшихся состояний 7 и 8, то здесь картина обратная: если в первые моменты изгиба пластические деформации в обеих полках одного знака, то затем по мере роста прогиба напряжения в одной из полок начинают уменьшаться, и полка переходит в упругую стадию работы (состояние 7). В дальнейшем напряжения в этой полке меняют знак, достигают предела текучести противоположного знака, и в полке развиваются вторичные пластические деформации (состояние 8).

Произведя выкладки, подобные тем, что были выполнены при выводе уравнений (1.1), получим зависимость, определяющую поведение элемента стержня в седьмом состоянии

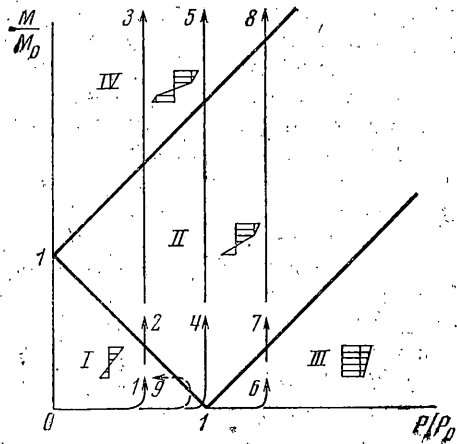
$$\frac{EJ\kappa}{M_0} = \frac{n+1}{2} \frac{M}{M_0} - \frac{n-1}{2} \left( \frac{\sigma_*}{\sigma_0} - \frac{P}{P_0} \right) \quad (\text{II}^*)$$

Уравнение границы между областями  $\text{II}^*$  и III преобразуется к виду

$$M/M_0 - P/P_0 + \sigma_*/\sigma_0 = 0 \quad (\text{II}^* - \text{III}) \quad (1.3)$$

Здесь  $\sigma_*$  — напряжение в разгружающейся полке к началу разгрузки. В дальнейшем все величины, связанные с разгрузкой, помечаются звездочкой в нижнем индексе.

Для вывода уравнений изгиба стержня в состоянии 8 необходимо конкретизировать закон, определяющий величину предела текучести материала



Фиг. 1

ла, испытавшего первоначальное нагружение противоположного знака. Рассмотрим простейший случай идеального эффекта Баушингера: будем предполагать, что сумма абсолютных величин предела текучести на растяжение и сжатие есть постоянная величина, равная удвоенному начальному пределу текучести  $|\sigma_0^+| + |\sigma_0^-| = 2\sigma_0$ . Если, опираясь на это равенство, повторить выкладки, выполненные в процессе вывода уравнений равновесия элемента, получим выражение, тождественно совпадающее с аналогичным выражением при активном нагружении. Уравнение же, определяющее границу между областями II\* и IV, принимает вид

$$M/M_0 - P/P_0 - 2 + \sigma_*/\sigma_0 = 0 \quad (\text{II}^* - \text{IV})$$

2. Приступим непосредственно к решению задачи. Будем трактовать свободно опертый стержень как совокупность двух абсолютно жестких элементов, соединенных отрезком стержня идеального профиля. Длину отрезка  $2\Delta$  считаем малой по сравнению с общей длиной стержня  $2l$ . Уравнения, описывающие поведение такого стержня, получим из приведенных выше уравнений изгиба путем замены в них кривизны  $\kappa$  на  $y/(\Delta)$  и изгибающего момента  $M$  произведением  $Py$ .

Выполнив несложные выкладки, получим зависимости, связывающие величину сжимающей силы с прогибом  $y$  стержня для первых шести состояний (см. ниже первые шесть формул (2.1)).

Для рассмотрения состояния 7 определим величину напряжений в разгружающейся полке в момент начала разгрузки ( $\sigma_*$ ). Обратимся к условию на границе (1.3). Заменяв в нем  $M$  на  $Py$ , получим  $\sigma_*/\sigma_0 = (P/P_0)(1-Y)$  или, используя шестое из уравнений (2.1),  $\sigma_*/\sigma_0 = (P_e/P_0)(1-Y)/n$ .

Здесь и в дальнейшем  $P_e = EJ/(\Delta)$  — эйлерова сила стержня,  $Y = (P_0/M_0)y$  — базразмерный прогиб.

Из последнего выражения видно, что величина  $\sigma_*$  максимальна при прогибе, равном нулю. Как только стержень отклоняется от прямолинейного положения, напряжение  $\sigma_*$  падает. Следовательно, разгрузка сечения начинается в момент начала выпучивания и  $\sigma_*F/P_e = 1/n$ . После определения величины  $\sigma_*$  решение для состояний 7 и 8 строится точно так же, как и для первых шести.

Приведем зависимости, связывающие величину силы с прогибом для всех восьми состояний стержня (в скобках даны условия, при соблюдении которых реализуется данный конкретный случай)

$$\frac{P}{P_e} = 1 \quad (\eta \geq 1, 0 \leq Y \leq \eta - 1) \quad (2.1)$$

$$\frac{P}{P_e} = \frac{2Y + (n-1)\eta}{n-1 + (n+1)Y} \quad (\eta \geq 1, \eta - 1 \leq Y \leq \alpha)$$

$$\frac{P}{P_e} = \frac{1}{n} + \frac{(n-1)\eta}{nY} \quad (\eta \geq 1, \alpha \leq Y)$$

$$\frac{P}{P_e} = \frac{2Y + (n-1)\eta}{n-1 + (n+1)Y} \quad \left( \frac{1}{n} \leq \eta \leq 1, 0 \leq Y \leq \alpha \right)$$

$$\frac{P}{P_e} = \frac{1}{n} + \frac{(n-1)\eta}{nY} \quad \left( \frac{1}{n} \leq \eta \leq 1, \alpha \leq Y \right)$$

$$\frac{P}{P_e} = \frac{1}{n} \quad \left( \eta \leq \frac{1}{n}, Y = 0 \right)$$

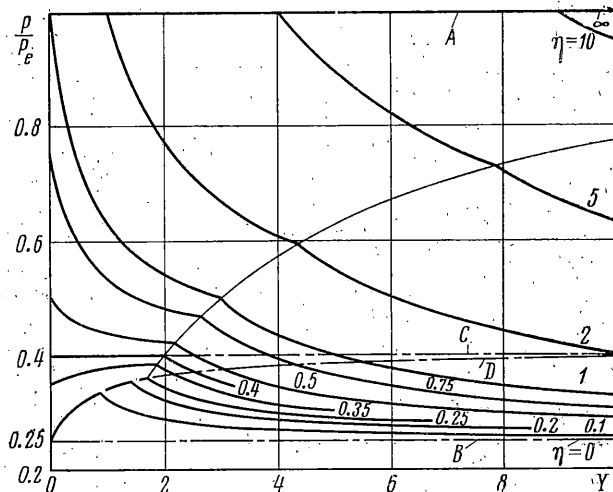
$$\frac{P}{P_e} = \frac{2Y+1-1/n}{n-1+(n+1)Y} \quad \left( \eta \leq \frac{1}{n}, 0 \leq Y \leq \beta \right)$$

$$\frac{P}{P_e} = \frac{1}{n} + \frac{(n-1)\eta}{nY} \quad \left( \eta \leq \frac{1}{n}, \beta \leq Y \right)$$

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — корни уравнений

$$\alpha^2 - (\eta+1)\alpha - (n-1)\eta = 0, \quad \beta^2 - (n+1)\beta - (n-1)\eta = 0$$

В приведенных выражениях введено новое обозначение  $\eta = P_0 / P_e$ , именуемое в дальнейшем параметром гибкости. Как легко видеть, эта величина связана с общепринятым понятием гибкости  $\lambda = l\sqrt{F/J}$  тождеством  $\eta =$



Фиг. 2

$= (\gamma\sigma_0/E)\lambda^2$ , где  $\gamma$  — коэффициент, зависящий от конструкции стержня. В рассматриваемом случае свободно опертого стержня  $\gamma = \Delta/l$ , для жестко заделанного  $\gamma = 0,5 \Delta/l$ , для консоли  $\gamma = 2 \Delta/l$ .

По сравнению с общепринятым понятием гибкости введенный параметр более емкий и позволяет распространить результаты решения для свободно опертого стержня на другие случаи заделки: формулы (2.1) являются универсальными.

Дадим характеристику некоторых состояний: 1 — решение Эйлера задачи устойчивости упругого стержня; 4 — возможность подобного поведения стержня предугадывалась различными авторами [3, 4]; в частном случае стержня, для которого  $\eta = 2/(n+1)$ , это состояние дает решение Кармана; 6 дает единственную точку, являющуюся начальной точкой седьмого состояния; 7 — решение Ф. Шенли [1]; 8 впервые было исследовано Я. Г. Пановко [5]; в частном случае стержня, для которого  $\eta = 0$ , это состояние дает решение Энгессера.

3. Для частного случая  $n=4$  результаты решения представлены на фиг. 2 в виде кривых нагрузка — прогиб стержней с различной гибкостью  $\eta$ . Здесь же изображены результаты известных решений:

Линия А — решение Эйлера (упругий стержень)  $P/P_e = 1$ .

Линия В — решение Энгессера (упругопластический стержень, касательно-модульная теория)  $P/P_e = 1/n$ .

Линия  $C$  — решение Кармана (упругопластический стержень, приведенно-модульная теория)  $P/P_0 = 2/(n+1)$ .

Линия  $D$  — решение Шенли  $P/P_0 = (2Y+1-1/n)/[n-1+(n+1)Y]$ .

Кривые на фиг. 2 заполняют всю область между линиями, определяющими устойчивость упругого и упругопластического стержня по касательно-модульной теории. При этом, если параметр гибкости  $\eta$  равен нулю, то стержень теряет устойчивость по Энгессеру — критическая сила стержня равна касательно-модульной. Этот крайний случай достаточно очевиден. В самом деле, если предел текучести материала равен нулю, стержень ведет себя как упругий с модулем упругости, равным модулю упрочнения.

При малом параметре гибкости ( $0 \leq \eta \leq 1/n$ ) стержень также начинает выпучиваться при касательно-модульной сжимающей силе, однако дальнейшее его поведение описывается кривой Шенли и — после появления вторичных пластических деформаций — кривой Пановко.

Если касательно-модульная сила меньше нагрузки, соответствующей пределу текучести, а эйлерова сила превышает эту нагрузку  $1/n \leq \eta \leq 1$ , стержень начинает выпучиваться в момент, когда сжимающая сила достигнет величины, соответствующей пределу текучести. Если при этом соблюдается условие  $\eta < 2/(n+1)$ , то рост прогиба после начала выпучивания происходит вместе с ростом сжимающей силы. Если же  $\eta > 2/(n+1)$ , то рост прогиба сопровождается уменьшением силы: возникает хлопок. В пограничном варианте при  $\eta = 2/(n+1)$  реализуется потеря устойчивости по Карману.

Наконец, при  $\eta > 1$  происходит потеря устойчивости по Эйлеру, что совершенно очевидно.

Во всех случаях после появления вторичных пластических деформаций кривые надламываются и идут вниз — рост прогиба происходит с уменьшением сжимающей силы. Если же выполняется условие  $\eta > 2/(n+1)$ , то кривые идут вниз сразу после появления первых пластических деформаций.

Важно отметить, что если исследовать поведение несовершенного стержня (например с начальной погибью) и построить кривые нагрузка — прогиб, то кривые на фиг. 2 будут предельными по отношению к соответствующим кривым стержня с погибью. Как можно видеть, высказанное положение распространяется и на кривые Энгессера и Кармана. Встречающееся в литературе соображение о том, что кривые Энгессера и Кармана не обладают этим свойством, представляется необоснованным. Кривая Энгессера является предельной для жестких стержней, кривая Кармана — для стержней, у которых  $\eta = 2/(n+1)$ . Естественно, что кривая Кармана является предельной только до момента появления в стержне вторичных пластических деформаций.

Если поднять начальный предел текучести материала стержня, теряющего устойчивость по Шенли, что можно сделать, например, воспрепятствовав искривлению сжатого стержня, а затем разгрузить его, то при повторном нагружении поведение стержня не будет описываться кривой Шенли. На смену ей приходит одна из лежащих выше кривых в зависимости от того, до какого значения сжимающей силы была ограничена возможность выпучивания. Как можно видеть, все кривые, лежащие выше кривой Шенли, имеют на начальном участке меньший по сравнению с кривой Шенли наклон, кривые же, лежащие выше приведенно-модульной линии, наклонены даже в обратную сторону. Отсюда следует, что предварительное обжатие, задерживая начало выпучивания стержня, одновременно приводит к тому, что рост прогиба стержня происходит более интенсивно.

4. Приведенное выше решение относилось к предельно схематизированной модели стержня. Ниже предпринята попытка получить решение, свободное от этой предпосылки.

Как и прежде, рассмотрим свободно опертый стержень. Дифференциальные уравнения изгиба получим из приведенных выше уравнений равновесия путем замены в них кривизны  $\kappa$  на вторую производную изогнутой оси —  $y''$  и изгибающего момента  $M$  на  $Py$ . Воспроизведем дифференциальные уравнения изгиба

$$l^2 Y'' + k_1^2 Y = 0 \quad (\text{I}) \quad (4.1)$$

$$l^2 Y'' + k_2^2 Y = - \left( 1 - \frac{P_0}{P} \right) \frac{n-1}{n+1} k_2^2 \quad (\text{II})$$

$$l^2 Y'' + k_2^2 Y = - \left( 1 - \frac{\sigma_* P_0}{\sigma_0 P} \right) \frac{n-1}{n+1} k_2^2 \quad (\text{II}_*)$$

$$l^2 Y'' + k_3^2 Y = 0 \quad (\text{III})$$

$$l^2 Y'' + k_3^2 Y = \frac{P_0}{P} \frac{n-1}{n} k_3^2 \quad (\text{IV})$$

$$k_1^2 = (\pi/2)^2 P/P_e, \quad k_2^2 = 0.5(n+1)k_1^2, \quad k_3^2 = nk_1^2, \quad P_e = (\pi/2)^2 EJ/l^2$$

Границы между областями применимости уравнений (4.1) определяются условиями

$$\begin{aligned} Y+1 - \frac{P_0}{P} = 0 \quad (\text{II-I}), & \quad Y-1 - \frac{\sigma_* P_0}{\sigma_0 P} = 0 \quad (\text{II}_*-\text{III}) \\ Y-1 - \frac{P_0}{P} = 0 \quad (\text{II-IV}), & \quad Y-1 - \left( 2 - \frac{\sigma_*}{\sigma_0} \right) \frac{P_0}{P} = 0 \quad (\text{II}_*-\text{IV}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

По сравнению с предыдущей данная задача характеризуется большим разнообразием возможных схем работы конструкции. Напомним, что в задаче изгиба схематизированного стержня поведение конструкции определялось поведением короткого упругопластического звена, соединяющего два жестких элемента. В рассматриваемой же задаче отдельные участки стержня могут находиться в различных состояниях. История нагружения разных участков также различна. Более того, выявляется новая история нагружения, отсутствовавшая у схематизированной модели.

После того как установлена схема работы стержня, решение задачи сводится к интегрированию уравнений (4.1), подчинению результата условиям неразрывности прогиба и угла наклона на границе между участками, условиям на границе (4.2) и граничным условиям, которые вследствие симметрии конструкции можно записать так:  $y'(0) = 0, y(l) = 0$ .

Рассмотрение первых схем работы не вызывает принципиальных затруднений. Приведем окончательные результаты.

*Первая схема работы* (фиг. 3, а). Изгиб стержня происходит при постоянном значении сжимающей силы  $P/P_e = 1$ . Изогнутая ось определяется формулой  $Y = A \cos k_1 \xi$ . Здесь и в дальнейшем  $\xi = x/l$  — безразмерная координата. Условие окончания первой схемы работы и начала второй (момент появления первых пластических деформаций)  $Y = \eta - 1$ .

*Вторая схема работы* (фиг. 3, б). Изогнутая ось

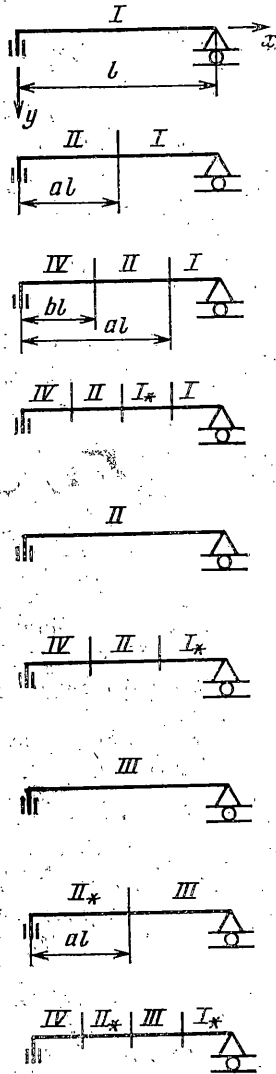
$$Y = \frac{P_0/P - 1}{n+1} \left( n-1 + 2 \frac{\cos k_2 \xi}{\cos k_2 a} \right) \quad (0 \leq \xi \leq a)$$

$$Y = \left( \frac{P_0}{P} - 1 \right) \frac{\sin k_1(1-\xi)}{\sin k_1(1-a)} \quad (a \leq \xi \leq 1)$$

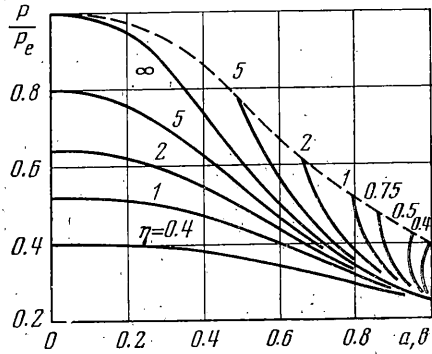
Координата границы между участками  $a$  определяется из условия

$$\operatorname{tg} k_1(1-a) \operatorname{tg} k_2 a = \sqrt{(n+1)/2}$$

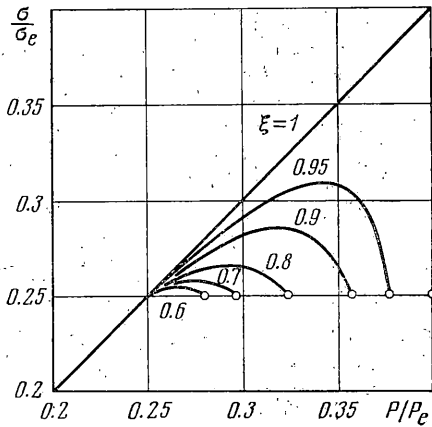
Результаты решения последнего уравнения для случая  $n=4$  показаны пунктиром на фиг. 4.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Условие окончания второй схемы работы (появление пластических деформаций во второй полке посредине пролета)  $Y = P_0/P + 1$ .

Третья схема работы (фиг. 3, в). Изогнутая ось

$$Y = \frac{n-1}{n} \frac{P_0}{P} + \frac{P_0/P + n}{n} \frac{\cos k_3 \xi}{\cos k_3 b} \quad (0 \leq \xi \leq b)$$

$$Y = \frac{P_0/P-1}{n+1} \left[ n-1+2 \frac{\sin k_2(\xi-b)}{\sin k_2(a-b)} \right] + 2 \frac{n+P_0/P}{n+1} \frac{\sin k_2(a-\xi)}{\sin k_2(a-b)} \quad (b \leq \xi \leq a)$$

$$Y = \left( \frac{P_0}{P} - 1 \right) \frac{\sin k_1(1-\xi)}{\sin k_1(1-a)} \quad (a \leq \xi \leq 1)$$

Величины  $a$  и  $b$  определяются из уравнений

$$\left[ \operatorname{tg} k_1(1-a) + \sqrt{\frac{n+1}{2}} \operatorname{tg} k_2(a-b) \right] \operatorname{tg} k_3 b + \sqrt{\frac{2n}{n+1}} \operatorname{tg} k_1(1-a) \operatorname{tg} k_2(a-b) = \sqrt{n}$$

$$\left[ \frac{P_0/P+n}{P_0/P-1} - \cos k_2(a-b) \right] \operatorname{tg} k_1(1-a) = \sqrt{\frac{n+1}{2}} \sin k_2(a-b)$$

Для случая  $n=4$  результаты решения последней системы представлены сплошными линиями на фиг. 4 (кривые, расположенные выше линии  $\eta = P_0/P_e = \infty$ , дают значение  $a$ , ниже —  $b$ ). Обратим внимание на характер кривых  $a$  при малых значениях параметра гибкости  $\eta$  (0.4—0.5). По мере изменения сжимающей силы  $P$  координата  $a$  первоначально растет, затем уменьшается, потом вновь увеличивается. Это соответствует тому, что сечения стержня в районе опор, которые в момент начала изгиба работали в первой упругой фазе, а затем перешли во вторую упругопластическую фазу, начиная с некоторого значения силы, вновь переходят в упругую фазу изгиба. Решение подсказывает, что на конечном участке нагружения в районе опор стержня реализуется разгрузка. Таким образом, полученные результаты не оправдываются в диапазоне малых  $\eta$ . Для полного решения задачи необходимо исследовать дополнительную схему работы, являющуюся продолжением рассмотренной и отличающуюся от нее наличием участка, располагающегося между упругим и упругопластическим участками и работающим в стадии разгрузки (фиг. 3, з). История нагружения сечения, обусловившая появление дополнительной девятой схемы работы стержня, показана пунктиром на фиг. 1.

*Четвертая схема работы* (фиг. 3, д). Эта схема работы дает единственную пограничную кривую. Изгиб стержня происходит при постоянном значении силы  $P/P_e = 2/(n+1)$ . Изогнутая ось стержня  $Y = A \cos k_2 \xi$ , при этом  $0 \leq A \leq 2$ .

Четвертая схема работы оканчивается в момент появления посредине пролета пластических деформаций во второй полке.

*Пятая схема работы* (фиг. 3, е). Посредине пролета развивается участок, находящийся в стадии пластического изгиба. Выпучивание стержня происходит при уменьшающейся величине силы, поэтому одновременно с появлением пластического участка в пролете, в районе опорных сечений, где роль изгибной составляющей сравнительно невелика, появляется участок, находящийся в стадии разгрузки.

*Шестая схема работы* (фиг. 3, ж). Изгиб стержня происходит при постоянной величине силы, определяемой условием  $P/P_e = \eta$ . При этом  $\eta < 2/(n+1)$ . Изогнутая ось  $Y = A \cos k_2 \xi$ . Условие окончания (момент начала разгрузки)  $Y = 0$ .

Таким образом, шестая схема работы вырождается в единственную точку, определяющую момент начала выпучивания стержня.

*Седьмая схема работы* (фиг. 3, з). Участки, примыкающие к опорам, находятся в третьей пластической фазе, в пролете же реализуется вторая упругопластическая фаза. В процессе изгиба граница между участками перемещается в сторону опор: упругопластический участок находится в состоянии разгрузки.



Рассматриваемая схема работы отражает поведение стержня, теряющего устойчивость по Шенли. Математически строгая постановка этой задачи дана в работах [6, 7]. Вошедшее в литературу [3] решение А. Пфлюгера [8] не вполне корректно и приводит к противоречивому результату. Покажем это.

Составим, используя [8], выражение для напряжения с выпуклой стороны стержня для участка в стадии активного нагружения

$$\frac{\sigma}{\sigma_e} = \frac{P}{P_e} - \left( \frac{P}{P_e} - 1 \right) \frac{\sin k_3(1-\xi)}{\sin k_3(1-a)} \quad (a \leq \xi \leq 1) \quad (4.3)$$

Здесь величина  $a$  подлежит определению из условия

$$\operatorname{tg} k_2 a \operatorname{tg} k_3(1-a) = \sqrt{0.5(n+1)/n}$$

Анализируя выражение (4.3), можно видеть, что напряжение в любом фиксированном сечении  $\xi$  по мере роста сжимающей силы  $P$  сначала растет, а затем падает. На фиг. 5 построены кривые, связывающие напряжения на выпуклой стороне в отдельных сечениях по длине стержня с величиной сжимающей силы (принято  $n=4$ ). Светлые точки на кривых обозначают момент выполнения условия  $\xi=a$ , т. е. момент начала разгрузки. Из фигуры видно, что участок стержня, который считался в стадии активного нагружения, частично работает в стадии разгрузки, что свидетельствует о недостоверности решения.

*Восьмая схема работы* (фиг. 3, *в*). С первого взгляда может показаться, что восьмая схема работы отличается от седьмой схемы лишь наличием в пролете пластического участка. Однако решение для схематизированной модели стержня показывает, что прогиб стержня при этом растет с уменьшением величины силы. Следовательно, в районе опорных сечений, где роль изгибной составляющей невелика, происходит разгрузка, и участки, примыкающие к опорам, которые раньше были в пластической фазе, работают теперь как упругие стержни, обладающие начальной кривизной.

Эта задача рассматривалась И. С. Малютиным [9]. К сожалению, автор не обратил внимание на отмеченное обстоятельство и для анализа поведения упругих участков в стадии разгрузки использовал уравнение, относящееся к случаю активного нагружения пластического участка, что, естественно, недопустимо.

Для частного случая  $n=4$  зависимость нагрузка — прогиб представлена в таблице. Для каждого значения параметра гибкости  $\eta$  в первом столбце даются результаты точного решения, во втором — результаты расчетов по формулам (2.1). Как можно видеть, расхождение в величинах прогиба, найденного обоими методами, лежит в пределах 0—22%. При этом решение для схематизированной модели во всех случаях занижает величину прогиба, т. е. приводит к опасной ошибке.

5. Результаты исследований показали, что поведение упругопластического стержня при действии осевого сжатия в зависимости от гибкости стержня может описываться по крайней мере девятью различными схемами.

Принято считать, что гибкие стержни теряют устойчивость по Эйлеру, жесткие — по Шенли. Концепции же Энгессера и Кармана полагают устаревшими и обычно противопоставляют одну другой [3, 4, 10]. Приведенные выше результаты позволяют заключить, что такой взгляд не вполне оправдан.

Действительно, теории Эйлера и Шенли описывают поведение широкого круга стержней при потере устойчивости. Однако нельзя утверждать, что сжатый стержень обязательно теряет устойчивость либо по Эйлеру, либо

по Шенли. Если гибкость стержня весьма мала, происходит потеря устойчивости по Энгессеру. Стержень же, характеристики которого таковы, что выполняется условие  $P_0/P_e = 2/(n+1)$ , теряет устойчивость по Карману. Кроме того, существует еще несколько схем потери устойчивости, рассмотренных выше.

$P/P_e$	$\eta=0.75$	$\eta=1$	$\eta=2$	$\eta=5$	$\eta=10$
0.25	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
0.30	14.30	11.50	19.09	15.00	38.23
0.35	7.04	5.75	9.44	7.50	18.98
0.40	4.54	3.75	6.16	5.00	12.50
0.45	3.21	2.88	4.47	3.75	9.22
0.50	1.90	1.50	3.38	3.00	7.22
0.55	1.00	0.80	2.26	1.80	5.87
0.60	0.56	0.45	1.49	1.20	4.86
0.65	0.29	0.24	1.03	0.84	3.97
0.70	0.12	0.10	0.72	0.60	3.13
0.75	0	0	0.51	0.43	2.54
0.80			0.35	0.30	2.09
0.85			0.23	0.20	1.74
0.90			0.13	0.12	1.46
0.95			0.06	0.05	1.22
1.00			0	0	1.00

Разумеется, следует иметь в виду, что все результаты были получены при относительно грубых предположениях (идеальный профиль, линейно-упругий материал). Поэтому с количественной стороны решение нуждается в проверке, однако качественный характер поведения стержня при потере устойчивости решение, видимо, отражает правильно.

Поступила 25 VI 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Shanley F. R. Inelastic column theory. J. Aeronaut. Sci., 1947, vol. 14, No. 5. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1952, № 2.)
2. Дикович И. Л. Статика упругопластических балок судовых конструкций. Л., «Судостроение», 1967.
3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.
4. Кайдалов Н. Н. Качественная теория неупругой устойчивости элементов судового корпуса. Л., «Судостроение», 1972.
5. Пановко Я. Г. О критической силе сжатого стержня в неупругой области. Инж. сб., 1954, т. 20.
6. Cicala P. Colum buckling in elastoplastic range. J. Aeronaut. Sci., 1950, vol. 7, No: 8. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1957, № 4.)
7. Müllersdorf U. Zur Theorie der plastischen Knickung. Bauingenieur, 1952, Bd 27, H. 2.
8. Pfüger A. Zur plastischen Knickung gerade Stäbe. Ingr-Arch., 1952, Bd 20, H. 5.
9. Малютин И. С. К продольному изгибу стержня за пределом пропорциональности. Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 12.
10. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М., «Наука», 1967.