

## ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИСКА ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Ц. А. ГОТЛИВ

(Ленинград)

Термоупругое равновесие пластины переменной толщины с плоским основанием рассматривалось при исследовании деформаций оптического зеркала. Полученные уравнения применимы также для расчета рабочих колес энергетических машин, позволяя избежать принципиальных трудностей при наличии трехмерного температурного поля и при исследовании переходных процессов.

Рассматривается осесимметричная температурная задача для диска переменной толщины с плоским основанием и гиперболической верхней поверхностью. Торцы диска полагаются свободными.

Использовано решение для ненагруженного неравномерно нагретого слоя [1]. Условия на верхней поверхности диска удовлетворяются при решении краевой задачи для плиты переменной толщины с помощью уравнений, полученных символическим методом [2].

В первом приближении эти уравнения для диска рассматриваемой формы могут быть решены в элементарных функциях. Рассмотрен численный пример.

1. Известно, что для неравномерно нагретого тела уравнения теории упругости в перемещениях

$$\frac{m}{m-2} \text{grad } \phi + \Delta u = \frac{1}{\mu} \text{grad } \Pi \quad (1.1)$$

содержат слагаемые, которые можно трактовать как фиктивные объемные силы с потенциалом

$$\Pi = \frac{2\alpha\mu(m+1)}{m-2} T \quad (1.2)$$

где обозначения такие же, как и в [1].

Частное решение, соответствующее (1.2), определяет на торцевых поверхностях напряжения, которые могут быть сняты при решении краевой задачи.

Отыскание частного решения существенно упрощается в случае стационарного температурного поля. При этом температура является гармонической функцией координат и может быть представлена с использованием символической записи в виде [1]:

$$T = \cos zD T_0 + \frac{\sin zD}{D} T_0' \quad (1.3)$$

$T_0$  и  $T_0'$  — значения температуры и ее первой производной по  $z$  на плоскости  $z=0$ .

Следуя А. И. Лурье, можно свести задачу к нахождению некоторой гармонической функции

$$M = \cos zDM_0 + \frac{\sin zD}{D} M_0' \quad (1.4)$$

Перемещения и напряжения выражаются через эту функцию так:

$$u_r = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial M}{\partial r}, \quad w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial M}{\partial z} \quad (1.5)$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial M}{\partial r}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 M}{\partial r^2}, \quad \sigma_z = 0, \quad \tau_{rz} = \tau_{z\varphi} = \tau_{r\varphi} = 0 \quad (1.6)$$

Уравнения равновесия удовлетворяются, если

$$D^2 M = -2\mu(1+m^{-1})\alpha T \quad (1.7)$$

Для этого достаточно положить

$$D^2 M_0 = -2\mu(1+m^{-1})\alpha T_0, \quad D^2 M_0' = -2\mu(1+m^{-1})\alpha T_0' \quad (1.8)$$

В случае осесимметричной задачи отыскание частного решения сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Рассмотрим незагруженный по торцам диск радиуса  $a$  с плоской нижней поверхностью, толщина которого изменяется по закону:  $h=c(r/a)^k$ , где  $c, k = \text{const}$ .

Диск может иметь центральное отверстие радиуса  $b$ . Будем считать, что существуют радиальный и осевой тепловые потоки. Ограничимся случаем линейного изменения температуры по толщине:  $T=T_0+zT_0'$ , где  $T_0(r)$  и  $T_0'(r)$  — гармонические функции.

Тогда выражение для функции  $M$  упрощается

$$M = M_0 + zM_0' + \mu\alpha(1+m^{-1})(z^2 T_0 + \frac{1}{3} z^3 T_0') \quad (2.1)$$

Гармонические функции  $T_0$  и  $T_0'$  при условиях:  $T_0=t_0$ ,  $T_0'=t_0'$  при  $r=a$ ,  $T_0=t_1$ ,  $T_0'=t_1'$  при  $r=b$  имеют вид

$$T_0 = \frac{\delta}{\xi_0} \xi + t_0, \quad T_0' = \frac{\delta'}{\xi_0} \xi + t_0' \quad (2.2)$$

$$\xi = \ln(r/a), \quad \xi_0 = \ln(b/a), \quad \delta = t_1 - t_0, \quad \delta' = t_1' - t_0'$$

Исключая равномерное расширение, отбросим постоянное слагаемое  $t_0$  в правой части первого соотношения (2.2). Тогда решение уравнений (1.8) имеет вид

$$M_0 = \frac{\mu\alpha\delta(1+m^{-1})}{\xi_0} \left[ \frac{1}{2} r^2 (1-\xi) + M_0^* \right] \quad (2.3)$$

$$M_0' = \frac{\mu\alpha\delta'(1+m^{-1})}{\xi_0} \left[ \frac{1}{2} r^2 \left( 1 - \frac{t_0'\xi_0}{\delta'} - \xi \right) + M_0'^* \right]$$

где  $M_0^*$  и  $M_0'^*$  — некоторые гармонические функции, содержащие  $\xi$ . Варьируя значения констант, можно получить необходимые величины средних радиальных напряжений и перемещений на одном из контуров.

Используя (2.1), получим

$$M = \frac{\mu\alpha(1+m^{-1})}{\xi_0} \left\{ \delta \left[ \frac{1}{2} r^2 (1-\xi) + z^2 \xi + M_0^* \right] + \right. \quad (2.4)$$

$$\left. + \delta' \left[ \frac{1}{2} r^2 \left( 1 - \frac{t_0'\xi_0}{\delta'} - \xi \right) z + \frac{1}{3} \left( \xi + \frac{t_0'\xi_0}{\delta'} \right) z^3 + M_0'^* z \right] \right\}$$

Перемещения и напряжения в диске находятся по формулам (1.5) и (1.6).

При этом напряжения на произвольной плоскости  $z = \text{const}$  будут отсутствовать. Таким образом, условия на нижней (свободной) поверхности диска выполнены.

Условия ненагруженности боковых поверхностей выполним специальным выбором функций  $M_0^*$  и  $M_0'^*$  (среднее радиальное напряжение и изгибающий момент будут равны нулю).

В дальнейшем, совмещая координатную плоскость  $z=0$  с нижним основанием диска, окончательно получим

$$\begin{aligned}
 u_r^{(1)} = & -\frac{\alpha\delta(1+m^{-1})}{2\xi_0} \left[ \left( \frac{1}{2} - \xi \right) r - \left( \frac{1}{2} - \xi_0 \right) \frac{b^2}{r} + \left( \frac{H^2}{6} - Hz + z^2 \right) \frac{1}{r} \right] - \\
 & -\frac{\alpha\delta'(1+m^{-1})}{2\xi_0} \left\{ \left[ -\left( \frac{1}{2} - \frac{t_0'\xi_0}{\delta'} - \xi \right) r + \left( \frac{1}{2} - \frac{t_1'\xi_0}{\delta'} \right) \frac{b^2}{r} - \frac{H^2}{30r} \right] \frac{H}{2} + \right. \\
 & \left. + \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{t_0'\xi_0}{\delta'} - \xi \right) r - \left( \frac{1}{2} - \frac{t_1'\xi_0}{\delta'} \right) \frac{b^2}{r} + \frac{H^2}{5r} \right] z - \frac{Hz^2}{2r} + \frac{z^3}{3r} \right\} \\
 w^{(1)} = & \frac{\alpha(1+m^{-1})}{2\xi_0} \left\{ 2\delta \left( z - \frac{H}{2} \right) \xi + \delta' \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{t_0'\xi_0}{\delta'} - \xi \right) r^2 - \right. \right. \\
 & \left. \left. - b^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{t_1'\xi_0}{\delta'} + \frac{H^2}{20b^2} \right) \xi + \left( \xi + \frac{t_0'\xi_0}{\delta'} \right) \left( z - \frac{H}{2} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^{(1)} = & \frac{\mu\alpha\delta(1+m^{-1})}{\xi_0} \left[ \frac{1}{2} - \xi - \left( \frac{1}{2} - \xi_0 \right) \frac{b^2}{r^2} + \left( \frac{H^2}{6} - Hz + z^2 \right) \frac{1}{r^2} \right] + \\
 & + \frac{\mu\alpha\delta'(1+m^{-1})}{\xi_0} \left\{ \left[ -\left( \frac{1}{2} - \frac{t_0'\xi_0}{\delta'} - \xi \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{t_1'\xi_0}{\delta'} \right) \frac{b^2}{r^2} - \frac{H^2}{30r^2} \right] \frac{H}{2} + \right. \\
 & \left. + \left[ \frac{1}{2} - \frac{t_0'\xi_0}{\delta'} - \xi - \left( \frac{1}{2} - \frac{t_1'\xi_0}{\delta'} \right) \frac{b^2}{r^2} + \frac{H^2}{5r^2} \right] z - \frac{Hz^2}{2r^2} + \frac{z^3}{3r^2} \right\} \\
 \sigma_\varphi^{(1)} = & -\frac{\mu\alpha\delta(1+m^{-1})}{\xi_0} \left[ \frac{1}{2} + \xi - \left( \frac{1}{2} - \xi_0 \right) \frac{b^2}{r^2} + \left( \frac{H^2}{6} - Hz + z^2 \right) \frac{1}{r^2} \right] - \\
 & -\frac{\mu\alpha\delta'(1+m^{-1})}{\xi_0} \left\{ \left[ -\left( \frac{1}{2} + \frac{t_0'\xi_0}{\delta'} + \xi \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{t_1'\xi_0}{\delta'} \right) \frac{b^2}{r^2} - \frac{H^2}{30r^2} \right] \frac{H}{2} + \right. \\
 & \left. + \left[ \frac{1}{2} + \frac{t_0'\xi_0}{\delta'} + \xi - \left( \frac{1}{2} - \frac{t_0'\xi_0}{\delta'} \right) \frac{b^2}{r^2} + \frac{H^2}{5r^2} \right] z - \frac{Hz^2}{2r^2} + \frac{z^3}{3r^2} \right\} \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Здесь верхний индекс (1) означает принадлежность к частному решению (1.1),  $H=c(b/a)^h$ .

Вместо (2.5) и (2.6) в качестве частного решения можно использовать формулы (4.39) гл. IV из работы [1], полученные для круглого свободного диска постоянной толщины с центральным отверстием.

3. Чтобы удовлетворить условиям на верхней поверхности  $z=h$ , необходимо рассмотреть равновесие диска, нагруженного по этой поверхности нагрузкой

$$p_r = -p_r^{(1)} = [\sigma_r^{(1)}]_{z=h} (dh/dr) [1 + (dh/dr)^2]^{-1/2} \quad (3.1)$$

и полученное решение сложить с (2.6).

Уравнения равновесия для пластины переменной толщины с плоским нижним основанием, нагруженной осесимметричной поверхностной нагрузкой, были выведены в [2].

Для диска с принятым профилем уравнения первого приближения имеют вид

$$\begin{aligned} & 2 \left[ \frac{d^2}{d\xi^2} - 1 + k \left( \frac{d}{d\xi} + m^{-1} \right) \right] u_0 - \\ & - \frac{c}{a} e^{(h-1)\xi} \left[ \frac{d^2}{d\xi^2} - 2 \frac{d}{d\xi} + 2k \left( \frac{d}{d\xi} + m^{-1} - 1 \right) \right] \frac{dw_0}{d\xi} = f_1, \\ & \left( \frac{d^2}{d\xi^2} - 1 \right) \left( \frac{d}{d\xi} - 1 + 2k \right) u_0 - \frac{c}{3a} e^{(h-1)\xi} \left( \frac{d}{d\xi} - 2 + 3k \right) \left( \frac{d}{d\xi} - 2 \right) \frac{d^2 w_0}{d\xi^2} = f_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $u_0$ ,  $w_0$  — перемещения точек «начальной» плоскости, совмещенной с нижним основанием,  $f_1$  и  $f_2$  — функции поверхностной нагрузки на торцах.

При свободном нижнем основании и  $p_z = 0$

$$f_1 = -(1-m^{-1}) \frac{a^2 p_r}{\mu h} \sqrt{1 + \left( \frac{dh}{dr} \right)^2} e^{2\xi}, \quad f_2 = 0$$

Решение системы (3.2) запишется в виде

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{i=1}^5 A_i e^{\alpha_i \xi} + C_1 \xi e^{\xi} + C_2 e^{\xi} + C_3 e^{-\xi} + C_4 e^{(2h-1)\xi} + \\ & + C_5 e^{(h-1)\xi} + C_6 e^{(h+1)\xi} + C_7 \xi e^{(h+1)\xi} + C_8 e^{(3h-1)\xi} \\ \frac{dw_0}{d\xi} &= \sum_{i=1}^5 B_i e^{\beta_i \xi} + D_1 \xi e^{(2-h)\xi} + D_2 e^{(2-h)\xi} + D_3 e^{-h\xi} + \\ & + D_4 e^{h\xi} + D_5 + D_6 e^{2\xi} + D_7 \xi e^{2\xi} + D_8 e^{2h\xi} \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  — корни соответствующих характеристических уравнений пятой степени, причем  $\beta_i = \alpha_i - k + 1$ .

Постоянные  $A_i$  и  $B_i$  определяются из условий на боковых поверхностях. Между постоянными интегрирования существует соотношение

$$B_i = A_i \frac{2a(\alpha_i^2 - 1 + k\alpha_i + km^{-1})}{c(\alpha_i^2 - 1 - k^2 + 2km^{-1})}$$

Константы частного решения имеют вид (при  $t_0' = 0$ ):

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\alpha a(1-m^{-1})}{2\xi_0} \left[ \delta - \frac{1}{2} \delta' c \left( \frac{b}{a} \right)^h \right] \\ C_2 &= -\frac{\alpha a(1-m^{-1})}{2\xi_0} \left[ \frac{1}{2} + \frac{4-k^2+3(2m^{-1}-k)}{k(2-k)(1+m^{-1})} \right] \left[ \delta - \frac{1}{2} \delta' c \left( \frac{b}{a} \right)^h \right] \\ C_3 &= \frac{\alpha a(1+m^{-1})}{2\xi_0} \left\{ \delta \left[ \frac{1}{6} \left( \frac{b}{a} \right)^{2h} \left( \frac{c}{a} \right)^2 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \left( \frac{1}{2} - \xi_0 \right) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \delta' c \left[ \frac{1}{30} \left( \frac{b}{a} \right)^{3h} \left( \frac{c}{a} \right)^2 - \left( \frac{b}{a} \right)^{2+h} \left( \frac{1}{2} - \xi_0 \right) \right] \right\} \\ C_4 &= -\frac{\alpha c^2(1-m^{-2})(k-2) [\delta^{-1/2} \delta' c (b/a)^h]}{2\xi_0 a [(6k-5+m^{-1})(k-2) - 6(k-1)(3k+4+2m^{-1})]} \end{aligned}$$

$$C_6 = -\frac{\alpha a c (1-m^{-1}) \delta'}{3 \xi_0 k (k+2)}$$

$$C_8 = -\frac{2 \alpha c^3 (1-m^{-2}) (k-1) \delta'}{3 \xi_0 a [4(12k-7+m^{-1})(k-1) - 9(4k-3+m^{-1})(3k-2)]}$$

$$D_2 = \frac{3 \alpha a^2 (1-m^{-1})}{\xi_0 c k (k-2)} \left[ \delta - \frac{1}{2} \delta' c \left( \frac{b}{a} \right)^k \right]$$

$$D_4 = -\frac{6 \alpha c (1-m^{-2}) (k-1) [\delta^{-1/2} \delta' c (b/a)^k]}{\xi_0 [(6k-5+m^{-1})(k-2) - 6(k-1)(3k-4+2m^{-1})]}$$

$$D_5 = \frac{\alpha a (1+m^{-1}) \{ \delta (b/a)^k + \delta' a [(b/a)^2 (1/2 - \xi_0)^{-1/5} (b/a)^{2k} (c/a)^2] \}}{2 \xi_0}$$

$$D_6 = \frac{\alpha a^2 (1-m^{-1}) \delta'}{2 k \xi_0 (1+m^{-1})} \left[ -\frac{2(2k+3+m^{-1})}{3(2+k)} + 1 + \frac{k(3+m^{-1})}{2} \right]$$

$$D_7 = -\frac{\alpha a^2 (1-m^{-1}) \delta'}{2 \xi_0}$$

$$D_8 = \frac{4 \alpha c^2 (1-m^{-2}) (3k-2) \delta'}{\xi_0 [4(12k-7+m^{-1})(k-1) - 9(4k-3+m^{-1})(3k-2)]}$$

$$C_5 = C_7 = D_1 = D_3 = 0$$

Перемещения и напряжения  $u_r^{(2)}$ ,  $w^{(2)}$ ,  $\sigma_r^{(2)}$ ,  $\sigma_\varphi^{(2)}$ ,  $\sigma_z^{(2)}$ ,  $\tau_{rz}^{(2)}$  выражаются через перемещения точек начальной плоскости (3.3) в соответствии с [1, 3]. Выпишем формулы первого приближения для напряжений и перемещений

$$\begin{aligned} u_r^{(2)} &= \left( 1 - \frac{m-1}{m-2} z^2 \Delta_1 \right) u_0 + \left[ -z + \frac{2m-1}{6(m-1)} z^3 \Delta_1 \right] \frac{dw_0}{dr} \\ w^{(2)} &= \frac{1}{m-1} \left( -z + \frac{m-1}{6} z^3 \Delta \right) \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) u_0 + \left[ 1 + \frac{1}{2(m-1)} z^2 \Delta \right] w_0 \\ \sigma_r^{(2)} &= \frac{\mu}{m-1} \left\{ \left[ 2 \left( m \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) - z^2 \left( 2m \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) \Delta_1 \right] u_0 - \right. \\ &\quad \left. - 2z \left( m \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) \frac{dw_0}{dr} \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi^{(2)} &= \frac{\mu}{m-1} \left\{ \left[ 2 \left( \frac{d}{dr} + \frac{m}{r} \right) - z^2 \left( \frac{d}{dr} + \frac{2m}{r} \right) \Delta_1 \right] u_0 - 2z \left( \frac{d}{dr} + \frac{m}{r} \right) \frac{dw_0}{dr} \right\} \\ \sigma_z^{(2)} &= \frac{m\mu}{m-1} z^2 \left[ \Delta \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) u_0 - \frac{z}{3} \Delta^2 w_0 \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

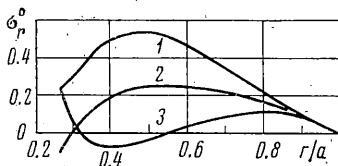
$$\tau_{rz}^{(2)} = -\frac{m\mu}{m-1} z \left( 2\Delta_1 u_0 - z\Delta_1 \frac{dw_0}{dr} \right), \quad \Delta_1 = \frac{d^2}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} \right) \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}$$

Подставляя (3.3) в (3.4) и (3.5) и складывая (2.5) и (2.6) с (3.4) и (3.5) соответственно, получим полное выражение перемещений и напряжений.

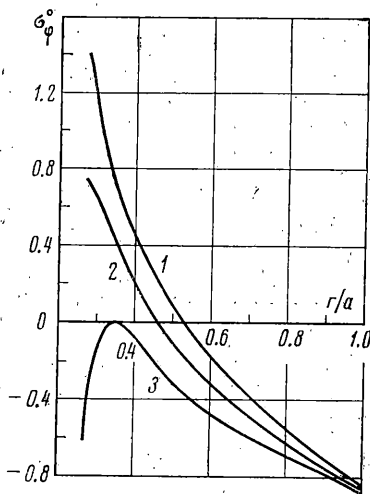
Для окончательного решения задачи остается удовлетворить условиям на боковых поверхностях.

4. В случае свободных боковых поверхностей граничные условия первого приближения можно представить в виде:  
при  $r=a$ ,  $r=b$

$$\int_0^h \sigma_r dz = 0, \quad \int_0^h \sigma_r dz = 0, \quad \int_0^h \tau_{rz} dz = 0.$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Когда краевая задача решается в первом приближении, предпочтительнее использование в качестве частного решения формул для напряжений в диске постоянной толщины, так как в этом случае напряжения на боковой поверхности имеют меньшую величину. Таким способом был рассчитан пример для рабочего диска турбокомпрессора ТК-61. Характеристики профиля диска:  $k=-2.26$ ,  $c/a=0.034$ ,  $b/a=0.27$ .

На графиках (Фиг. 1 и 2) показаны напряжения в диске  $\sigma_r^0 = \xi_0 \sigma_r / 1.3 \alpha d \mu$ ,  $\sigma_\phi^0 = \xi_0 \sigma_\phi / 1.3 \alpha d \mu$  при  $m^{-1}=0.3$ . Кривые 1, 2, 3 относятся соответственно к сечениям  $z=0$ ,  $h/2$ ,  $h$ .

Поступила 19 VII 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
2. Готлиб Ц. А., Прокопов В. К. Уравнения равновесия плиты переменной толщины. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
3. Прокопов В. К. Применение символического метода к выводу уравнений теорий плит. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.