Соотношение (3.7) теперь принимает вид

$$\cos\varphi_* = 1 - \frac{2(1-s^2f^2)}{1+s^2}, \quad \varphi_* = \varphi|_{r=r_*}$$

Таким образом, в уравнение брахистохроны входят только две постоянные s и C (α посредством первого соотношения (4.2) выражается через s), а параметр φ меняется в интервале от 0 до $\varphi_*(s)$. Значения этих постоянных определяются из уравнений $x(\varphi_*)=a$, $y(\varphi_*)=b$, причем, как нетрудно видеть, всегда $-1/f \leqslant s \leqslant 1/f$. При $f\to 0$, $\alpha\to 1$ и уравнение (4.3) вырождается в уравнение обыкновенной циклоиды. Общее время спуска тела по брахистохроне получается после подстановки найденного решения в функционал (1.5) и равно

$$T = \sqrt{\frac{C\alpha}{g}} \left[\frac{1+f^2}{\alpha^2}\varphi_* + \frac{\alpha^2-(1+f^2)}{\alpha^2}\sin\varphi_* + \frac{2f}{\alpha}(1-\cos\varphi_*) \right]$$

На фигуре изображены брахистохроны при $f=0.1$ для различных значений отношения $\varepsilon=b/a$. Для наглядности конечные точки расположены на циклоиде.

Можно отметить некоторые особенности полученных кривых. В случае, когда $\varepsilon=f$, брахистохрона вырождается в прямую и, так как начальная скорость равна нулю, тело останется на месте, и время спуска T бесконечно. Таким образом, ни по одной кривой из начала координат в сектор выше угла трения с нулевой начальной скоростью попасть невозможно. При сколь угодно малом коэффициенте трения f всегда существуют точки (a, b), такие, что соответствующие брахистохроны будут отличаться от циклоиды на конечную величину.

В случае, когда сухое трение отсутствует и имеются только диссипативные силы типа вязкого трения, задача значительно упрощается (см., например, [6]).

Поступила 29 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mazurkiewicz Z.* Pewne uogólnienie problemu brachistochrony. Mech. Teoret. stosowanej, 1971, vol. 9, No. 3.
2. *Van der Heijden A. M. A., Diepstraten J. D.* On the brachystochrone with dry friction. Internat. J. Non-linear Mech. 1975, vol. 10, No. 2.
3. *Bădescu R.* Un probleme de calcul variationnel. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1971, vol. 5, No. 5. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1973, № 1.)
4. *Анчишкина Л. Ф., Рожковский В. Д.* Определение линии наискорейшего ската при наличии сухого трения. Изв. вузов. Машиностроение, 1975, № 3.
5. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления М., «Наука», 1969.
6. *Смирнов В. И., Крылов В. И., Канторович Л. В.* Вариационное исчисление. Л., «Кубуч», 1933.

УДК 531.8

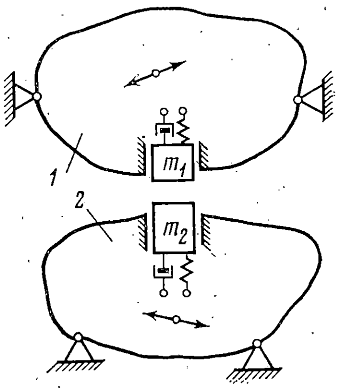
К ИССЛЕДОВАНИЮ РЕЗОНАНСНЫХ РЕЖИМОВ В ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМАХ

В. И. БАБИЦКИЙ, М. З. КОЛОВСКИЙ

(Москва, Ленинград)

Предлагается эффективная расчетная схема для построения приближенных решений, описывающих основные и субгармонические резонансные режимы произвольной кратности в системах виброударного действия. Проводится сравнение приближенных и точных решений.

Рассмотрим две линейные стационарные системы *1*, *2* (фигура), контактирующие элементы которых с массами m_1, m_2 совершают одномерные движения с соударениями под действием приложенных к системам периодических вынуждающих сил частоты ω. Пусть $L_1(i\omega)$, $L_2(i\omega)$ – динамические податливости соударяющихся элементов ($i^2=-1$); Δ – их установочный зазор (отрицательное Δ соответствует натягу). В виброударном режиме периода $T=2\pi l/\omega$ (l – целое число) с одним соударением за период движения относительное смещение z соударяющихся элементов определяется выражением



$$z(t)=\zeta(t)-L(p)U\delta_T(t)=\zeta(t)-US_1(t) \qquad (1)$$

Здесь $\zeta(t)$ – периодическое решение периода T/l уравнений движения линейных систем, т. е. движение, вызываемое вынуждающими силами при пренебрежении соударениями; U – импульс, возникающий при ударе; p – оператор дифференцирования; $S_1(t)=[L_1(p)+L_2(p)]\delta_T(t)=L(p)\delta_T(t)$ – установившаяся реакция линейной системы на T-периодическую последовательность дельта-функций ($\delta_T(t)$), называемая ее импульсно-частотной характеристикой первого рода [1]. За начало отсчета времени примем момент удара.

Во многих случаях первое слагаемое в (1) оказывается существенно меньше второго. Решения, удовлетворяющие этому условию, будем называть резонансными виброударными режимами. Такие режимы возникают, например, в том случае, когда частоты вынуждающих сил существенно превосходят собственные частоты линейной системы.

Учитывая сказанное, будем приближенно искать резонансный виброударный режим в форме

$$z(t)\approx -US_1(t) \qquad (2)$$

т. е. будем считать, что движение систем в этом случае мало отличается от установившегося движения линейной системы, вызванного действием периодической последовательности импульсов. Отметим, что в работе [2] применялось иное представление аналогичных решений в виде свободных колебаний соответствующей виброударной системы, отыскиваемых точными методами.

Для определения в (2) значения импульса U воспользуемся условием удара: $z=\Delta$ при $t=0$. Подставляя (2) в это условие, находим $U=-\Delta/S_1(0)$ и, следовательно

$$z(t)\approx \frac{\Delta}{S_1(0)}S_1(t) \qquad (3)$$

Таким образом, если в системе возникает резонансный виброударный режим, то он приближенно описывается формулой (3).

Условия существования такого режима определим из баланса энергии за период движения T. По теореме Карно находим потери энергии при ударе

$$W=\frac{m\dot z_-^{2}(0)}{2}(1-R^2)=\frac{(1-R)U^2}{2(1+R)m}=\frac{(1-R)\Delta^2}{2(1+R)S_1^2(0)m} \qquad (4)$$

Здесь индекс минус отличает значение скорости перед ударом; R – коэффициент восстановления; $m=m_1m_2/(m_1+m_2)$.

Для определения потерь W_d, вызванных диссипативными силами, действующими в линейных системах

$$W_d=\int_0^T \{L^{-1}(p)z(t)\}\dot z(t)\,dt \qquad (5)$$

разложим подынтегральные функции в ряды Фурье

$$z(t)=\frac{U}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}L\left(\frac{ki\omega}{l}\right)\exp\left(\frac{ki\omega}{l}t\right),\qquad \dot z(t)=\frac{Ui\omega}{Tl}\sum_{k=-\infty}^{\infty}L\left(\frac{ki\omega}{l}\right)\exp\left(\frac{ki\omega}{l}t\right)k \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получим в результате интегрирования

$$W_d=\frac{\omega^2\Delta^2}{\pi l^2 S_1^2(0)}\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Im}L^{-1}\left(\frac{ki\omega}{l}\right)\left|L\left(\frac{ki\omega}{l}\right)\right|^2 k \tag{7}$$

Наконец, работу вынуждающих сил определим следующим образом:

$$W_b=\int_0^T\{L^{-1}(p)\zeta(t)\}z^{\bullet}(t)\,dt \tag{8}$$

Величина этого интеграла зависит от фазы периодического процесса $\zeta(t)$ по отношению к моментам удара. Пусть, например, $\zeta(t)=\zeta_0\cos(\omega t+\psi)$, тогда $L^{-1}(p)\zeta(t)=$ $=F_0\cos(\omega t+\varphi)$ и с учетом (6) из (8) получаем

$$W_b=\omega F_0 U|L(i\omega)|\sin[\varphi-\arg L(i\omega)]=-\frac{\omega F_0\Delta}{S_1(0)}|L(i\omega)|\sin\varphi_0 \tag{9}$$

В результате уравнение баланса энергии в рассматриваемом случае примет вид

$$\frac{\Delta^2}{S_1^2(0)}\left\{\frac{1-R}{2(1+R)m}+\frac{\omega^2}{\pi l^2}\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Im}L^{-1}\left(\frac{ki\omega}{l}\right)\left|L\left(\frac{ki\omega}{l}\right)\right|^2 k\right\}=$$

$$=-\omega F_0\frac{\Delta}{S_1(0)}|L(i\omega)|\sin\varphi_0$$

Из него определяется неизвестная фаза процесса. Условие существования резонансных режимов ($|\sin\varphi_0|\leqslant 1$) будет следующим:

$$\omega F_0|L(i\omega)|\geqslant-\frac{\Delta}{S_1(0)}\left\{\frac{1-R}{2(1+R)m}+\frac{\omega^2}{\pi l^2}\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Im}L^{-1}\left(\frac{ki\omega}{l}\right)\left|L\left(\frac{ki\omega}{l}\right)\right|^2 k\right\} \tag{10}$$

В тех случаях, когда ударное взаимодействие носит двусторонний характер и осуществляется при $z=\pm\Delta$, для отыскания симметричных резонансных режимов с двумя соударениями за период T удобно воспользоваться для записи решения импульсно-частотной характеристикой $S_2(t)$ второго рода [1], представляющей собой установившуюся реакцию линейной системы на последовательность одинаковых по величине импульсов, действующих с интервалами $^1/_2T$ и чередующихся по знаку. Представив решение в форме

$$z(t)=\zeta_0\cos(\omega t+\psi)-US_2(t) \tag{11}$$

и проделав выкладки, аналогичные предыдущим, получим условие существования резонансных режимов в виде

$$\omega F_0|L(i\omega)|\geqslant \tag{12}$$

$$\geqslant-\frac{\Delta}{S_2(0)}\left\{\frac{1-R}{2(1+R)m}+\frac{2\omega^2}{\pi l^2}\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Im}L^{-1}\left[\frac{(2k-1)i\omega}{l}\right]\left|L\left[\frac{(2k-1)i\omega}{l}\right]\right|^2(2k-1)\right\}$$

Правомерность использования полученных приближенных соотношений проверяется выполнением условия $\max|z(t)|>\zeta_0$. При $\Delta\neq0$ можно использовать также более простое и достаточное условие $|\Delta|>\zeta_0$, которое проверяется до построения решения.

Пусть $L(p)=(p^2+bp+\Omega^2)^{-1}$, т. е. линейная часть системы представляет собой осциллятор, возбуждаемый гармонической силой $F(t)=F_0\cos(\omega t+\varphi)$ и взаимодействующий с неподвижными ограничителями. В этом случае $\operatorname{Im}L^{-1}(ki\omega l^{-1})=bk\omega l^{-1}$, $m=1$

$$\left|L\left(\frac{ki\omega}{l}\right)\right|=\left\{\left[\Omega^2-\left(\frac{k\omega}{l}\right)^2\right]^2+\left(\frac{bk\omega}{l}\right)^2\right\}^{-1/2} \tag{13}$$

Учитывая, что резонансные режимы в рассматриваемой системе могут возникать лишь при относительно малом b и выполнении частотного соотношения $(\omega/l)\geqslant\Omega$ (поскольку ударное взаимодействие приводит к наложению на линейную часть системы дополнительных неудерживающих связей и, следовательно, повышению ее собственных частот) в выражении (13) можно пренебречь величиной $(bk\omega/l)^2$, малой по сравнению со слагаемым в квадратной скобке, а при $k>1$ и членом Ω^2. Подставляя с учетом этих упрощений (13) в (10), (12) и осуществляя суммирование соответствующих числовых рядов, для случаев одностороннего и двустороннего соударений соответственно получим

$$\begin{gathered}\frac{F_0\omega}{|\omega^2-\Omega^2|}\geqslant-\frac{\Delta}{S_1(0)}\left\{\frac{bl}{\pi\omega}\left[\frac{1}{(1-\Omega^2l^2/\omega^2)^2}+\frac{\pi^2}{6}-1\right]+\frac{1-R}{2(1+R)}\right\}\\ \frac{F_0\omega}{|\omega^2-\Omega^2|}\geqslant-\frac{\Delta}{S_2(0)}\left\{\frac{2bl}{\pi\omega}\left[\frac{1}{(1-\Omega^2l^2/\omega^2)^2}+\frac{\pi^2}{8}-1\right]+\frac{1-R}{2(1+R)}\right\}\end{gathered}\tag{14}$$

В качестве примера определим предельную величину Δ установки ограничителей и соответствующую скорость соударений $z_-^{\bullet}$ для линейного осциллятора с двусторонним симметричным ограничением в случае субгармонического резонанса третьего порядка $(l=3)$. Пусть параметры системы и возбуждения задаются величинами $\Omega=62.8$ *сек*$^{-1}$, $R=0.5$, $b=12.5$ *сек*$^{-1}$, $F_0=4g\approx40$ *м·сек*$^{-2}$, $\omega=236$ *сек*$^{-1}$.

Из второго равенства (14) вычисляем $U=-\Delta/S_2(0)=0.189$ *м·сек*$^{-1}$, следовательно, $z_-^{\bullet}=0.126$ *м·сек*$^{-1}$. Выражение импульсно-частотной характеристики линейного осциллятора приведено на стр. 56 в работе [1]. Пренебрегая в этом выражении для упрощения вязким трением, поскольку вне частот линейных резонансов $(\omega/l\neq\Omega)$ его влияние незначительно, получаем $S_2(0)=-24.5\cdot10^{-3}$ *сек.* Таким образом $\Delta=4.65\cdot10^{-3}$ м. Подсчитывая ζ_0, имеем $\zeta_0=0.82\cdot10^{-3}$ *м*, следовательно, условие $|\Delta|>\zeta_0$ надежно выполняется.

Для сравнения определим аналогичное значение Δ по точным соотношениям, выведенным в [3] для рассматриваемого примера методом припассовывания. В результате значительно более трудоемких вычислений находим $\Delta=4.43\cdot10^{-3}$ *м*.

Поступила 21 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Розенвассер Е. Н.* Колебания нелинейных систем. М., «Наука», 1969.
2. *Коловский М. Я.* О применении метода малого параметра для определения разрывных периодических решений. Тр. междунар. симпоз. по нелинейным колебаниям, т. 1, Киев, Изд-во АН УССР, 1963.
3. *Бабицкий В. И.* К вопросу о существовании высокочастотных колебаний большой амплитуды в линейных системах с ограничителями. Машиноведение, 1966, № 1.