УДК 531.33

О ФРИКЦИОННОЙ БРАХИСТОХРОНЕ

М. Д. ГЕРШМАН, Р. Ф. НАГАЕВ

(Ленинград)

Рассматривается задача о брахистохроне в поле силы тяжести при наличии сухого трения и других диссипативных сил. Параметрическая форма задания искомой кривой в замкнутом виде находится методами вариационного исчисления, как точное решение соответствующих уравнений Эйлера.

Задаче о фрикционной брахистохроне посвящен цикл работ зарубежных авторов [1, 2], в которых решение системы, адекватной использованной ниже, строится в виде рядов по степеням коэффициента трения [1]. В работах [3, 4], также посвященных решению этой задачи, были допущены ошибки, существенно повлиявшие на конечный результат.

1. В неподвижной системе осей x, y требуется найти кривую, по которой материальная точка спустится из начала координат в точку (a, b) за наименьшее время.

Считаем, что на тело действует сила веса, направленная по оси y, сила кулонова трения, силы, зависящие от локальных характеристик движения в данной точке (модуля и направления скорости).

Уравнение движения тела в векторной форме имеет вид

$$m\boldsymbol{\rho}^{\cdot\cdot}=mg\mathbf{j}+\mathbf{F}+\mathbf{R} \tag{1.1}$$

где m — масса тела, $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор точки в системе xy, g — ускорение силы тяжести, $\mathbf{j}$ — орт оси y. Сила реакции кривой определяется по формуле

$$\mathbf{R}=N(\boldsymbol{\nu}-f\boldsymbol{\tau}) \tag{1.2}$$

причем N — модуль нормальной реакции, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\tau}$ — орты соответственно нормали и касательной к кривой, f — коэффициент трения скольжения, а $\mathbf{F}$ — вектор прочих действующих на тело диссипативных сил. В формуле (1.2) учтено, что в процессе движения по кривой скорость тела не меняет знака.

Уравнение (1.1) в проекции на касательную ось с учетом соотношения (1.2) имеет вид

$$m(v^{\cdot}-fv\theta^{\cdot})=mg\,(\sin\theta-f\cos\theta)+F_t+fF_n \tag{1.3}$$

где F_t и F_n — проекции вектора $\mathbf{F}$ соответственно на касательную и на нормаль к кривой, v — скорость движения тела, а θ — угол между вектором $\boldsymbol{\tau}$ и положительным направлением оси x.

Сделаем замену переменных $r=\operatorname{tg}\theta$, $u=v^2/2g$ и вместо времени t в качестве аргумента будем использовать x. Тогда уравнение (1.3) примет вид

$$u'-2fr'u(1+r^2)^{-1}-(r-f+\Phi)=0,\quad \Phi=(mg)^{-1}(1+r^2)^{1/2}(F_t+fF_n) \tag{1.4}$$

Здесь штрихом обозначается дифференцирование по x. Отметим, что Φ в силу исходных допущений зависит только от локальных характеристик движения тела u и r. Например, в случае вязкого трения имеем $\Phi=\chi[(1+r^2)u]^{1/2}$, где $\chi=2^{1/2}kg^{-1/2}m^{-1}$, а k — коэффициент сопротивления вязкой жидкости. Для квадратичного сопротивления движению $\Phi=\chi u(1+r^2)^{1/2}$, где $\chi=2k/m$, а k — коэффициент сопротивления [2].

Математическую постановку задачи можно дать в терминах теории оптимального управления на основе, например, принципа максимума Л. С. Понтрягина [5], однако в данном случае вследствие автономности системы удобнее использовать классический подход Лагранжа.

Выражение для полного времени спуска тела по кривой имеет вид

$$T=(2g)^{-1/2}\int\limits_0^a (1+r^2)^{1/2}u^{-1/2}\,dx \tag{1.5}$$

Таким образом, необходимо найти такие функции $u(x)$ и $r(x)$, которые сообщают минимум функционалу (1.5) при условии (1.4).

---

[1] См. также De Pater A. D. The probleme of the brachystochrone with dry friction. Lab. of Engng Mech., Dept. of Mech. Engng, Delft Univ. of Technology, 1974, Rept No. 547.

[2] В [3] выражение, аналогичное $r-f+\Phi$ в (1.4), считалось заданной функцией длины дуги кривой и не варьировалось на окольных путях.

2. Далее будем разыскивать абсолютный минимум функционала

$$I=\int\limits_0^a [pu'+qr'+\lambda_1+\lambda_2(y'-r)]\,dx \tag{2.1}$$

$$p=\frac{(1+r^2)^{1/2}u^{-1/2}-\lambda_1}{r-f+\Phi},\quad q=-2fu\frac{(1+r^2)^{1/2}u^{-1/2}-\lambda_1}{(r-f+\Phi)(1+r^2)} \tag{2.2}$$

λ_1, λ_2 — неопределенные множители Лагранжа. Способ введения их в функционал несколько отличается от классического. Это позволяет заметно упростить интегрирование системы уравнений Эйлера. В то же время очевидно, что значения функционалов (1.5) и (2.1) на всех окольных путях, для которых оказывается справедливым уравнение (1.4), совпадают.

Для нахождения экстремума функционала (2.1) имеем систему уравнений Эйлера

$$\left(\frac{\partial q}{\partial u}-\frac{\partial p}{\partial r}\right)r'-\frac{\partial p}{\partial\lambda_1}\lambda_1'=0,\quad \left(\frac{\partial p}{\partial r}-\frac{\partial q}{\partial u}\right)u'-\frac{\partial q}{\partial\lambda_1}\lambda_1'-\lambda_2=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial\lambda_1}u'-\frac{\partial q}{\partial\lambda_1}r'+1=0,\quad \lambda_2'=0,\quad y'-r=0 \tag{2.3}$$

и граничные условия

$$y=0,\quad u=u_0,\quad q=0,\quad \text{если}\quad x=0;\quad y=b,\quad p=0,\quad q=0,\quad \text{если}\quad x=a \tag{2.4}$$

Условия, наложенные на величины p и q в (2.4), являются условиями трансверсальности[1].

3. Подынтегральная функция в выражении (2.1) не зависит явно от x и поэтому система уравнений Эйлера (2.3) имеет первый интеграл

$$\lambda_1-\lambda_2 r=h \tag{3.1}$$

где h — неизвестная постоянная.

Отсюда, поскольку в силу четвертого уравнения (2.3) $\lambda_2=\mathrm{const}$, имеем $\lambda_1'=\lambda_2 r'$. Подставляя это выражение для λ_1' в первое уравнение (2.3) и сокращая на r' (допущение о том, что $r'=0$ находится в противоречии с другими уравнениями (2.3)), получаем следующую конечную связь между неизвестными u и r:

$$\frac{\partial q}{\partial u}-\frac{\partial p}{\partial r}-\frac{\partial p}{\partial\lambda_1}\lambda_2=0 \tag{3.2}$$

или, что то же самое

$$r(1+r^2)^{-1/2}u^{-1/2}-\frac{(1+r^2)^{1/2}u^{-1/2}-\lambda_1}{r-f+\Phi}\left(1+\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)-\frac{f}{1+r^2}\left[2\lambda_1-\right.$$

$$\left.-(1+r^2)^{1/2}u^{-1/2}+2u\frac{(1+r^2)^{1/2}u^{-1/2}-\lambda_1}{r-f+\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right]-\lambda_2=0 \tag{3.3}$$

Разрешив это равенство относительно u, подставим полученное выражение в уравнение движения (1.4). В результате после некоторых преобразований придем к следующему уравнению первого порядка с разделяющимися переменными относительно неизвестной r:

$$r'-\Psi(r)=0 \tag{3.4}$$

$$\Psi(r)=\{r-f+\Phi[u(r),r]\}\left[\frac{d}{dr}u(r)-2f\frac{u(r)}{1+r^2}\right]^{-1}$$

После интегрирования (3.4) получим

$$x=\int\limits_{r_0}^{r}\Psi^{-1}(r)\,dr \tag{3.5}$$

---

[1] В работе [4] условия трансверсальности не рассматриваются, а в выражении для функционала (см. (2.1)), по существу, опущено слагаемое с λ_2.

Далее в силу (3.4), поскольку $r=y'$, имеем $dy=rdx=r\Psi^{-1}(r)\,dr$ и, следовательно

$$y = \int_{r_0}^{r} r\Psi^{-1}(r)\,dr \tag{3.6}$$

Если теперь величину r принять за параметр, соотношения (3.5) и (3.6) можно рассматривать как параметрическую форму задания искомой брахистохроны.

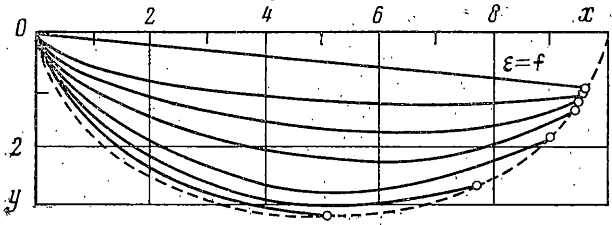
Граничные условия (2.4) можно переписать в виде

$$x=0,\quad y=0,\quad u=u_0,\quad q=0\quad \text{при } r=r_0;\qquad x=a,\quad y=b,\quad p=0,\quad q=0\quad \text{при } r=r_*$$

Здесь r_* – значение величины r в конечной точке. Первые два условия были использованы при получении соотношений (3.5), (3.6), а последние два условия будут удовлетворены одновременно в силу (2.2) и (3.1), если

$$(1+r_*^2)^{1/2}u^{-1/2}(r_*)-\lambda_2 r_*-h=0 \tag{3.7}$$

Таким образом, имеется пять уравнений относительно четырех неизвестных r_0, r_*, λ_2, h. Это означает, что при произвольных граничных условиях рассматриваемая



задача решения не имеет [1]. Такая ситуация возникла из-за того, что одно из дифференциальных уравнений системы Эйлера трансформировалось в конечное соотношение (3.2). Однако в важном случае нулевой начальной скорости ($u_0=0$) требования $u=u_0$ и $q=0$ при $r=r_0$ совпадают (см. (2.2)). Система для определения неизвестных констант становится совместной, и задача имеет решение.

4. Рассмотрим случай чисто сухого трения и нулевой начальной скорости. Здесь имеем $\Phi=0$, $u_0=0$ и из соотношения (3.3) получаем

$$u=2C\alpha^3(1+r^2)\left[(r-f)^2+\alpha^2\right]^{-2} \tag{4.1}$$

где

$$\alpha=\left[\frac{(1+f^2)(1+sf)}{1-sf}\right]^{1/2},\qquad C=\frac{1}{2h^2(1+sf)}\left(\frac{1+f^2}{1-s^2f^2}\right)^{1/2},\qquad s=\frac{\lambda_2}{h} \tag{4.2}$$

Так как в начальной точке скорость тела нулевая, из формулы (4.1) следует, что в случае чисто сухого трения величина r обращается в бесконечность.

Вместо величины r введем новый параметр $\varphi=2\operatorname{arcctg}[(r-f)/\alpha]$ и с его помощью после взятия квадратур (3.5) и (3.6) получим уравнение искомой брахистохроны в следующем параметрическом виде:

$$\begin{gathered} x=C\left[\frac{3(1+f^2)-\alpha^2}{2\alpha^2}(\varphi-\sin\varphi)+\frac{f}{\alpha}(1-\cos\varphi)^2+\frac{\alpha^2-(1+f^2)}{2\alpha^2}\sin\varphi(1-\cos\varphi)\right] \\ y=C\left[\alpha(1-\cos\varphi)+f\frac{3\alpha^2-(1+f^2)}{2\alpha^2}\sin\varphi(1-\cos\varphi)+\right. \\ \left.+\frac{3f^2+1-\alpha^2}{2\alpha}(1-\cos\varphi)^2+f\frac{3(1+f^2)+\alpha^2}{2\alpha^2}(\varphi-\sin\varphi)\right] \end{gathered} \tag{4.3}$$

---

[1] Здесь имеется в виду удовлетворяющее системе уравнений Эйлера и граничным условиям решение в классе непрерывных достаточно гладких функций.

Соотношение (3.7) теперь принимает вид

$$\cos\varphi_* = 1 - \frac{2(1-s^2f^2)}{1+s^2}, \quad \varphi_* = \varphi|_{r=r_*}$$

Таким образом, в уравнение брахистохроны входят только две постоянные s и C (α посредством первого соотношения (4.2) выражается через s), а параметр φ меняется в интервале от 0 до $\varphi_*(s)$. Значения этих постоянных определяются из уравнений $x(\varphi_*)=a$, $y(\varphi_*)=b$, причем, как нетрудно видеть, всегда $-1/f \leqslant s \leqslant 1/f$. При $f\to 0$, $\alpha\to 1$ и уравнение (4.3) вырождается в уравнение обыкновенной циклоиды. Общее время спуска тела по брахистохроне получается после подстановки найденного решения в функционал (1.5) и равно

$$T = \sqrt{\frac{C\alpha}{g}}\left[\frac{1+f^2}{\alpha^2}\varphi_* + \frac{\alpha^2-(1+f^2)}{\alpha^2}\sin\varphi_* + \frac{2f}{\alpha}(1-\cos\varphi_*)\right]$$

На фигуре изображены брахистохроны при $f=0.1$ для различных значений отношения $\varepsilon=b/a$. Для наглядности конечные точки расположены на циклоиде.

Можно отметить некоторые особенности полученных кривых. В случае, когда $\varepsilon=f$, брахистохрона вырождается в прямую и, так как начальная скорость равна нулю, тело останется на месте, и время спуска T бесконечно. Таким образом, ни по одной кривой из начала координат в сектор выше угла трения с нулевой начальной скоростью попасть невозможно. При сколь угодно малом коэффициенте трения f всегда существуют точки (a, b), такие, что соответствующие брахистохроны будут отличаться от циклоиды на конечную величину.

В случае, когда сухое трение отсутствует и имеются только диссипативные силы типа вязкого трения, задача значительно упрощается (см., например, [6]).

Поступила 29 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mazurkiewicz Z.* Pewne uogólnienie problemu brachistochrony. Mech. Teoret. stosowanej, 1971, vol. 9, No. 3.
2. *Van der Heijden A. M. A., Diepstraten J. D.* On the brachystochrone with dry friction. Internat. J. Non-linear Mech. 1975, vol. 10, No. 2.
3. *Bădescu R.* Un probleme de calcul variationnel. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1971, vol. 5, No. 5. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1973, № 1.)
4. *Анчишкина Л. Ф., Рожковский В. Д.* Определение линии наискорейшего ската при наличии сухого трения. Изв. вузов. Машиностроение, 1975, № 3.
5. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления М., «Наука», 1969.
6. *Смирнов В. И., Крылов В. И., Канторович Л. В.* Вариационное исчисление. Л., «Кубуч», 1933.

УДК 531.8

К ИССЛЕДОВАНИЮ РЕЗОНАНСНЫХ РЕЖИМОВ В ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМАХ

В. И. БАБИЦКИЙ, М. З. КОЛОВСКИЙ

(Москва, Ленинград)

Предлагается эффективная расчетная схема для построения приближенных решений, описывающих основные и субгармонические резонансные режимы произвольной кратности в системах виброударного действия. Проводится сравнение приближенных и точных решений.