

УДК 531.36+62-50

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ВОЗМУЩЕННЫМ ДВИЖЕНИЕМ ГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В. А. БЕЛОУС, П. И. ХРИСТИЧЕНКО

(Одесса)

Рассматривается задача аналитического конструирования оптимального регулятора для голономных механических систем при постоянных возмущающих воздействиях. В качестве примера проведена стабилизация одномассовой системы под действием периодической возмущающей силы. Показано, что наложение определенного вида дополнительных ограничений на величину обратной связи улучшает динамические свойства стабилизированной системы в переходных процессах.

1. Рассмотрим голономную механическую систему со склерономными связями, состояние которой в момент времени t определяется n -мерными векторами обобщенных координат $\mathbf{q} = \|q_1, \dots, q_n\|^T$ и скоростей $\mathbf{q}' = \|q_1', \dots, q_n'\|^T$ (индекс T обозначает операцию транспонирования). Энергетические свойства такой системы вблизи положения устойчивого равновесия характеризуются положительно определенными квадратичными формами

$$T = 1/2 \mathbf{q}'^T m \mathbf{q}', \quad \Pi = 1/2 \mathbf{q}'^T c \mathbf{q}', \quad \Phi = 1/2 \mathbf{q}'^T r \mathbf{q}' \quad (1.1)$$

в которых $m = \|m_{ij}\|$, $c = \|c_{ij}\|$, $r = \|r_{ij}\|$ ($i, j = 1, \dots, n$) — положительно определенные матрицы постоянных коэффициентов инерции, восстановления и сопротивления соответственно.

При постоянных возмущающих воздействиях $\mathbf{f}(t) = \|f_1, \dots, f_n\|^T$ механическая система будет совершать вынужденные движения около устойчивого положения равновесия. В связи с этим возникает задача о стабилизации возмущенного движения выбором управляющих сил $\mathbf{u} = \|u_1, \dots, u_n\|^T$. Уравнения движения такой системы имеют вид

$$m \mathbf{q}'' + r \mathbf{q}' + c \mathbf{q} = \mathbf{f}(t) + s \mathbf{u} \quad (1.2)$$

где $s = \|s_{ij}\|$ ($i, j = 1, \dots, n$) — квадратная матрица постоянных коэффициентов конструктивного задания управляющих сил.

Объект управления ($\mathbf{u} = 0$) описывается линейными дифференциальными уравнениями. Управляемая система будет также линейной, если вектор управляющих сил линейно зависит от обобщенных координат и скоростей

$$\mathbf{u} = -k s^T [w^{(22)} \mathbf{q}' + w^{(21)} \mathbf{q} + \mathbf{h}^{(2)}(t)] \quad (1.3)$$

Здесь $k = \|k_{ij}\|$ ($i, j = 1, \dots, n$) — положительно определенная матрица постоянных коэффициентов усиления, $w^{(22)} = \|w_{ij}^{(22)}\|$, $w^{(21)} = \|w_{ij}^{(21)}\|$ ($i, j = 1, \dots, n$) — квадратные матрицы постоянных коэффициентов стабилизирующих управлений обратной связи, $\mathbf{h}^{(2)} = \|h_1^{(2)}, \dots, h_n^{(2)}\|^T$ — стабилизирующий вектор компенсаций возмущающих воздействий.

За критерий качества оптимальных управлений (1.3) примем наименьшее значение функционала, представляющего собой средневременной интеграл от механической энергии системы при наличии средневременных интегральных квадратичных ограничений на составляющие вектора управляющих сил \mathbf{u} . Поставленная изопериметрическая задача эквивалентна задаче о минимизации функционала

$$I_1 = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} (\mathbf{q}'^T b^{(22)} \mathbf{q}' + \mathbf{q}^T b^{(11)} \mathbf{q} + \mathbf{u}^T k^{-1} \mathbf{u}) dt \quad (1.4)$$

в котором $b^{(22)} = \|b_{ij}^{(22)}\|$, $b^{(11)} = \|b_{ij}^{(11)}\|$ ($i, j = 1, \dots, n$) — неотрицательно определенные квадратные матрицы качества процесса управления, принимающие соответственно значения $1/2 m$ и $1/2 c$. Выполнение изопериметрических условий обеспечивается выбором постоянных коэффициентов матрицы k . Однако, как следует из уравнений движения объекта (1.2) при управлениях (1.3), с увеличением коэффициентов матри-

цы k величина вектора $s^T(w^{(22)}\mathbf{q}^* + w^{(21)}\mathbf{q})$ резко уменьшается. Для компенсации этого недостатка аналитического конструирования оптимальных управлений (1.3) дополнительно наложим такие среднеременные интегральные квадратичные ограничения на составляющие вектора обратной связи $s^T(w^{(22)}\mathbf{q}^* + w^{(21)}\mathbf{q})$, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \{ [s^T(w^{(22)}\mathbf{q}^* + w^{(21)}\mathbf{q})]^T k [s^T(w^{(22)}\mathbf{q}^* + w^{(21)}\mathbf{q})] + \mathbf{u}^T k^{-1} \mathbf{u} \} dt = \text{const}$$

что эквивалентно задаче о минимизации функционала

$$I_2 = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \{ (\mathbf{q}^{*T} b^{(22)} \mathbf{q}^* + \mathbf{q}^T b^{(11)} \mathbf{q}) + \mathbf{u}^T k^{-1} \mathbf{u} + [s^T(w^{(22)}\mathbf{q}^* + w^{(21)}\mathbf{q})]^T k [s^T(w^{(22)}\mathbf{q}^* + w^{(21)}\mathbf{q})] \} dt \quad (1.5)$$

Вводя фазовые векторы

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{q}^* \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ m^{-1} \mathbf{f} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix}$$

уравнения (1.2), управление (1.3) и функционалы (1.4), (1.5) представим в виде

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t) + \mathbf{S}\mathbf{U}_k, \quad \mathbf{U}_k = -\mathbf{K}_k \mathbf{S}^T (\mathbf{W}_k \mathbf{x} + \mathbf{h}_k)$$

$$I_k = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} (\mathbf{x}^T \mathbf{B}_k \mathbf{x} + \mathbf{U}_k^T \mathbf{K}_k^{-1} \mathbf{U}_k) dt \quad (k=1,2)$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{B} + \mathbf{W}_2 \mathbf{S} \mathbf{K}_2 \mathbf{S}^T \mathbf{W}_2 \quad (1.6)$$

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} 0 & -\mathbf{E} \\ m^{-1} \mathbf{c} & m^{-1} \mathbf{r} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m^{-1} \mathbf{s} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{K}_k = \begin{Bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & k_k \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_k = \begin{Bmatrix} m w_k^{(11)} & m w_k^{(12)} \\ m w_k^{(21)} & m w_k^{(22)} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{h}_k = \begin{Bmatrix} m \mathbf{h}_k^{(1)} \\ m \mathbf{h}_k^{(2)} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} b^{(11)} & 0 \\ 0 & b^{(22)} \end{Bmatrix}$$

Здесь $\mathbf{E} = \|e_{ij}\|$ ($e_{ij} = 0$, $i \neq j$; $e_{ij} = 1$, $i = j$; $i, j = 1, \dots, n$);

$w^{(12)} = \|w_{ij}^{(12)}\|$, $w^{(11)} = \|w_{ij}^{(11)}\|$ ($i, j = 1, \dots, n$) — квадратные матрицы постоянных коэффициентов стабилизирующих управлений обратной связи, $\mathbf{h}^{(1)} = \|h_1^{(1)}, \dots, h_n^{(1)}\|^T$ — стабилизирующий вектор компенсации возмущающих воздействий.

Интегральный критерий качества типа (1.5) для переходных процессов введен А. А. Красовским [1] в случае отсутствия возмущающих воздействий. Поставленная задача существенно отличается от известных [1, 2] тем, что рассматривается аналитическое конструирование оптимального регулятора при постоянных возмущающих воздействиях для установившихся процессов.

Составим первую вариацию функционалов I_k ($k=1, 2$)

$$\delta I_k = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{2}{t_f} \int_0^{t_f} (\delta \mathbf{x}^T \mathbf{B}_k \mathbf{x} + \delta \mathbf{U}_k^T \mathbf{K}_k^{-1} \mathbf{U}_k) dt \quad (1.7)$$

Из решения уравнения (1.6) находим

$$\delta \mathbf{x} = \int_0^t \exp[-\mathbf{A}(t-\tau)] \mathbf{S} \delta \mathbf{U}_k d\tau$$

Внося значение δx в выражение (1.7), после изменения порядка интегрирования в первом слагаемом подынтегрального выражения получим

$$\delta I_k = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{2}{t_f} \int_0^{t_f} \delta U_k^T \left\{ S^T \int_{\tau}^{t_f} \exp[-A^T(t-\tau)] B_k x dt + K_k^{-1} U_k \right\} d\tau$$

Из условия равенства нулю первой вариации функционалов находим управления

$$U_k = -K_k S^T \lim_{t_f \rightarrow \infty} \int_t^{t_f} \exp[-A^T(\tau-t)] B_k x d\tau \quad (1.8)$$

Так как вторые вариации функционалов положительно определены, то управления (1.8) являются оптимальными. Сравнивая выражения (1.6) и (1.8), имеем

$$W_k x + h_k = \int_t^{\infty} \exp[-A^T(\tau-t)] B_k x d\tau \quad (1.9)$$

Дифференцируя уравнения (1.9), найдем

$$W_k x' + h_k' = A^T(W_k x + h_k) - B_k x$$

после подстановки значения x' из уравнения (1.6) с учетом управления U_k получим

$$-(W_k A + A^T W_k + W_k S K_k S^T W_k - B_k) x + h_k' - (A + S K_k S^T W_k)^T h_k + W_k F = 0$$

Последние уравнения удовлетворяются при любом x , если матрицу W_k и вектор h_k определить из условий

$$W_k A + A^T W_k + W_k S K_k S^T W_k = B_k, \quad h_k' - D_k^T h_k = -W_k F, \quad D = A + S K_k S^T W_k \quad (k=1, 2) \quad (1.10)$$

Так как все собственные значения матрицы $(-A)$ имеют отрицательную действительную часть, то, согласно известной лемме Ляпунова, существует симметричная положительно определенная матрица W_k , удовлетворяющая условию (1.10).

При минимизации функционала (1.4) матрица W_1 определяется решением квадратного матричного уравнения

$$W_1 A + A^T W_1 + W_1 S K_1 S^T W_1 = B \quad (1.11)$$

При этом лишнее решение исключается требованием положительной определенности матрицы W_1 . При минимизации функционала (1.5) матрица W_2 определяется решением линейного матричного уравнения

$$W_2 A + A^T W_2 = B \quad (1.12)$$

Анализ уравнений (1.11) и (1.12) показывает, что при небольших коэффициентах усиления матрицы K_1 их решения близки, причем $x^T W_2 x > x^T W_1 x$. В этом случае решение линейного уравнения W_2 может быть принято в качестве первого приближения при нахождении решения квадратного уравнения W_1 . Таким образом ограничение на составляющие вектора связи $S^T W_2 x$, изменяющие динамические свойства управляемой системы (1.6), особенно существенны при больших коэффициентах усиления матрицы K_1 . Решением уравнения для h_k (1.10) является вектор-функция

$$h_k(t) = \exp(D_k^T t) \left[h_k(0) - \int_0^t \exp(-D_k^T \tau) W_k F d\tau \right]$$

Так как не все собственные значения матрицы $(-D_k^T)$ имеют отрицательную действительную часть, то начальные значения $h_k(0)$ следует задавать из условий существования установившихся решений уравнения (1.10): $\lim_{t_f \rightarrow \infty} h_k(t_f) \neq \infty$ при $t_f \rightarrow \infty$ т. е.

$$h_k(0) = \int_0^{\infty} \exp(-D_k^T \tau) W_k F d\tau$$

Подставляя $\mathbf{h}_k(0)$ в выражение для $\mathbf{h}_k(t)$, получим

$$\mathbf{h}_k(t) = \int_0^t \exp[D_k^T(t-\tau)] W_k F d\tau \quad (1.13)$$

Например, при действии постоянной возмущающей силы $F = \text{const}$ $\mathbf{h}_k = (D_k^T)^{-1} W_k F$, а при периодических возмущениях, удовлетворяющих уравнению $F'' = -p^2 F$

$$\mathbf{h}_k(t) = [(D_k^T)^2 + p^2 E]^{-1} [W_k F(t) + D_k^T W_k F(t)]$$

Для рассматриваемой механической системы (1.2) из (1.10) – (1.12) после исключения матрицы $w_k^{(11)}$ и вектора $\mathbf{h}_k^{(1)}$ получим следующие уравнения для определения искомых матриц $w_k^{(22)}$, $w_k^{(21)}$ и вектора $\mathbf{h}_k^{(2)}$:

$$\begin{aligned} (m w_1^{(22)}) - (m w_1^{(22)})^T &= 0, & (c w_1^{(21)}) + (c w_1^{(21)})^T + (s^T w_1^{(21)})^T k_1 (s^T w_1^{(21)}) &= b^{(11)} \\ (c w_1^{(22)}) - (c w_1^{(22)})^T + (s^T w_1^{(21)})^T k_1 (s^T w_1^{(22)}) &= (r w_1^{(21)}) - (r w_1^{(21)})^T + (s^T w_1^{(22)})^T k_1 (s^T w_1^{(21)}) \\ (r w_1^{(22)}) + (r w_1^{(22)})^T + (s^T w_1^{(22)})^T k_1 (s^T w_1^{(22)}) &= (m w_1^{(21)}) + (m w_1^{(21)})^T + b^{(22)} \quad (1.14) \\ (m w_2^{(22)}) - (m w_2^{(22)})^T &= 0, & (c w_2^{(21)}) + (c w_2^{(21)})^T &= b^{(11)} \quad (1.15) \\ (c w_2^{(22)}) - (c w_2^{(22)})^T &= (r w_2^{(21)}) - (r w_2^{(21)})^T, \\ (r w_2^{(22)}) + (r w_2^{(22)})^T &= (m w_2^{(21)}) + (m w_2^{(21)})^T + b^{(22)} \\ m \mathbf{h}_k^{(2)''} - (r + s k_k s^T w_k^{(22)})^T \mathbf{h}_k^{(2)'} + (c + s k_k s^T w_k^{(21)})^T \mathbf{h}_k^{(2)} &= \\ &= - (w_k^{(22)})^T \mathbf{f}'(t) + (w_k^{(21)})^T \mathbf{f}(t) \quad (1.16) \end{aligned}$$

Подставляя оптимальные управления (1.3) в (1.2), получим уравнения движения оптимально стабилизированной системы

$$m \mathbf{q}'' + (r + s k_k s^T w_k^{(22)}) \mathbf{q}' + (c + s k_k s^T w_k^{(21)}) \mathbf{q} = \mathbf{f}(t) - s k_k s^T \mathbf{h}_k^{(2)}(t) \quad (1.17)$$

Из анализа структуры уравнения (1.17) видно, что реализация управляющих сил обратной связи $s k_k s^T (w_k^{(22)} \mathbf{q}' + w_k^{(21)} \mathbf{q})$ возможна на основе включения в систему дополнительных связей, параметры которых находятся из уравнений (1.14) или (1.15). При отсутствии сил компенсации возмущающих воздействий $s k_k s^T \mathbf{h}_k^{(2)}(t)$ эти дополнительные связи пассивны. В том случае, когда возмущающие воздействия детерминированные, применение сил компенсации значительно улучшает качество процесса управления. Реализация управляющих сил компенсации возможна за счет активности вводимых в систему дополнительных связей, параметры которых рассчитываются из уравнений (1.16).

2. В качестве примера рассмотрим стабилизацию одномассовой системы с параметрами: масса m , жесткость c и коэффициент демпфирования r , при действии на нее периодической возмущающей силы $f(t) = f_0 \sin(pt + \varepsilon)$ (фиг. 1). Для такой системы уравнение возмущенного движения (1.2) имеет вид

$$m y'' + r y' + c y = f_0 \sin(pt + \varepsilon) + u_k, \quad u_k = -k_k [w_k^{(22)} y' + w_k^{(21)} y + h_k^{(2)}(t)] \quad (k=1,2) \quad (2.1)$$

Координата y отсчитывается от положения равновесия.

В функционалах (1.4), (1.5) примем $b^{(22)}=0$, $b^{(11)}=1/2c$, т. е. будем минимизировать средневременной интеграл от потенциальной энергии. При отсутствии ограничений на величину обратной связи ($w_k^{(22)} y^* + w_k^{(21)} y$) параметры $w_k^{(22)}$ и $w_k^{(21)}$ находим из уравнений (1.14)

$$k_1 w_1^{(21)} = c \left[\left(1 + \frac{k_1}{2c} \right)^{1/2} - 1 \right] = c_1, \quad k_1 w_1^{(22)} = r \left[\left(1 + \frac{2m}{r^2} c_1 \right)^{1/2} - 1 \right] = r_1 \quad (2.2)$$

а при ограничениях — из уравнений (1.15)

$$k_2 w_2^{(21)} = k_2/4 = c_2, \quad k_2 w_2^{(22)} = mc_2/r = r_2 \quad (2.3)$$

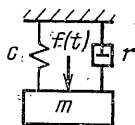
Значение компенсации возмущения $h_k^{(2)}$ определяем из уравнения (1.16)

$$h_k h_k^{(2)} = f_0 \left[\frac{c_k^2 + p^2 r_k^2}{(c + c_k - p^2 m)^2 + p^2 (r + r_k)^2} \right]^{1/2} \times \\ \times \sin \left(pt + \varepsilon + \operatorname{arctg} \frac{p(r+r_k)}{c+c_k-p^2m} - \operatorname{arctg} \frac{pr_k}{c_k} \right) = f_k(t) \quad (h=1,2) \quad (2.4)$$

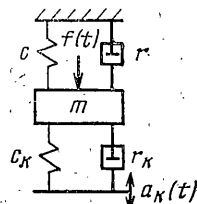
Сконструированный оптимальный регулятор

$$u_k = -[r_k y + c_k y + f_k(t)] \quad (h=1, 2) \quad (2.5)$$

реализуется с помощью дополнительных связей: упругого элемента с жесткостью c_k и демфера с коэффициентом демпфирования r_k при их кинематическом возбуждении по закону $a_k(t) = a_{0k} \sin(pt + \delta_k)$ (фиг. 2). Для стабилизированной таким образом системы уравнение движения будет



Фиг. 1



Фиг. 2

дении по закону $a_k(t) = a_{0k} \sin(pt + \delta_k)$ (фиг. 2). Для стабилизированной таким образом системы уравнение движения будет

$$m y'' + (r + r_k) y' + (c + c_k) y = f_0 \sin(pt + \varepsilon) - a_{0k} (c_k^2 + p^2 r_k^2)^{1/2} \sin[pt + \delta_k + \operatorname{arctg}(pr_k/c_k)] \quad (2.6)$$

Принимая во внимание (2.4), имеем

$$a_{0k} = \frac{f_0}{[(c + c_k - p^2 m)^2 + p^2 (r + r_k)^2]^{1/2}}, \quad \delta_k = \varepsilon + \operatorname{arctg} \frac{p(r+r_k)}{c+c_k-p^2m} - 2 \operatorname{arctg} \frac{pr_k}{c_k} \quad (2.7)$$

Сравним вынужденные колебания объекта управления ($u_k=0$)

$$y_0 = \frac{f_0}{[(c - p^2 m)^2 + p^2 r^2]^{1/2}} \sin \left(pt + \varepsilon - \operatorname{arctg} \frac{pr}{c - p^2 m} \right) \quad (2.8)$$

с колебаниями в оптимально стабилизированной системе (2.6), (2.7)

$$y_k = \frac{f_0 [(c - p^2 m)^2 + p^2 r^2]^{1/2}}{(c + c_k - p^2 m)^2 + p^2 (r + r_k)^2} \sin \left(pt + \varepsilon - \operatorname{arctg} \frac{pr}{c - p^2 m} \right) \quad (h=1,2)$$

Для этого рассмотрим отношение амплитуд

$$\eta_k = y_k / y_0 = [(c - p^2 m)^2 + p^2 r^2] / [(c + c_k - p^2 m)^2 + p^2 (r + r_k)^2] \quad (2.9)$$

При этом на объект управления со стороны дополнительных связей действует сила стабилизации (2.5)

$$u_k = -(1 - \eta_k) f_0 \sin(pt + \varepsilon) \quad (h=1, 2) \quad (2.10)$$

Таким образом, по заданным средневременным интегральным ограничениям на w_k можно найти отношение амплитуд η_k или, наоборот, по требуемому отношению амплитуд η_k можно определить величину силы стабилизации. При этом каждому значению η_k соответствует свое значение k_k .

При полной стабилизации ($\eta_k=0$, $k_k=\infty$), согласно (2.10), на объект управления со стороны дополнительных связей должна действовать сила стабилизации, равная возмущающей силе с обратным знаком. Оптимальный регулятор реализуется с помощью наложения на объект абсолютно жестких связей ($c_k=\infty$, $r_k=\infty$), т. е. в этом случае комбинированное управление по обратной связи с компенсацией возмущений вырождается в управление по возмущениям.

Выясним, какие изменения динамических свойств управляемой системы вызывает дополнительное ограничение на величину обратной связи при одном и том же уровне оптимальной стабилизации. Для этого, подставляя (2.2) и (2.3) в выражение (2.9), найдем

$$k_1 = -\frac{2}{c} [(c-p^2m)^2 + p^2r^2] \frac{1-\eta_1}{\eta_1}$$

$$k_2 + \frac{2}{c} \left[1 + \left(\frac{pm}{r} \right)^2 \right] \left(\frac{k_2}{4} \right)^2 = \frac{2}{c} [(c-p^2m)^2 + p^2r^2] \frac{1-\eta_2}{\eta_2} \quad (2.11)$$

Приравняв левые части обоих выражений (2.11), определим зависимость между значениями коэффициентов усиления при ограничениях на величину обратной связи и без таких ограничений

$$k_2 = \frac{4c}{1+(pm/r)^2} \left[\left(1 + \left[1 + \left(\frac{pm}{r} \right)^2 \right] \frac{k_1}{2c} \right)^{1/2} - 1 \right]$$

Тогда в силу (2.2) и (2.3) получим

$$c_2 = \frac{k_2}{4} = \frac{c}{1+(pm/r)^2} \left[\left(1 + \left[1 + \left(\frac{pm}{r} \right)^2 \right] \frac{k_1}{2c} \right)^{1/2} - 1 \right] < c \left[\left(1 + \frac{k_1}{2c} \right)^{1/2} - 1 \right] = c_1$$

Кроме того, при одинаковом отношении амплитуд из (2.9) находим

$$\frac{c_1 - c_2}{r_2 - r_1} = p^2 \frac{r_1 + r_2 + 2r}{c_1 + c_2 + 2(c - p^2m)} > 0 \quad \text{при} \quad p^2 < \frac{c}{m} \left(1 + \frac{c_1 + c_2}{2c} \right)$$

Так как $c_2 < c_1$, то $r_2 > r_1$. Таким образом, наложение дополнительных ограничений на величину обратной связи ($w_2^{(22)}$ $y^* + w_2^{(21)}$ y) улучшает динамические свойства стабилизированной системы в переходных процессах: при одинаковом отношении амплитуд стабилизация достигается за счет меньшей дополнительной жесткости c_2 и большого дополнительного коэффициента демпфирования r_2 .

Рассмотрим гашение вынужденных резонансных колебаний балки, вызываемых неуравновешенностью установленного на ней мотора. В качестве приведенных параметров такой одномассовой системы примем $m=100$ кг, $r=400$ нсек/м, $c=4 \cdot 10^5$ н/м, $p=(c/m)^{1/2}$, $f_0=300$ н, $\varepsilon=0$. Пусть, например, амплитуду вынужденных колебаний (2.8) $y_0=11.86 \cdot 10^{-3} \sin(63.25t - 0.5\pi)$ (м) требуется уменьшить в пять раз ($\eta_k=1/5$). По формулам (2.11) находим $k_1=0.128 \cdot 10^5$ н/м, $k_2=0.079 \cdot 10^5$ н/м. После этого параметры дополнительных связей получаем по (2.2) и (2.3): $c_1=0.032 \cdot 10^5$ н/м, $r_1=494.3$ нсек/м, $c_2=0.020 \cdot 10^5$ н/м, $r_2=494.4$ нсек/м. Параметры кинематического возбуждения этих связей находим по формулам (2.7): $a_{01}=a_{02}=5.31 \cdot 10^{-3}$ м, $\delta_1=-0.485\pi$, $\delta_2=-0.491\pi$.

Поступила 7 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский А. А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М., «Наука», 1973.
2. Янушевский Р. Т. Теория линейных оптимальных многосвязных систем управления. М., «Наука», 1973.