

НЕКОТОРЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ

М. Ф. ДИМЕНТБЕРГ, А. И. МЕНЯЙЛОВ

(Москва)

Рассмотрены два типа задач, связанных с изучением переходов виброударной системы из окрестности одного устойчивого периодического режима в окрестность другого под действием случайных возмущений. Первый тип — задачи «помехоустойчивости» заданных движений виброударных систем. Здесь исследованы двухмассовые виброударные системы с автономным и неавтономным приводом. Путем моделирования на АВМ найдены статистические характеристики времени до срыва одноударного движения.

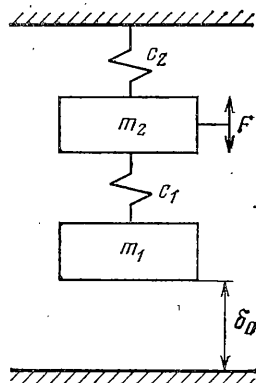
В задаче второго типа исследуется колебательная система с жесткими ограничителями, у которой переход от безударного режима к ударному отрицательно сказывается на динамической прочности системы. В этой задаче найдено математическое ожидание времени до такого перехода, средняя величина отношений времени пребывания в различных режимах движения, а также средний ударный импульс.

Отличительной особенностью многих виброударных систем является неоднозначность тех устойчивых периодических режимов, которые могут быть реализованы в таких системах при определенных условиях. В связи с этим представляет интерес исследование поведения виброударных систем при различных случайных возмущениях, которые могут приводить к флуктуационным переходам таких систем из окрестности одного в окрестность других устойчивых периодических режимов.

Такие исследования имеют также и большое прикладное значение. Во-первых, они нужны для оценки помехоустойчивости различных виброударных машин и механизмов. Здесь возникает, например, задача об оценке математического ожидания $\langle T \rangle$ времени до срыва заданного режима работы машины при наличии случайных воздействий. Другая область приложений — это некоторые колебательные системы с жесткими ограничителями, у которых переход от безударного режима колебаний к ударному может отрицательно сказываться на динамической прочности системы. Здесь возникают задачи о математическом ожидании времени до такого перехода, а также о средней величине отношения времен пребывания в различных режимах колебаний.

Статистические задачи динамики виброударных систем исследовались во многих работах [1–7], однако в большинстве из этих работ вопросы флуктуационных смен периодических режимов не рассматривались. В работах [2–6] динамика систем со случайными возмущениями исследовалась при помощи локального метода линеаризации системы в окрестности некоторого заданного периодического режима; лишь в работе [6] по результатам такого исследования для одномассового виброударника были даны оценки вероятности устойчивости одноударного режима при ограниченных по модулю случайных возмущениях. Решения, полученные с помощью нелокальных методов, известны лишь для сравнительно простых систем (в работе [1] получено решение уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова для одномассовой системы с симметричным двухсторонним ограничителем с равным единице коэффициентом восстановления при случайном возбуждении типа белого шума; в работах [3, 4] при помощи теории марковских цепей получены решения для ряда моделей в виде шарика, движущегося между ограничителями).

1. Рассмотрим виброударную систему, изображенную на фиг. 1. Уравнения движения системы в промежутках времени между ударами с уче-



Фиг. 1

том внешних возмущений $\xi(t)$ в безразмерных переменных

$$z_j = m_j \omega^2 x_j / F_0, \quad \lambda_j'^2 = c_j / m_j \omega^2, \quad \kappa = m_1 / m_2, \quad \omega t = \tau \quad (j=1, 2)$$

имеют вид

$$z_1'' + \lambda_1'^2 (z_1 - \kappa z_2) = 0, \quad z_2'' + \lambda_1'^2 (\kappa z_2 - z_1) + \lambda_2'^2 z_2 = \sin \tau + \xi(\tau/\omega) \quad (1.1)$$

Здесь $z_1 = \delta_0$, $z_1' = -Rz_1^{\circ}$, где z_1° , z_1' — скорости m_1 до и после удара, R — коэффициент восстановления, δ_0 — зазор, $F = F_0 [\sin \tau + \xi(\tau/\omega)]$. Исследуемая система является моделью широкого класса машин, применяемых для уплотнения грунта, щебенки, для свайного виброударного погружения и т. д.

Будем полагать, что возмущения в системе не выводят ее за область притяжения исследуемого однопериодного режима, и интенсивность их настолько мала, что в пределах одного периода движения виброударной системы можно ограничиться первым порядком относительно случайных отклонений от невозмущенного движения.

Точечное преобразование, осуществляемое интегральными кривыми исследуемой системы (1.1), записывается в виде

$$\begin{aligned} a \sin \tau_{n+1} - z_1^{n+1} + \sum_{i=1}^2 k_i \{ B_i \cos [\eta_i (\tau_{n+1} - \tau_n)] + \\ + A_i \eta_i^{-1} \sin [\eta_i (\tau_{n+1} - \tau_n)] \} = F_1^n \\ a \cos \tau_{n+1} - z_1^{n+1} + \sum_{i=1}^2 k_i \{ A_i \cos [\eta_i (\tau_{n+1} - \tau_n)] - \\ - B_i \eta_i \sin [\eta_i (\tau_{n+1} - \tau_n)] \} = F_2^n \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} b \sin \tau_{n+1} - z_2^{n+1} + \sum_{i=1}^2 \{ A_i \eta_{i-1} \sin [\eta_i (\tau_{n+1} - \tau_n)] + \\ + B_i \cos [\eta_i (\tau_{n+1} - \tau_n)] \} = F_3^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \cos \tau_{n+1} - z_2^{n+1} + \sum_{i=1}^2 \{ A_i \cos [\eta_i (\tau_{n+1} - \tau_n)] - \\ - B_i \eta_i \sin [\eta_i (\tau_{n+1} - \tau_n)] \} = F_4^n \end{aligned}$$

$$A_1 = (k_2 - k_1)^{-1} [R_n z_1'^n + k_2 z_2'^n + (a + b k_2) \cos \tau_n]$$

$$B_1 = (k_2 - k_1)^{-1} [-z_1'^n + k_2 z_2'^n + (a - b k_2) \sin \tau_n]$$

Коэффициенты A_2 и B_2 получаются из A_1 и B_1 заменой на k_2 и k_1 величин

$$k_1 = \frac{\lambda_2'^2 + \lambda_1'^2 \kappa + \eta_1^2}{\lambda'^2} = \frac{\lambda_1'^2 \kappa}{\lambda'^2 - \eta^2}, \quad k_2 = \frac{\lambda_2'^2 + \lambda_1'^2 \kappa - \eta_2^2}{\lambda_1'^2} = \frac{\lambda_1'^2 \kappa}{\lambda_1'^2 - \eta_2^2}$$

Величины η_1 и η_2 являются корнями частотного уравнения

$$\eta^4 + [\lambda_1'^2 (1 + \kappa) + \lambda_1'^2] \eta^2 + \lambda_1'^2 \lambda_2'^2 = 0 \quad (1.3)$$

Остальные коэффициенты определяются так:

$$a = \lambda_1'^2 \kappa / \Delta, \quad b = (\lambda_1'^2 - 1) / \Delta, \quad \Delta = (1 - \eta_1^2)(1 - \eta_2^2)$$

$$F_1^n = \frac{\lambda_1'^2 \kappa}{\eta_2^2 - \eta_1^2} \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} [\eta_2^{-1} \operatorname{sh} \eta_2(u - \tau_n) - \eta_1^{-1} \operatorname{sh} \eta_1(u - \tau_n)] \xi(u) du$$

$$F_2^n = \frac{\lambda_1'^2 \kappa}{\eta_2^2 - \eta_1^2} \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} [\operatorname{ch} \eta_1(u - \tau_n) - \operatorname{ch} \eta_2(u - \tau_n)] \xi(u) du$$

$$F_3^n = \frac{1}{\eta_2^2 - \eta_1^2} \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \left[\left(\eta_1 - \frac{\lambda_1'^2}{\eta_1} \right) \operatorname{sh} \eta_1(u - \tau_n) - \left(\eta_2 - \frac{\lambda_1'^2}{\eta_2} \right) \operatorname{sh} \eta_2(u - \tau_n) \right] \xi(u) du$$

$$F_4^n = \frac{1}{\eta_2^2 - \eta_1^2} \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} [(\lambda_1'^2 - \eta_1^2) \operatorname{ch} \eta_1(u - \tau_n) - (\lambda_1'^2 - \eta_2^2) \operatorname{ch} \eta_2(u - \tau_n)] \xi(u) du$$

Обозначим левые части уравнений (1.2) через φ_i ($i=1, \dots, 4$). Линеаризуя точечное отображение (1.2) в окрестности устойчивого одноударного периодического движения, получим систему линейных уравнений в конечных разностях относительно отклонений ударной скорости Δz_1^n массы m_1 , промежутка времени между ударами $\Delta \tau_n$, координаты Δz_2 и скорости Δz_2^n массы m_2

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_1^{n+1}} \Delta z_1^{n+1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_2^{n+1}} \Delta z_2^{n+1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_2^{n+1}} \Delta z_2^{n+1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau_{n+1}} \Delta \tau_{n+1} = \\ & = \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_1^n} \Delta z_1^n - \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_2^n} \Delta z_2^n - \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_2^n} \Delta z_2^n - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau_n} \Delta \tau_n + F_i^n \quad (i=1, \dots, 4) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Производные в (1.4) берутся в неподвижной точке отображения (1.2) $z_1^*, z_2^*, z_2^{*}, \tau_*$, координаты которой определяются из (1.2) при $F_i^n \equiv 0$ ($i=1, \dots, 4$) и подстановке: $z_1^n = \delta_0$, $z_1^n = z_1^{n+1} = z_1^*$, $z_2^n = z_2^{n+1} = z_2^*$, $z_2^n = z_2^{n+1} = z_2^*$, $\tau_n = \tau_*$, $\tau_{n+1} - \tau_n = 2\pi n$.

В силу линейности полученной системы можно последовательно рассматривать наличие только одного из трех возмущений — внешнего и параметрических флуктуаций коэффициента восстановления скорости и зазора. Например, при учете внешних широкополосных возмущений $\xi(t)$ и предположении о постоянстве R и δ_0 решение системы в конечных разностях имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta z_1^n &= \sum_{i=-\infty}^{n-1} H_{n,i} P_1^i, \quad \Delta z_2^n = \sum_{i=-\infty}^{n-1} H_{n,i} P_2^i, \quad \Delta z_2^n = \sum_{i=-\infty}^{n-1} H_{n,i} P_3^i \\ \Delta \tau_n &= \sum_{i=-\infty}^{n-1} H_{n,i} P_4^i, \quad H_{n,i} = -\lambda_1^{-i-1+n} [(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)]^{-1} + \\ &+ \lambda_2^{-i-1+n} / (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1) - \lambda_3^{n-i-1} / (\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4) + \\ &+ \lambda_4^{n-i-1} / (\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3) \end{aligned} \quad (1.5)$$

P_j^i — линейные комбинации F_k^n ($k, j=1, \dots, 4$); λ_i ($i=1, \dots, 4$) — корни характеристического уравнения устойчивой системы уравнений в конечных разностях (1.4), $|\lambda_i| < 1$. Среднеквадратические значения флуктуаций z_1, z_2, z_3, τ определяются выражениями

$$\langle (\Delta z_1^n)^2 \rangle = \sum_{i=-\infty}^{n-1} \sum_{k=-\infty}^{n-1} H_{n,i} H_{n,k} \langle P_1^i P_1^k \rangle, \quad \langle (\Delta z_2^n)^2 \rangle = \sum_{i=-\infty}^{n-1} \sum_{k=-\infty}^{n-1} H_{n,i} H_{n,k} \langle P_2^i P_2^k \rangle \quad (1.6)$$

$$\langle (\Delta z_3^n)^2 \rangle = \sum_{i=-\infty}^{n-1} \sum_{k=-\infty}^{n-1} H_{n,i} H_{n,k} \langle P_3^i P_3^k \rangle, \quad \langle (\Delta \tau_n)^2 \rangle = \sum_{i=-\infty}^{n-1} \sum_{k=-\infty}^{n-1} H_{n,i} H_{n,k} \langle P_4^i P_4^k \rangle$$

В предположении о достаточно малом времени корреляции возмущения $\xi(t)$ в рядах (1.5), (1.6) можно выполнить элементарное суммирование. Аналогичная процедура может быть проделана для случая параметрических возмущений, поскольку случайные вариации зазора и коэффициента восстановления при сделанных выше предположениях об их малости являются аддитивными членами внешних возмущений. Хотя выражения для среднеквадратических значений $\Delta z_1^n, \Delta z_2^n, \Delta z_3^n, \Delta \tau_n$ даже для дельта-коррелированных возмущений имеют громоздкий вид, алгоритмы их получения (1.5), (1.6) просты, и подсчет статистических характеристик конкретной системы не представляет затруднений.

2. До сих пор рассматривались флуктуации, не выводящие систему за область притяжения исследуемого режима, определяемого неподвижной точкой точечного отображения.

Для изучения флуктуационных переходов в другие стационарные состояния (если таковые имеются) необходимо привлечь нелокальные методы. В силу особенностей виброударных систем аналитическое рассмотрение таких переходов затруднительно. Поэтому дальнейшее исследование проводилось с помощью моделирования системы (1.1) на АВМ. Моделирование преследовало следующие задачи.

1. Исследовать ударно-частотную характеристику с целью выявления в пространстве параметров подобластей неоднозначности области существования и устойчивости одноударного режима системы (1.1), в которых могут быть реализованы два типа движения — с ударами и без ударов.

2. Определить среднее в единицу времени число срывов $n = \langle T \rangle^{-1}$ ударного движения при наличии внешних случайных возмущений в зависимости от интенсивности флуктуаций и положения точки, характеризующей стационарное движение в области неоднозначности.

Исследование областей существования и устойчивости одноударного движения на плоскости $(\omega/\lambda_1', \delta_0)$ с помощью ЦВМ показало, что при любых параметрах системы наибольшей по размерам является подобласть, лежащая в окрестности большей резонансной частоты двухмассовой линейной модели, в силу чего именно эта подобласть представляет наибольший практический интерес. Была рассмотрена¹ модель виброуплотнителя железнодорожной призмы. Параметры системы (1.1) принимали следующие значения: $\kappa=0.865$, $\lambda_1'^2=0.745$, $\lambda_2'^2=0.055$, $\delta_0=1$, $R=0.4$. Резуль-

¹ Карпов Н. А., Лобанов В. Н., Цигельный П. М. Самосинхронизирующая вибрационная машина ударного действия. Тр. межвуз. конф. по электрическим машинам ударного действия. Новосиб. электротехн. ин-т, 1967.

таты моделирования по определению среднего времени до срыва одноударного режима приведены на фиг. 2 (сплошные кривые).

Далее рассматривалась статистическая устойчивость одноударного режима движения системы при возбуждении ее от двух самосинхронизированных неуравновешенных роторов. Уравнения движения системы в промежутках времени между ударами с учетом внешних возмущений записываются в виде

$$x_1'' + \omega_1^2(x_1 - x_2) = 0 \tag{2.1}$$

$$x_2'' + \omega_2^2 x_2 + \omega_1^2(x_2 - x_1) = \sum_{i=1}^2 q_i(\varphi_i^2 \cos \varphi_i + \varphi_i'' \sin \varphi_i) + \xi(t)$$

$$\varphi_1'' + b_1 I_1^{-1} \varphi_1' = L I_1^{-1} - b I_1^{-1}(\varphi_1 - \varphi_2) + p_1 x_2'' \sin \varphi_1$$

$$\varphi_2'' + b_2 I_2^{-1} \varphi_2' = -L I_2^{-1} + b I_2^{-1}(\varphi_1 - \varphi_2) + p_2 x_1'' \sin \varphi_2$$

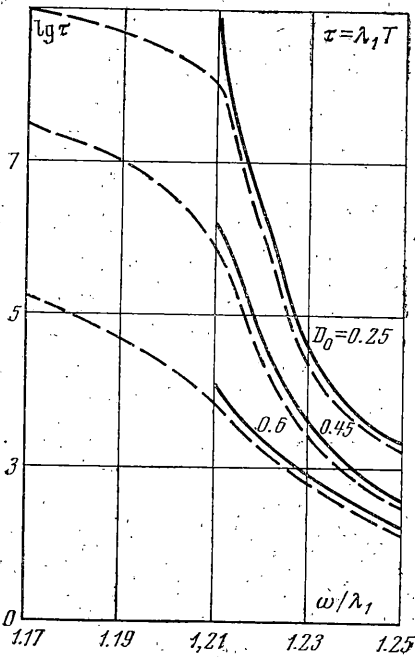
$$\omega_1^2 = c_1/m_1, \quad \omega_2^2 = c_2/m_2, \quad m_1 = m_1' + m_2' + m_1''$$

$$q_i = (m_i' r_i)/m_i, \quad p_i = (m_i' r_i)/I_i \quad (i=1,2)$$

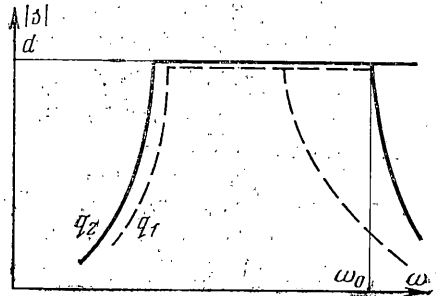
Здесь m_1'' — масса виброблока, I_2 , m_i' , r_i , L — момент инерции ротора с дебалансами, масса и эксцентриситет дебаланса ротора, движущий момент соответственно; b_1 , b , $\alpha = \text{const}$, $\xi(t)$ — широкополосный случайный процесс интенсивности $D_0/2\pi$.

С помощью моделирования исследовалось влияние флуктуационных срывов режима синхронизации на помехоустойчивость системы в пределах области неоднозначности ударно-частотной характеристики (УЧХ) и вне этой области. Параметры колебательной части моделируемой системы принимали указанные выше числовые значения.

Массы дебалансов варьировались так, чтобы амплитуды F_0 возмущающей силы были одинаковы как для неавтономного, так и автономного привода. Результаты моделирования приведены на фиг. 2 (пунктирные линии). Как видно



Фиг. 2



Фиг. 3

из фиг. 2, в области неоднозначности УЧХ ($\omega/\lambda_1' = 1.21 \div 1.25$) срывы ударного режима определяются в основном флуктуационным переходом системы с устойчивой ударной ветви УЧХ на устойчивую безударную ветвь УЧХ — сплошные кривые и пунктирные в этой области практически совпадают при больших интенсивностях возмущений $D_0 = 0.45, 0.6$.

При $D_0=0.25$, вблизи левой границы области неоднозначности, на срывах ударного движения начинают влиять флуктуационные срывы режима синхронизации. Вне области неоднозначности УЧХ наблюдаемые срывы ударного режима были вызваны срывами режима синхронного вращения дебалансов возбуждителя колебаний.

3. Рассмотрим теперь указанные во введении задачи, связанные с оценкой динамической прочности систем с виброударными взаимодействиями, применительно к одномассовой линейной системе с двусторонним симметричным ограничителем. Каждый из упоров ограничителя расположен на расстоянии d от положения равновесия системы. Уравнение движения системы в промежутках времени между ударами имеет вид

$$x'' + 2\alpha x' + \Omega^2 x = y(t), \quad \alpha \ll \Omega \quad (3.1)$$

где возмущающее воздействие $y(t)$ по предположению есть узкополосный случайный процесс, полученный в результате пропуска процесса типа белого шума через формирующий фильтр второго порядка

$$y'' + 2\beta y' + \omega_0^2 y = \zeta(t), \quad \beta \ll \omega_0 \quad (3.2)$$

Рассмотрим семейство амплитудно-частотных характеристик системы (3.1), определяемых зависимостью амплитуды s периодического с частотой ω решения уравнения (3.1) при $y(t) = q \cos \omega t$ от параметров q и ω . Пусть $\omega = \omega_0 > \Omega$, тогда существует диапазон значений амплитуды возбуждения $q_1 < q < q_2$, такой, в пределах которого при $\omega = \omega_0$ возможны два значения амплитуды вынужденных колебаний, отвечающие одноударному и безударному режимам колебаний (соответственно верхние — горизонтальные и нижние — убывающие ветви амплитудных кривых, см. фиг. 3). При $q < q_1$ и $\omega = \omega_0$ возможен лишь безударный режим, а при $q > q_2$, $\omega = \omega_0$ — лишь виброударный режим. Величина q_2 определяется из условия равенства амплитудно-безударных колебаний при $\omega = \omega_0$ величине d

$$q_2 = d [(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega_0^2]^{1/2} \quad (3.3)$$

Обратный переход от ударного движения к безударному происходит при пересечении процессом $q(t)$ уровня $q_1 = 2d\alpha\omega_0$, который определяется пересечением кривой максимальных амплитуд и линией $q = d$.

Переходя к рассмотрению стохастической задачи (3.1), (3.2) и представляя процесс $y(t)$ в виде $y(t) = q(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t)]$, примем дополнительные предположения о том, что амплитуда и фаза $q(t)$, $\psi(t)$ процесса $y(t)$ являются существенно медленно меняющимися функциями по сравнению с амплитудой s и фазой $\varphi(t)$ безударных вынужденных колебаний и по сравнению с ударным импульсом и фазой одноударных периодических колебаний. Первое из этих допущений будет заведомо справедливо при условии $\beta \ll \alpha$, второе — при $\lambda \gg \beta$, где λ есть наименьший характеристический корень системы уравнений в конечных разностях, получающейся путем линеаризации точечного отображения системой (3.1) в окрестности устойчивого одноударного периодического режима.

Воспользуемся теперь квазистатическим методом решения задачи о переходах системы (3.1) из одного режима колебаний в другой. В соответствии с этим методом следует найти решение уравнения (3.1) при $y = q \cos(\omega_0 t + \psi)$, где q , ψ — постоянные величины, а затем исследовать статистические характеристики найденного решения, рассматривая в нем q и ψ как случайные процессы, определенные стохастическим уравнением (3.2). Нетрудно видеть, что согласно сказанному выше в квазистатическом приближении переход из безударного режима в ударный должен происходить при пересечении процессом $q(t)$ уровня $q = q_2$ с положительной производной, а переход из ударного режима в безударный — при до-

стижении процессом $q(t)$ уровня $q=q_1$ с отрицательной производной.

Как известно [8], амплитуда $q(t)$ процесса $y(t)$, определенного стохастическим уравнением (3.2), есть марковский процесс, который удовлетворяет стохастическому уравнению первого порядка, которое можно записать в виде

$$\dot{q} = -\beta(q - \sigma^2/q) + \eta(t) \quad (3.4)$$

Здесь $\eta(t)$ — процесс типа белого шума с интенсивностью $2\beta\sigma^2$, а σ есть среднеквадратическое значение процесса $y(t)$. Таким образом, задачи об оценке математического ожидания времени перехода из одного режима колебаний в другой в квазистатистическом приближении сводятся к решению дифференциального уравнения Л. С. Понтрягина [9], соответствующего стохастическому уравнению (3.4). Известно общее решение этого уравнения в квадратурах, и остается лишь подставить в это решение выражения для коэффициентов сноса и диффузии уравнения (3.4), а также наложить граничные условия, соответствующие различным видам переходов.

Для задачи о времени T_{02} перехода из безударного режима в ударный (переход от начальной амплитуды $q_0 < q_2$ к амплитуде q_2) следует, помимо известного граничного условия $T_{02}(q_2) = 0$, задать условие ограниченности T_{02} . Вычисление интегралов в решении уравнения Понтрягина дает

$$T_{02} = (1/\alpha) [1/2 Ei(q_2^2/2\sigma^2) - 1/2 Ei(q_0^2/2\sigma^2) - \ln(q_2/q_0)] \quad (3.5)$$

Здесь $Ei(x)$ — интегральная показательная функция, протабулированная в [10]:

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$$

Отношение средних времен пребывания системы в безударном и ударном режимах в квазистатистическом приближении определяется как величина $\mu = T_{12}/T_{21}$. Здесь T_{12} и T_{21} — математические ожидания времен перехода амплитуды $q(t)$ соответственно с уровня $q=q_1$ до уровня $q=q_2$ и с уровня $q=q_2$ до уровня $q=q_1$. Первая из этих величин определяется формулой (3.5), в которой следует положить $q_0=q_1$. Величина T_{21} определяется из решения уравнения Понтрягина на интервале (q_1, ∞) при граничных условиях $T_{21}(q_1) = 0$ и $\lim_{q \rightarrow \infty} dT_{21}/dq = 0$. В результате находим

$$\mu = [Ei(q_2^2/2\sigma^2) - Ei(q_1^2/2\sigma^2)] / \ln(q_2^2/q_1^2) \quad (3.6)$$

Для определения среднего ударного импульса в ударном движении необходимо построить отображение цилиндра $x=d$ трехмерного фазового пространства (x, \dot{x}, t) системы (3.1) в себя с помощью фазовых траекторий. Координата x_* неподвижной точки отображения характеризует ударный импульс, который в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} X &= x/d, \quad \Phi = q/d\omega_0, \quad \xi_1 = \Omega/\omega_0, \quad \eta = \alpha/\Omega, \quad \tau = \omega_0 t \\ \kappa &= \Phi [(1 - \xi_1^{-2})^2 + 4\eta^2 \xi_1^{-2}]^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

определяется выражением

$$\begin{aligned} X &= \frac{\xi_1}{Q(1+B^2)\sin\alpha_1} [1 \pm \sqrt{1 - (1 - \kappa^2)(1+B^2)}] \\ B &= \xi_1 [Q^{-1} - e^{\eta\alpha_1} + \cos\alpha_1 + \eta \sin\alpha_1] / \sin\alpha_1 \\ O &= \frac{(1+R^{-1})\sin\alpha_1}{e^{\eta\alpha_1} + 2\cos\alpha_1 + e^{-\eta\alpha_1}}, \quad \alpha_1 = \pi l \xi_1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

величина l характеризует кратность режима. Среднее значение ударного импульса определяется соотношением

$$\langle X^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} X^2(\kappa) p(\kappa) d\kappa$$

Здесь $p(\kappa)$ — стационарная плотность вероятности процесса $\kappa(t)$, который согласно (3.7) пропорционален амплитуде возбуждения $q(t)$, удовлетворяющей стохастическому уравнению (3.4). Поэтому плотность вероятности $p(\kappa) = \kappa \sigma_1^{-1} \exp\{-\kappa^2/2\sigma_1^2\}$ и средний импульс равен

$$\langle X^2 \rangle^2 = \sigma_1^{-2} \left\{ \frac{1}{2} q_1^2 k_1^2 \sigma_1^2 \exp(-\kappa_*^2 \sigma_1^{-2}) + \frac{1}{2} q_1^2 f^2 \sigma_1^4 \exp(-\kappa_*^2 \sigma_1^{-2}) (\kappa_*^2 \sigma_1^{-2} - 1) + \right. \\ \left. + (\kappa_*^2 \sigma_1^{-2} - n^2)^{1/2} \exp(-\kappa_*^2 \sigma_1^{-2} + n^2) + \frac{1}{2} \sqrt{\pi} [1 - \Phi_1(\kappa_*^2 \sigma_1^{-2} - n^2)^{1/2}] \right\}$$

$$\Phi_1(\sqrt{\alpha}) = \int_0^{\alpha} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz, \quad q_1 = \xi_1^2 [Q^2 (1+B^2)^2 \sin^2 \pi l \xi_1]^{-1}$$

$$\kappa_* = \kappa|_{q=q_2}, \quad f^2 = 1+B^2, \quad k_1^2 = 1-B^2, \quad n^2 = 1+f^{-2}$$

Частота ударов определяется средней частотой возмущающего узкополосного процесса и кратностью установившегося ударного движения. Знание величины ударного импульса и частот удара позволяет определить динамические нагрузки в элементах системы при ударном движении.

Поступила 3 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабицкий В. И., Коловский М. З. Колебания линейной системы с ограничителем при случайных нагрузках. Изв. АН СССР. МТТ, 1967, № 3.
2. Гольдин Ю. М., Зарецкий Л. Б., Лукомский С. И. К динамике ударно-колебательных систем со случайным коэффициентом восстановления. В сб.: Динамика машин. М., «Наука», 1969.
3. Кобринский А. А. Вынужденное движение виброударной системы со случайным коэффициентом восстановления. Машиноведение, 1969, № 4.
4. Кобринский А. А. Детерминированное и стохастическое движение шарика между ограничителями. Прикл. механ., 1970, т. 6, вып. 5.
5. Эглайс В. О. Исследование виброударной системы со случайным коэффициентом восстановления. В сб.: Вопросы динамики и прочности, вып. 21. Рига, «Зинатне», 1970.
6. Метрикин В. С. К теории виброударника со случайно изменяющимися параметрами. Изв. вузов. Радиофизика, 1970, т. 13, № 4.
7. Masry S. F., Ibrahim A. M. Response of the impact damper to stationary random excitation. J. Acoust. Soc. America, 1973, vol. 53, № 1.
8. Ланда П. С., Стратонович Р. Л. К теории флуктуационных переходов различных систем из одного стационарного состояния в другое. Вест. МГУ. Сер. 3, Физ., астрон., 1962, № 1.
9. Андронов А. А., Витт А. А., Поптрагин Л. С. О статистическом рассмотрении динамических систем. ЖЭТФ, 1933, т. 3, № 3 (см. также Андронов А. А. Собр. трудов, Изд-во АН СССР, 1956).
10. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. М.—Л., Гостехиздат, 1949.