

ПЛОСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ДВУНОГОЙ ХОДЬБЫ

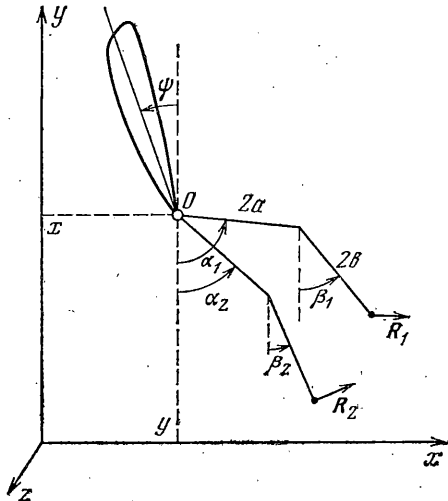
В. В. БЕЛЕЦКИЙ, Т. С. КИРСАНОВА

(Москва)

В продолжение предыдущих исследований<sup>1,2</sup> описывается этап аналитического моделирования движения двуногих шагающих аппаратов (см. также [1]). Применяется полуобратный метод [1-3]. В предположении, что ноги и корпус аппарата совершают малые плоские колебания, решения уравнений движения находятся в явном аналитическом виде.

1. Динамическая схема аппарата изображена на фиг. 1. Аппарат состоит из пяти весомих инерционных элементов: корпуса-балансира и двух одинаковых ног. Каждая нога имеет бедро длины  $2a$  и голень длины  $2b$ .

В точке  $O$  подвеса ног к корпусу расположены также центр масс платформы («таз»), которая моделируется материальной точкой массы  $m_0$ . Положение таза в пространстве задается двумя декартовыми координатами  $x, y$ , а положение ног и корпуса — угловыми координатами  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \psi$ . Эти семь величин примем в качестве обобщенных лагранжевых координат. Обозначим  $u_1, u_2$  — управляющие моменты в каждом колене аппарата,  $q_1, q_2$  — управляющие моменты между соответствующими бедрами и корпусом аппарата. Кроме того, к опорной точке каждой ноги приложена сила  $R_i$  ( $i=1, 2$ ), представляющая сумму всех сил, действующих на опорную точку.



Фиг. 1

Будем называть кратко  $R_i$  силами реакции.

Введем обозначения:  $M_1$  — масса корпуса-балансира,  $r$  — расстояние от  $O$  до центра масс корпуса,  $I$  — момент инерции корпуса относительно оси  $z$  в точке  $O$ ,  $m_a$  — масса бедра,  $a$  — расстояние от  $O$  до центра масс бедра,  $I_a^0$  — момент инерции бедра относительно оси  $z$  в точке  $O$ ,  $m_b$  — масса голени,  $b$  — расстояние от колена до центра масс голени,  $I_b$  — момент инерции голени относительно оси  $z$  в точке колена,  $M = m_0 + 2m_a + 2m_b + M_1$ ,  $I_a = I_a^0 + 4m_b a^2$ ,  $k_a = a(m_a + 2m_b)$ ,  $k_b = b m_b$ ,  $I_{ab} = 2m_b a b$ ,  $k_r = M_1 r > 0$ .

Уравнения Лагранжа второго рода [4] имеют вид

$$Mx'' - k_r(\psi'' \cos \psi - \psi'^2 \sin \psi) + \sum_{i=1}^2 [k_a(\alpha_i'' \cos \alpha_i - \alpha_i'^2 \sin \alpha_i) + k_b(\beta_i'' \cos \beta_i - \beta_i'^2 \sin \beta_i)] = Q_x$$

<sup>1</sup> Белецкий В. В. Плоские линейные модели двуногого шагаания. М., Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1973, препринт № 95.

<sup>2</sup> Белецкий В. В. Динамика двуногой ходьбы. М., Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1974, препринт № 32.

$$\begin{aligned}
 My'' - k_r(\psi'' \sin \psi + \psi'^2 \cos \psi) + \sum_{i=1}^2 [k_a(\alpha_i'' \sin \alpha_i + \alpha_i'^2 \cos \alpha_i) + \\
 + k_b(\beta_i'' \sin \beta_i + \beta_i'^2 \cos \beta_i)] = Q_y - Mg \\
 I\psi'' - k_r(x'' \cos \psi + y'' \sin \psi) - gk_r \sin \psi = Q_\psi \\
 I_a\alpha_i'' + I_{ab}\beta_i'' \cos(\alpha_i - \beta_i) + k_a(x'' \cos \alpha_i + y'' \sin \alpha_i) + \\
 + I_{ab}\beta_i'^2 \sin(\alpha_i - \beta_i) + gk_a \sin \alpha_i = Q_{\alpha_i} \quad (i=1, 2) \\
 I_b\beta_i'' + I_{ab}\alpha_i'' \cos(\alpha_i - \beta_i) + k_b(x'' \cos \beta_i + y'' \sin \beta_i) - \\
 - I_{ab}\alpha_i'^2 \sin(\alpha_i - \beta_i) + gk_b \sin \beta_i = Q_{\beta_i} \quad (i=1, 2)
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}
 Q_x = \sum_{i=1}^2 R_{ix}, \quad Q_y = \sum_{i=1}^2 R_{iy}, \quad Q_\psi = - \sum_{i=1}^2 q_i \\
 Q_{\alpha_i} = -u_i + q_i + 2a(R_{ix} \cos \alpha_i + R_{iy} \sin \alpha_i) \quad (i=1, 2) \\
 Q_{\beta_i} = u_i + 2b(R_{ix} \cos \beta_i + R_{iy} \sin \beta_i) \quad (i=1, 2)
 \end{aligned}$$

К решению уравнений (1.1) применим полуобратный метод [1-3] частичного задания координат как явных функций времени. По-видимому, наиболее целесообразно задавать движение ног, т. е. задавать координаты  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  в виде явных функций времени. Это можно сделать из разумных кинематических соображений (например путем имитации походок человека или птиц).

Искомыми будем считать следующие функции, входящие в (1.1):  $x$ ,  $y$ ,  $\psi$ ,  $u_i$ ,  $q_i$ ,  $R_{ix}$ ,  $R_{iy}$  ( $i=1, 2$ ) (1.2). Определимость функций (1.2) зависит от характера движения. Могут иметь место три типа движения: безопорное движение (полет), одноопорное движение и двуопорное движение.

В случае безопорного движения  $R_{ix}=0$ ,  $R_{iy}=0$  ( $i=1, 2$ ) по условию. Из (1.2) тогда остаются лишь семь искомых функций  $u_i$ ,  $q_i$ ,  $\psi$ ,  $x$ ,  $y$ . Для их определения имеется семь уравнений (1.1). Таким образом задача определена.

В фазе опоры на одну ногу одноопорного движения  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  заданы, тем самым однозначно заданы и  $x$ ,  $y$ . Обозначим через  $\pi$  индекс переносимой ноги, а через  $\nu$  — индекс опорной ноги. Тогда  $R_{\pi x}=0$ ,  $R_{\pi y}=0$  по условию. Искомыми являются семь функций:  $u_i$ ,  $q_i$ ,  $\psi$ ,  $R_{\nu x}$ ,  $R_{\nu y}$  ( $i=1, 2$ ). Для их определения имеется семь уравнений (1.1). Задача определена.

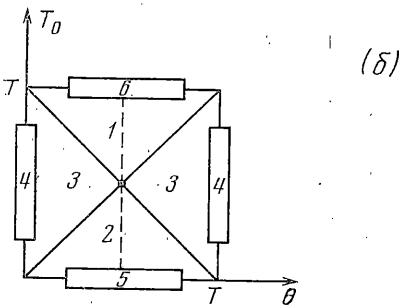
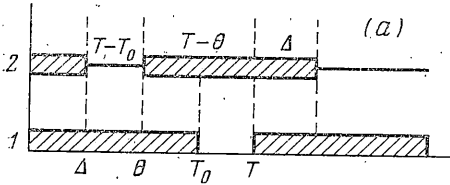
В фазе опоры на обе ноги («фаза сдвига») двуопорного движения подлежат определению девять функций:  $u_i$ ,  $q_i$ ,  $\psi$ ,  $R_{ix}$ ,  $R_{iy}$  ( $i=1, 2$ ), которые связаны лишь семью уравнениями (1.1). Задача переопределена. Необходимо доопределить искомые функции [1].

*Замечание.* Решение уравнений (1.1) относительно искомых функций, вообще говоря, неоднозначно. Например, функция  $\psi(t)$  получается из решения дифференциального уравнения, представляющего множество значений этой функции. Из имеющегося множества следует выбрать нужную конкретную функцию, пользуясь добавочными соглашениями о характере движения (например налагая на движение условия периодичности).

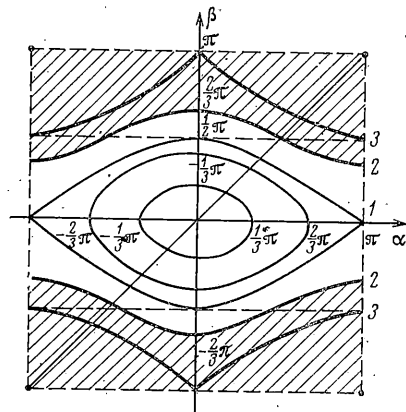
2. Будем рассматривать в дальнейшем ритмические движения, подразумевая под этим, что в процессе движения конфигурация тела периодически (с периодом  $T$ ) повторяется. Простейшие ритмические движения описываются тремя временными параметрами:  $T$  — период движения,  $T_0$  — время опоры на каждую ногу,  $\theta$  — запаздывание (время между на-

чалами опоры на первую и вторую ногу). Таким образом, будут рассматриваться трехпараметрические по ритмике движения. Это условие исключает из рассмотрения, например, походки типа болгарского или шотландского церемониального шага (четыре параметра) и более сложные многопараметрические ритмические движения.

Анализ ритмики удобно проводить с помощью диаграммы Вильсона [5]. На этой диаграмме (фиг. 2, а) одновременно изображается состояние обеих ног — опора или перенос в зависимости от текущего времени.



Фиг. 2



Фиг. 3

Цифры 1 и 2 означают номер ноги. Участки опоры выделены жирно. Из диаграммы Вильсона легко понять, что всякое движение может состояться из трех элементов: одноопорного движения (опора на одну ногу, другая переносится), двуопорного (опора на обе ноги) и безопорного (полет) движений. Составим разности:  $\Delta = T - (T - T_0) - (T - \theta) = T_0 + \theta - T$ ,  $\delta = T_0 - \theta$ . Из фиг. 2, а видно, что участки безопорного движения появляются, если  $\delta < 0$  или  $\Delta < 0$ . Если  $\delta > 0$  и  $\Delta > 0$ , то участков безопорного движения нет.

Введем следующие определения характера движения: ходьба — чередование одноопорного и двуопорного движения ( $\delta > 0$ ;  $\Delta > 0$ ); бег — чередование одноопорного и безопорного движений ( $\delta < 0$ ,  $\Delta < 0$ ); скакание — чередование одноопорного, двуопорного и безопорного движений ( $\delta < 0$ ,  $\Delta > 0$  или  $\delta > 0$ ,  $\Delta < 0$ ). Эти условия удобно представить на плоскости параметров  $\theta$ ,  $T_0$  (фиг. 2, б). Область значений этих параметров — квадрат  $0 \leq \theta \leq T$ ,  $0 \leq T_0 \leq T$  разбивается прямыми  $\delta = 0$  и  $\Delta = 0$  на подобласти осуществления ходьбы (цифра 1), бега (цифра 2) и скакания (цифра 3). Граничные значения  $\theta = 0$ ,  $\theta = T$  (цифра 4) соответствует прыжкам на двух ногах; множество движений при  $T_0 = 0$  (цифра 5) — бег с мгновенной опорой, а при  $T_0 = T$  (цифра 6) — соответствует стоянию и двуопорной ходьбе (с мгновенным переносом ног).

Из фиг. 2, б видно, что существует одна единственная (в смысле значений параметров  $\theta$ ,  $T_0$ ) походка, промежуточная между ходьбой и бегом (чередование одноопорных движений). Такую особую походку назовем одноопорной походкой. Ей отвечает центр квадрата на фиг. 2, б, т. е. значения  $\theta = 1/2 T$ ,  $T_0 = 1/2 T$ . Походку назовем правильной, если  $\Delta = \delta$ . Для

правильной походки  $\theta = 1/2T$ . Прямая, отвечающая правильным походкам, нанесена на фиг. 2, б пунктиром.

Движение каждой ноги периодически с периодом  $T$ , так что

$$\alpha_i(t+T) = \alpha_i(t), \quad \beta_i(t+T) = \beta_i(t) \quad (i=1, 2) \quad (2.1)$$

Наложим теперь еще условие повторяемости. Потребуем, чтобы вторая нога в точности повторяла движение первой ноги, но только с некоторым запаздыванием  $\theta$ , так что

$$\alpha_2(t+\theta) = \alpha_1(t), \quad \beta_2(t+\theta) = \beta_1(t) \quad (2.2)$$

Условия повторяемости исключают из рассмотрения походки с прихрамыванием, фехтовальный шаг и тому подобные периодические, но несимметричные движения.

Имеет место следующая теорема о ритме<sup>1</sup>. Пусть движение удовлетворяет условиям периодичности (2.1) и повторяемости (2.2), а также является ходьбой в смысле данного выше определения. Тогда  $\theta = 1/2T$ . Следствие: походка, удовлетворяющая условиям теоремы о ритме, является правильной.

Пусть  $x_v, y_v$  — координаты точки опоры ( $v$  — индекс опорной ноги). Тогда, как можно видеть из фиг. 1

$$y = y_v + 2(a \cos \alpha_v + b \cos \beta_v), \quad x = x_v - 2(a \sin \alpha_v + b \sin \beta_v) \quad (2.3)$$

Потребуем, чтобы при движении точки  $O$  (фиг. 1) нога находилась на постоянной высоте от горизонтальной поверхности, т. е.  $y - y_v = h = \text{const}$ , что в силу (2.3) эквивалентно условию

$$\left( \frac{2 \sin^{1/2} \alpha_v}{a_\alpha} \right)^2 + \left( \frac{2 \sin^{1/2} \beta_v}{a_\beta} \right)^2 = 1 \quad (2.4)$$

$$a_\alpha^2 = \kappa / a, \quad a_\beta^2 = \kappa / b, \quad \kappa = 2(a+b) - h$$

Для случая малых углов  $\alpha_v, \beta_v$  уравнение (2.4) дает

$$\alpha_v^2 / a_\alpha^2 + \beta_v^2 / a_\beta^2 = 1 \quad (2.5)$$

Изолинии  $h = \text{const}$  при различных постоянных значениях  $\kappa$  изображены на фиг. 3 для случая  $a < b$ : изолиния 1 — для  $h = 2(b-a)$ ,  $\kappa = 4a$ , 2 — для  $h = 0$ ,  $\kappa = 2(a+b)$ , 3 — для  $h = 2(a-b)$ ,  $\kappa = 4b$ , центр отвечает значению  $h = 2(a+b)$ ,  $\kappa = 0$ . Заштрихована область  $h < 0$  невозможного движения, причем  $a = 1$ ,  $b = 2$ . При движении изображающей точки вдоль замкнутой изолинии на фиг. 3 происходит движение вперед (координата  $x$  увеличивается) лишь в следующих ситуациях: а) изображающая точка движется против часовой стрелки и  $\beta > \alpha$  (птичья походка — «коленкой назад»); б) изображающая точка движется по часовой стрелке и  $\beta < \alpha$  (человечья походка — «коленкой вперед»).

Рассмотрим вопрос о выборе кинематики переноса ноги. Пусть фазе опоры на данную ногу соответствует движение изображающей точки по некоторой дуге изолинии  $h = h_0$ . Фазе переноса для той же ноги соответствует движение по некоторой дуге, лежащей в области  $h \leq h_0$ . Назовем походку «предельной», если дуга фазы переноса целиком совпадает с дугой изолинии  $h = h_0$ . Назовем походку «полной», если изображающая точка фазы переноса продолжает дугу фазы опоры вдоль изолинии  $h = h_0$  до полного замыкания этой изолинии. В предельных походках перенос

<sup>1</sup> Подробнее см. в работе «Плоские линейные модели двуногого шагания» (подстр. прим. к стр. 51).

ноги происходит «волоком», по поверхности. В полной походке в фазе опоры нога имеет «человечью конфигурацию», а в фазе переноса — «птичью». Предельные походки удобны для аналитического представления, в дальнейшем будем оперировать ими.

Зададим в явном виде некоторые одноопорные походки. При этом ограничимся рамками малых значений углов, так что вместо (2.4) будем рассматривать (2.5);  $\nu=1$  означает, что опора на первую ногу,  $\nu=2$  — опора на вторую ногу. Простая кинематика полной походки может быть задана следующим образом:

$$\alpha_1 = a_\alpha \cos \tau, \beta_1 = -a_\beta \sin \tau, \alpha_2 = -\alpha_1, \beta_2 = -\beta_1 \quad (2.6)$$

$$\nu=1 \text{ на } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}T, \nu=2 \text{ на } \frac{1}{2}T \leq t \leq T$$

$$\tau = \omega t - \tau_0, \omega = 2\pi / T, \sin \tau_0 = [b / (a+b)]^{1/2}, \cos \tau_0 = [a / (a+b)]^{1/2}$$

Ясно, что при этом все условия (2.1), (2.2), (2.5) удовлетворены.

Определим теперь «человечью» походку тем, что стадия переноса в изображающей плоскости  $\alpha, \beta$  проходит по той же дуге эллипса (2.5), что и в стадии опоры, но в противоположном направлении. Особо выделим «симметричную» походку, когда в момент смены опоры обе ноги полностью вытянуты и образуют симметричную конфигурацию — равнобедренный треугольник. В симметричной человеческой походке изображающая точка в плоскости  $\alpha, \beta$  проходит всю дугу  $\beta < \alpha$  эллипса (2.5). Кинематика такой походки приведена ниже.

Таблица 1

	$\nu=1, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}T$	$\nu=2, \frac{1}{2}T \leq t \leq T$
$\alpha_1$	$a_\alpha \cos(\omega t - \tau_0)$	$a_\alpha \cos(\omega t + \tau_0)$
$\beta_1$	$-a_\beta \sin(\omega t - \tau_0)$	$a_\beta \sin(\omega t + \tau_0)$
$\alpha_2$	$-a_\alpha \cos(\omega t + \tau_0)$	$-a_\alpha \cos(\omega t - \tau_0)$
$\beta_2$	$-a_\beta \sin(\omega t + \tau_0)$	$a_\beta \sin(\omega t - \tau_0)$

Здесь  $\omega, \tau_0$  те же, что и в (2.6).

Для походок, задаваемых (2.6) и табл. 1, средняя скорость движения

$$\langle V \rangle = \frac{x(\frac{1}{2}T) - x(0)}{\frac{1}{2}T} = \frac{8[\kappa(a+b)]^{1/2}}{T} \quad (2.7)$$

Пример асимметричной человеческой походки представляют данные табл. 2.

Таблица 2

	$\nu=1, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}T$	$\nu=2, \frac{1}{2}T \leq t \leq T$
$\alpha_1$	$a_\alpha \cos \Omega t$	$a_\alpha \cos \Omega (T - t)$
$\beta_1$	$-a_\beta \sin \Omega t$	$-a_\beta \sin \Omega (T - t)$
$\alpha_2$	$a_\alpha \cos \Omega (\frac{1}{2}T - t)$	$a_\alpha \cos \Omega (t - \frac{1}{2}T)$
$\beta_2$	$-a_\beta \sin \Omega (\frac{1}{2}T - t)$	$-a_\beta \sin \Omega (t - \frac{1}{2}T)$

$$\Omega = (-2/T) \arctg(b/a)^{1/2} + 2\pi/T$$

В этой походке в момент смены опоры одна нога («задняя») полностью вытянута, а голень другой ноги перпендикулярна к поверхности. Средняя скорость движения при такой походке дается формулой

$$\langle V \rangle = \frac{4}{T} [\kappa(a+b)]^{1/2} \left[ 1 + \left( \frac{a}{a+b} \right)^{1/2} \right] \quad (2.8)$$

*Замечание.* Полная походка непрерывна по углам и угловым скоростям; остальные сформированные походки разрывны по угловым скоростям. Разрыв угловых скоростей происходит в момент смены фазы опоры. Походки получаются «спотыкающимися», но можно смириться с этим фактом ради простоты аналитического описания движения. Ударное воздействие на всю систему, возникающее при немятком опускании ноги на поверхность, компенсируется, по постановке, импульсами моментов в суставах. Можно рассматривать и другие походки, обладающие требуемыми свойствами<sup>1</sup>.

3. Рассмотрим движения двуногого аппарата, при которых его корпус и ноги совершают малые колебания. Тогда уравнения (1.1) можно линеаризовать по углам и угловым скоростям и преобразовать их к виду, допускающему последовательный алгоритм их решения

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_i(t), \quad \beta_i = \beta_i(t) \quad (i=1, 2); \quad y = h, \quad y'' = 0 \\ x &= x_v^0 - 2(a\alpha_v + b\beta_v), \quad x'' = -2(a\alpha_v'' + b\beta_v''), \quad R_{1y} + R_{2y} = Mg \\ I_0 \psi'' - n_0^2 \psi &= (ml)_1 x'' - \sum_{i=1}^2 [I_\alpha \alpha_i'' + I_\beta \beta_i'' + n_\alpha^2 \alpha_i + n_\beta^2 \beta_i - 2R_{iy}(a\alpha_i + b\beta_i)] \\ R_{1x} + R_{2x} &= Mx'' - k_r \psi'' + \sum_{i=1}^2 (k_a \alpha_i'' + k_b \beta_i'') \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} u_i &= I_b \beta_i'' + I_{ab} \alpha_i'' + k_b x'' + (gk_b - 2bR_{iy}) \beta_i - 2bR_{ix} \quad (i=1, 2) \\ q_i &= (I_a + I_{ab}) \alpha_i'' + (I_b + I_{ab}) \beta_i'' + (k_a + k_b) x'' + (gk_a - 2aR_{iy}) \alpha_i + \\ &+ (gk_b - 2bR_{iy}) \beta_i - 2(a+b)R_{ix} \quad (i=1, 2) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_0 &= I + 2k_r(a+b), \quad I_\alpha = I_a + I_{ab} - 2k_a(a+b) \\ I_\beta &= I_b + I_{ab} - 2k_b(a+b), \quad n_0^2 = gk_r \\ n_\alpha^2 &= gk_a, \quad n_\beta^2 = gk_b, \quad (ml)_1 = 2M(a+b) + k_r - 2(k_a + k_b) \end{aligned}$$

В формулах (3.1) для одноопорных походок

$$R_{ix} = 0, \quad R_{iy} = 0, \quad R_{vx} \neq 0, \quad R_{vy} \neq 0 \quad (3.2)$$

где  $i$  — индекс переносимой ноги,  $v$  — индекс опорной ноги.

Уравнения (3.1) и (3.2) представляют собой последовательный алгоритм, полностью решающий задачу для одноопорных походок. Действительно, в (3.1) в каждом последующем уравнении правая часть полностью определяется левыми частями предыдущих уравнений.

В целом задача сведена к интегрированию одного, заведомо интегрируемого восьмого уравнения (относительно переменной  $\psi$ ) системы (3.1) и написанию ряда конечных формул. Поэтому все движения и действующие силы могут быть последовательно получены в замкнутом, аналитическом виде, как явные функции времени. Следует, однако, отметить возможность возникновения чисто технических трудностей при реализации описанной программы действий.

4. Применим алгоритм (3.1), (3.2) к расчету конкретных движений. Рассмотрим движение корпуса-балансира для полной походки. Согласно формулам (2.6), (3.1), (3.2) получим уравнение колебаний балансира в виде

$$I_0 \psi'' - n_0^2 \psi = -[(ml)_1 \omega^2 + Mg] \delta x \quad (4.1)$$

<sup>1</sup> Кинематики таких походок даны в работе «Плоские линейные модели двуногого шагания» (см. прим. к стр. 51).

где  $\delta x(t) = x - x_0$  как явная функция времени задается формулой

$$\delta x = \begin{cases} \sqrt{2[\kappa(a+b)]^{1/2}} \cos \omega t & \text{при } 0 \leq t \leq 1/2 T \\ \sqrt{2[\kappa(a+b)]^{1/2}} \cos \omega t & \text{при } 1/2 T \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.2)$$

По смыслу задачи представляет интерес периодическое и непрерывное вместе с первой производной решение  $\psi(t)$  уравнения (4.1).

Обозначим

$$\mu = n_0 \sqrt{I_0}, \quad D = 2 \frac{(ml)_1 \omega^2 + Mg}{I_0 \omega^2 + n_0^2} \sqrt{\kappa(a+b)}$$

Тогда искомое решение уравнения (4.1) оказывается периодичным с периодом  $1/2 T$  и на отрезке  $0 \leq t \leq 1/2 T$  имеет вид

$$\psi = D \left[ \frac{\exp(\mu t) - \exp[\mu(1/2 T - t)]}{1 - \exp(1/2 \mu T)} - \cos \omega t \right] \quad (4.3)$$

$$\psi' = D \left[ \mu \frac{\exp(\mu t) + \exp[\mu(1/2 T - t)]}{1 - \exp(1/2 \mu T)} + \omega \sin \omega t \right]$$

Среднее значение  $\psi$  на периоде

$$\langle \psi \rangle = \frac{2}{T} \int_0^{1/2 T} \psi(t) dt = 0$$

так что колебания корпуса симметричны относительно вертикали. Функция  $\psi(t)$  обращается в нуль при  $t=0, 1/4 T, 1/2 T$ .

На фиг. 4,а приведена схема описываемого передвижения двуногого устройства. Опорная нога выделена жирно. Далее согласно (3.1), (3.2) получим после некоторых преобразований

$$R_{xx} = 0, \quad R_{xy} = 0, \quad R_{yy} = Mg,$$

$$R_{vx} = \omega^2 [2M \sqrt{\kappa(a+b)} - k_r D] \cos \omega t +$$

$$+ k_r \mu^2 D \frac{\exp(\mu t) - \exp[\mu(1/2 T - t)]}{\exp(1/2 \mu T) - 1} \quad (4.4)$$

Из последнего соотношения следует

$$R_{vx}(0) = R_0 = 2\omega^2 M [\kappa(a+b)]^{1/2} -$$

$$- k_r D (\omega^2 + \mu^2) = -R_{vx}(1/2 T)$$

Иначе говоря, реакция меняет знак, и смена знака, как легко видеть, происходит при  $t=1/4 T$ . Так как заранее на  $R_{vx}(t)$  не накладывалось никаких условий, кроме условия  $R_{vx}(t) \neq 0$ , то в зависимости от заданной походки  $R_{vx}(t)$  может иметь самый разнообразный вид. Не все возможные  $R_{vx}(t)$  отвечают естественным движениям. Общие условия «естественности» походки будут приведены ниже.

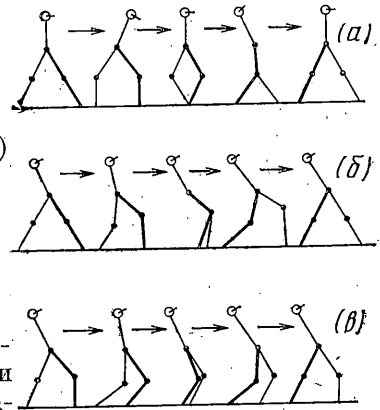
Теперь, согласно последним двум уравнениям (3.1), можно вычислить управления  $u_1, q_1$  опорной ногой и  $u_2, q_2$  — переносной ногой. Результат для опорной ноги запишем в виде

$$u_1 = \omega^2 (I_b a_\beta \sin \tau - I_{ab} a_\alpha \cos \tau) - (g k_b - 2bMg) a_\beta \sin \tau +$$

$$+ 2\omega^2 k_b [\kappa(a+b)]^{1/2} \cos \omega t - 2b R_{vx}(t) \quad (4.5)$$

$$q_1 = \omega^2 [-(I_a + I_{ab}) a_\alpha \cos \tau + (I_b + I_{ab}) a_\beta \sin \tau] + (g k_a - 2aMg) a_\alpha \cos \tau -$$

$$- (g k_b - 2bMg) a_\beta \sin \tau + 2\omega^2 (k_a + k_b) [\kappa(a+b)]^{1/2} \cos \omega t - 2(a+b) R_{vx}(t)$$



Фиг. 4

Здесь функция  $R_{vx}(t)$  вычисляется по формуле (4.4). Для переносимой ноги имеем

$$\begin{aligned} u_2 &= \omega^2 (-I_b a_\beta \sin \tau + I_{ab} a_\alpha \cos \tau) + g k_b a_\beta \sin \tau + 2\omega^2 k_b [\kappa(a+b)]^{1/2} \cos \omega t \\ q_2 &= \omega^2 [(I_a + I_{ab}) a_\alpha \cos \tau - (I_b + I_{ab}) a_\beta \sin \tau] + g k_b a_\beta \sin \tau - g k_a a_\alpha \cos \tau + \\ &\quad + 2\omega^2 (k_a + k_b) [\kappa(a+b)]^{1/2} \cos \omega t \end{aligned} \quad (4.6)$$

Вычисление закончено. Определены как явные функции времени все координаты  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $\psi$ , управляющие моменты  $u_i$ ,  $q_i$  и реакции  $R_{ix}$ ,  $R_{iy}$  ( $i=1, 2$ ). Проведенные выкладки показывают, что все описание движения может быть доведено до конца. При практических вычислениях (например на ЭВМ) нет надобности пользоваться всеми формулами, выписанными в явном виде: достаточно определить явно  $\psi(t)$  и затем пользоваться последовательным алгоритмом (3.1), (3.2).

Однако и явные формулы для управлений и реакций представляют интерес для всякого рода параметрических и числовых оценок. Например, пусть характерный размер в аппарате имеет порядок  $\sim l$  (так что  $a \sim b \sim r \sim l$ ), характерная масса имеет порядок  $m$  ( $m_a \sim m_b \sim m$ ). Тогда из формул п. 4 легко получить следующие оценки максимальных значений управлений и реакции при весьма медленном ( $\omega^2 \rightarrow 0$ ) движении:

$$\begin{aligned} R_{vx}(0) &\approx R_0 \sim 2(\kappa/l)^{1/2} Mg, \quad u_1 \sim 2l(\kappa/l)^{1/2} MgA \\ u_2 &\sim l mg (\kappa/l)^{1/2}, \quad q_1 \sim 4l(\kappa/l)^{1/2} MgA, \quad q_2 \sim 4l mg (\kappa/l)^{1/2} \end{aligned}$$

Здесь  $A$  — число, большее единицы ( $A \sim 3 \div 4$ ). Из этих оценок видно, например: горизонтальная составляющая реакции достигает лишь некоторой малой ( $\sim (\kappa/l)^{1/2} \ll 1$ ) доли от вертикальной составляющей или, что то же, от веса всего аппарата; малая величина  $(\kappa/l)^{1/2}$  определяет и порядок величин управляющих моментов; отношение величин управлений в опорной ноге к величинам управлений в переносимой ноге имеет порядок  $\sim 2A(M/m)$ ; из (4.3) следует оценка амплитуды колебаний балансира (как при  $\omega^2 \rightarrow 0$ , так и при  $\omega^2 \rightarrow \infty$ )

$$\psi \sim C(M/m) (\kappa/l)^{1/2}, \quad C \sim 1 \div 3$$

Таким образом, амплитуда колебаний балансира определяется отношением массы аппарата к массе балансира. Может оказаться, что эта амплитуда на порядок больше амплитуды колебаний ног, если масса балансира весьма мала. И, наоборот, заданная походка обеспечивается малыми колебаниями балансира достаточно большой массы.

Аналогично рассмотрим движение корпуса для симметричной человеческой походки, задаваемой табл. 1. Обозначив

$$B = \frac{S}{I_0 \omega^2 + n_0^2}$$

$$S = 2 \left( \frac{\kappa}{a+b} \right)^{1/2} \left[ (I_\alpha \omega^2 - n_\alpha^2) \left( \frac{b}{a} \right)^{1/2} - (I_\beta \omega^2 - n_\beta^2) \left( \frac{a}{b} \right)^{1/2} \right]$$

получим решение (4.1) на  $0 \leq t \leq 1/2 T$  в виде

$$\begin{aligned} \psi &= D \left[ \frac{\exp(\mu t) - \exp[\mu(1/2 T - t)]}{1 - \exp(1/2 \mu T)} - \cos \omega t \right] + \\ &+ B \left[ \frac{\exp(\mu t) + \exp[\mu(1/2 T - t)]}{1 - \exp(1/2 \mu T)} \frac{\omega}{\mu} - \sin \omega t \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$



Это решение также имеет период  $1/2T$ . Отметим, что среднее значение  $\psi$  на периоде не равно нулю

$$\langle \psi \rangle = \frac{2}{T} \int_0^{1/2T} \psi(t) dt = -\frac{2}{\pi} B \left[ 1 + \left( \frac{\omega}{\mu} \right)^2 \right] \neq 0$$

Таким образом, колебания происходят около среднего ненулевого значения  $\psi = \langle \psi \rangle$ , которое может быть отрицательным или положительным. Кроме того,  $\psi(0) = \psi_0 \neq 0$ . Положим, например, что  $m_a = m_b = m$ ,  $a = b = l$ , т. е. бедро и голень обладают одинаковыми массовыми и инерционными характеристиками. Тогда

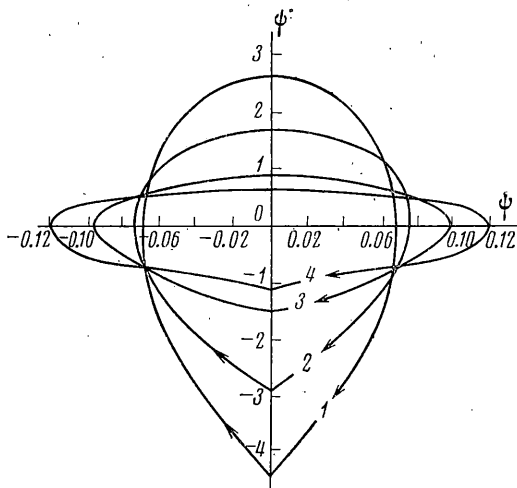
$$B = -\frac{2\sqrt{2}ml(g + 4l\omega^2)}{gM_1r + I_0\omega^2} \sqrt{\frac{\kappa}{l}} < 0 \quad (4.8)$$

и аппарат шагает, отклоняясь балансиrom в среднем назад ( $\langle \psi \rangle$  положительно), т. е. продвигается забавной походкой, выставив вперед «живот» (фиг. 4, б).

Далее, можно определить полностью реакции и управления так, как это делалось для случая полной походки.

5. Приведем результаты расчетов и энергетическое сравнение трех различных походок: полной, симметричной человеческой, несимметричной человеческой (фиг. 4, а-в).

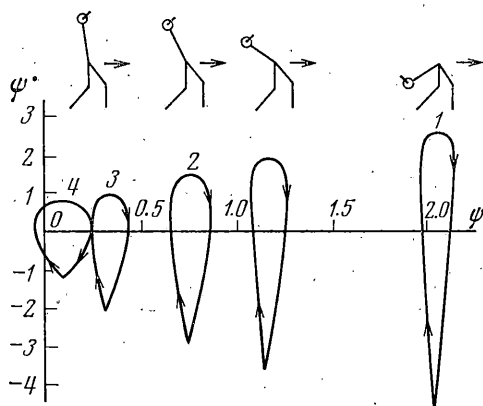
На фиг. 5 и 6 изображены траектории движения балансира-корпуса на фазовой плоскости  $\psi, \dot{\psi}$  для разных величин скорости аппарата (периода  $T$ ), причем  $\psi$  дано в радианах, а  $\dot{\psi}$  — в рад/сек. Параметры модели для обеих фигур:  $m_a = m_b = 10$  кг,  $M_1 = 40$  кг,  $M = 80$  кг,  $2a = 2b = 0.5$  м,  $r = 0.5$  м,  $h = 0.99$  м.



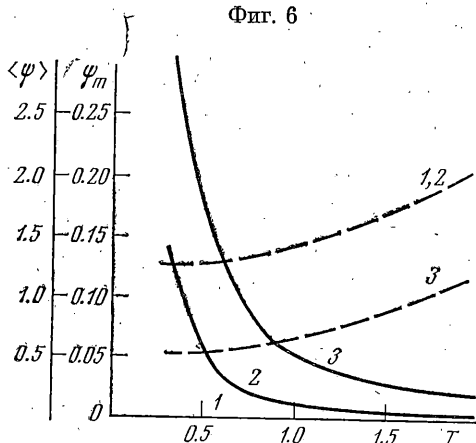
Фиг. 5

На фиг. 5 и 6 фазовые кривые под цифрами 1, 2, 3, 4 соответствуют следующим значениям: 1 — для  $T = 0.3$  сек, 2 — для  $T = 0.5$  сек, 3 — для  $T = 1$  сек, 4 — для  $T = 2$  сек. Для полной походки (фиг. 5) всегда  $\langle \psi \rangle = 0$ , в то время как для человеческих походок (фиг. 6) для рассматриваемых периодов  $\langle \psi \rangle$  положительно и растет с увеличением скорости движения (т. е. корпус большую часть времени или все время отклонен назад). При очень больших скоростях корпус может колебаться около положений  $\langle \psi \rangle = 90^\circ \div 200^\circ$ . Конечно, такие большие значения означают, что движение выпшло из области допустимости линеаризации.

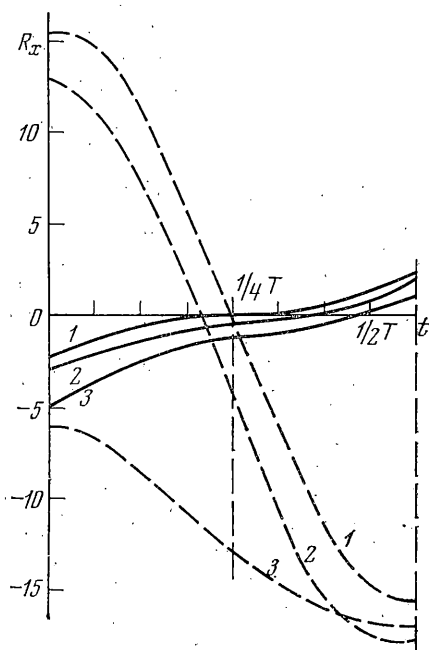
На фиг. 7 представлены зависимости среднего значения угла  $\langle \psi \rangle$  и максимального размаха  $\psi_m = \max_t(\Delta\psi) = \max_t \psi - \min_t \psi$  от величины периода  $T$  (в секундах). Причем зависимости  $\psi_m(T)$  даны пунктиром: 1 — для полной походки, 2 — для симметричной человеческой походки, 3 — для несимметричной человеческой походки. Из фигуры видно, что линеаризация задачи допустима при достаточно медленных движениях, а именно при  $T \geq 1 \div 1.5$  сек.



Фиг. 6



Фиг. 7

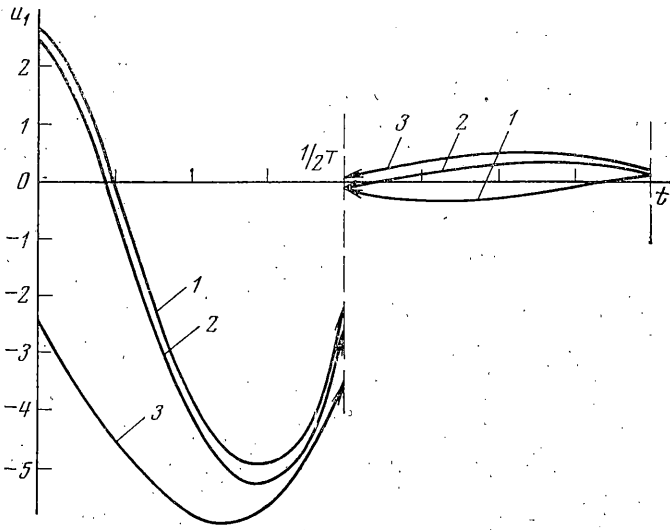


Фиг. 8

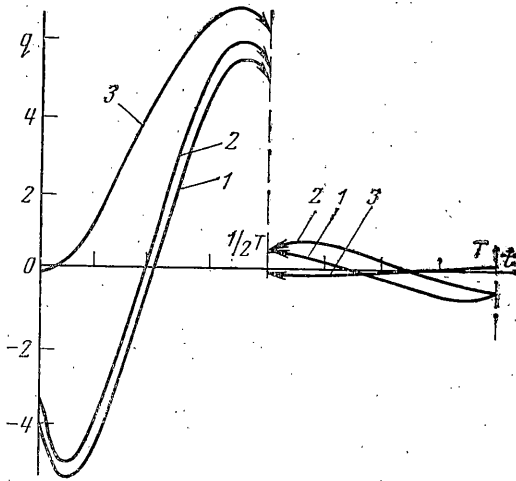
На фиг. 8 даны зависимости горизонтальной составляющей  $R_{vx}$  силы реакции в  $\kappa\Gamma$  опорной ноги от времени для разных походок: сплошными линиями для  $T=2$  сек, пунктиром — для  $T=0.7$  сек. (Цифры 1, 2, 3 означают то же, что и на фиг. 7.)

Как уже указывалось выше, реакция может быть естественной или неестественной. В работе [4] предлагается следующее условие естественности реакции для всякого момента времени:  $(\mathbf{R}_v \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot (\mathbf{e}_v \cdot \boldsymbol{\tau}) \geq 0$ , где  $\mathbf{e}_v$  — единичный вектор из точки опоры к текущей точке траектории движения;  $\boldsymbol{\tau}$  — единичный вектор касательной к траектории движения;  $\mathbf{R}_v$  — сила реакции опоры. Из этого условия для рассматриваемых плоских линейных походок следует:  $R_x(x-x_v) \geq 0 \Rightarrow R_{vx}(t) [a\alpha_v(t) + b\beta_v(t)] \leq 0$ . Анализ этого условия для рассчитанных вариантов дает следующие результаты: для полной походки реакции становятся естественными при  $T \geq 1,8$  сек, для симметричной человеческой походки при  $T \geq 2,1$  сек, для несимметричной человеческой походки при  $T > 3$  сек. Заметим, что именно для естественных походок колебания корпуса малы и не выходят за пределы, допускающие линеаризацию задачи.

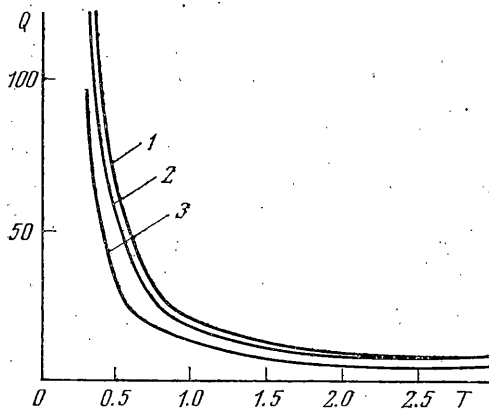
На фиг. 9, 10 даны графики управляющих моментов в  $\kappa\Gamma\text{м}$  в колене и бедре при малой скорости аппарата ( $T=2$  сек). Значения  $0 \leq t \leq 1/2 T$  соответствуют стадии опоры,  $1/2 T \leq t \leq T$  — стадии переноса. (Цифры 1, 2, 3 означают то же, что и на фиг. 7.) Заметим, что при изменении скорости



Фиг. 9



Фиг. 10



Фиг. 11

движения функции управляющих моментов меняют свой характер (даже меняют знак).

Работа управляющих моментов на межзвенных перемещениях определяется формулой

$$Q = \int_0^T \{|u_1(\alpha_1^* - \beta_1^*)| + |u_2(\alpha_2^* - \beta_2^*)| + |q_1(\alpha_1^* - \psi^*)| + |q_2(\alpha_2^* - \psi^*)|\} dt$$

На фиг. 11 представлен график  $Q(T)$  ( $Q$  дано в дж,  $T$  — в сек, цифры 1, 2, 3 означают то же, что и на фиг. 7). Видно, что значения  $Q$  очень быстро убывают с увеличением  $T$  (уменьшением скорости аппарата). Далее существует целая область значений  $T$ , где работа управлений мала:  $1 \text{ сек} \leq T \leq 3 \text{ сек}$ . Кроме того, есть и абсолютный минимум (для данной модели он достигается для всех походок при  $T=2.7 \text{ сек}$ , что отвечает скорости движения  $V=0.21 \text{ м/сек}=0.756 \text{ км/час}$  при длине шага  $L=0.282 \text{ м}$ ). Из фиг. 11 видно, что несимметричная человеческая походка энергетически наиболее выгодна. Значения  $Q$  для полной и симметричной человеческой походок очень близки и существенно превосходят соответствующее значение  $Q$  для несимметричной походки. Основное кинематическое отличие несимметричной походки от симметричной — в величине отрезка  $(x-x_v)_{t=0}$ , который назовем опорным отрезком. Из полученных результатов вытекает возможность оптимизации работы по величине опорного отрезка.

Авторы благодарят Д. Е. Охоцимского, А. К. Платонова, В. А. Самсонова за полезные замечания.

Поступила 23 IX 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. Динамика двуногой ходьбы, ч. I и II. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3, 4.
2. Vukobratovic M. A contribution to the mathematical theory of the artificial biped motion. Тр. V Международной конференции по нелинейным колебаниям, т. 3. Киев, Изд-во Ин-та матем. АН УССР, 1970.
3. Chow C. K., Jacobson D. H. Studies of human locomotion via optimal programming. Math. Biosc., 1971, vol. 10, No. 3/4, p. 239—306.
4. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
5. Wilson D. M. Insect Walking. In: Annual Rev. Entomology, vol. 11, California, Palo Alto, 1966.