МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1976

УДК 531.36

О СТАБИЛИЗАЦИИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОМОЩИ ГИРОСКОПА

В. В. КРЕМЕНТУЛО

(Москва)

В рамках аналитической теории управления [1] дано решение задачи оптимальной (в определенном смысле) стабилизации перманентного вращения, свободного тела при помощи трехстепенного гироскопа, управляемого двумя моментами. Аналогичная задача для трехстепенного гироскопа, управляемого тремя моментами, была рассмотрена ранее [2].

1. Придерживаясь ранее принятых обозначений [2], рассмотрим свободное твердое тело, главные центральные оси инерции которого направлены по осям координат $Ox_1x_2x_3$. На теле установлен уравновешенный гироскоп в кардановом подвесе таким образом, что ось внешнего кольца направлена по оси Ox_1, а неподвижная точка совпадает с центром масс тела O. Гироскоп управляется при помощи специальных двигателей, создающих моменты вокруг оси внутреннего кольца и оси ротора.

Введем следующие системы координат: $OX_1X_2X_3$ — инерциальная, $Oz_1z_2z_3$ — полуподвижная (ось Oz_1 совпадает с осью Ox_1, а оси Oz_2, Oz_3 не участвуют во вращательном движении тела вокруг оси Oz_1 по углу φ). Обозначим A_1, A_2, A_3 — моменты инерции тела относительно главных осей Ox_1, x_2, x_3 соответственно; A, C — экваториальный и осевой моменты инерции симметричного гироскопа соответственно; α_1 — угол поворота внешнего кольца относительно тела; β_1 — угол поворота внутреннего кольца, отсчитываемый от плоскости, перпендикулярной плоскости внешнего кольца; γ — угол собственного вращения ротора; q_1, q_2, q_3 — проекции мгновенной угловой скорости трехгранника $Oz_1z_2z_3$ на эти оси; β_{ik} — направляющие косинусы углов между осями $OX_1X_2X_3$ и $Oz_1z_2z_3$; u_2, u_3 — управляющие моменты, создаваемые двигателями вокруг осей внутреннего кольца и ротора соответственно; G_1, G_2, G_3 — проекции вектора кинетического момента системы на оси $Oz_1z_2z_3$; h_1, h_2, h_3 — постоянные проекции этого вектора на оси $OX_1X_2X_3$.

Рассматриваемый стационарный режим

$$\dot\varphi=\omega=\text{const},\quad q_i=0,\quad \beta_{ik}=\begin{cases}1, & i=k\\ 0 & i\neq k\end{cases}\quad \alpha_1=-\omega t,\quad \beta_1=0$$

$$\dot\gamma=\dot\gamma_0=\text{const},\quad u_2=u_3=0,\quad h_1^\circ=A_1\omega,\quad h_2^\circ=0,\quad h_3^\circ=C\dot\gamma_0 \tag{1.1}$$

представляет собой равномерное вращение тела вокруг главной оси Ox_1 с угловой скоростью ω, в то время как внешнее кольцо карданова подвеса вращается относительно тела с той же угловой скоростью ω в противоположном направлении; при этом плоскости колец подвеса перпендикулярны, ось ротора сохраняет неизменное направление в инерциальном пространстве вдоль оси $OX_3(Oz_3)$.

Рассматривая симметричное твердое тело ($A_2=A_3$), вводя вместо α_1, β_1 новые углы $\alpha=\alpha_1+\omega t$, $\beta=\beta_1$ и считая $\cos\beta\neq 0$, можно записать уравнения движения изучаемой механической системы (без учета массы карданова подвеса гироскопа) в виде [2]:

$$\begin{gathered}
A_1 q_1^{\cdot}=0,\quad A_2 q_2^{\cdot}=(A_3-A_1)q_3 q_1-A_1\omega q_3-u_2\cos\alpha+u_3\sin\alpha\sec\beta \\
A_3 q_3^{\cdot}=(A_1-A_2)q_1 q_2+A_1\omega q_2-u_2\sin\alpha-u_3\cos\alpha\sec\beta, \\
\beta_{i1}^{\cdot}=q_3\beta_{i2}-q_2\beta_{i3}\quad {\scriptstyle (i=1,\,2,\,3)}\quad {\scriptstyle (1\,2\,3)} \\
A\alpha^{\cdot}=G_1+(G_2\sin\alpha-G_3\cos\alpha)\operatorname{tg}\beta-(A_1+A)q_1- \\
-A_1\omega-(A_2+A)(q_2\sin\alpha-q_3\cos\alpha)\operatorname{tg}\beta \\
A\beta^{\cdot}=G_2\cos\alpha+G_3\sin\alpha-(A_2+A)(q_2\cos\alpha+q_3\sin\alpha) \\
G_i=\Sigma h_k\beta_{ki},\quad h_k^{\cdot}=0\quad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,3)}
\end{gathered}\tag{1.2}$$

В уравнениях (1.2) фигурируют фазовые координаты стабилизируемого тела q_i, β_{ik}, ($i, k=1, 2, 3$) и гироскопа α, β.

Изучаемое перманентное вращение тела как частное решение уравнений (1.2) примет вид

$$\begin{gathered}
q_i=0,\quad \beta_{ik}=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases},\quad \alpha=\beta=0,\quad u_2=u_3=0 \\
h_1^{\circ}=A_1\omega,\quad h_2^{\circ}=0,\quad h_3^{\circ}=C\gamma_0^{\cdot}
\end{gathered}\tag{1.3}$$

Приняв движение (1.3) за невозмущенное, обозначим возмущенное движение через q_i, $1+\beta_{ik}$ ($i=k$), β_{ik} ($i\neq k$), α, β, u_2, u_3, $h_1^{\circ}+h_1$, h_2, $h_3^{\circ}+h_3$. Здесь h_i ($i=1, 2, 3$) — начальные возмущения кинетического момента системы.

На основании (1.2) получим следующие уравнения возмущенного движения, соответствующие режиму (1.3):

$$\begin{gathered}
q_1^{\cdot}=0,\quad q_2^{\cdot}=-\omega' q_3+w_2+Q_2,\quad q_3^{\cdot}=\omega' q_2+w_3+Q_3 \\
\beta_{ii}^{\cdot}=B_{ii}\quad {\scriptstyle (i=1,\,2,\,3)},\quad \beta_{12}^{\cdot}=-q_3+B_{12},\quad \beta_{13}^{\cdot}=q_2+B_{13}\quad {\scriptstyle (1\,2\,3)}
\end{gathered}\tag{1.4}$$

$$\begin{gathered}
A\alpha^{\cdot}=h_1+\Sigma(h_k^{\circ}+h_k)\beta_{k1}+\{[h_2+\Sigma(h_k^{\circ}+h_k)\beta_{k2}]\sin\alpha- \\
-[h_3^{\circ}+h_3+\Sigma(h_k^{\circ}+h_k)\beta_{k3}]\cos\alpha\}\operatorname{tg}\beta-(A_1+A)q_1- \\
-(A_2+A)(q_2\sin\alpha-q_3\cos\alpha)\operatorname{tg}\beta
\end{gathered}\tag{1.5}$$

$$\begin{gathered}
A\beta^{\cdot}=[h_2+\Sigma(h_k^{\circ}+h_k)\beta_{k2}]\cos\alpha+[h_3^{\circ}+h_3+\Sigma(h_k^{\circ}+h_k)\beta_{k3}]\sin\alpha- \\
-(A_2+A)(q_2\cos\alpha+q_3\sin\alpha)
\end{gathered}$$

Здесь Q_2, Q_3, B_{ik} — члены порядка малости не ниже второго относительно q_i, β_{ik}, u_i ($i, k=1, 2, 3$); w_2, w_3 — новые управляющие моменты

$$\begin{gathered}
A_2Q_2=(A_3-A_1)q_3q_1-u_2(\cos\alpha-1)+u_3\sin\alpha\sec\beta \\
A_3Q_3=(A_1-A_2)q_1q_2-u_2\sin\alpha-u_3(\cos\alpha\sec\beta-1) \\
B_{i1}=q_3\beta_{i2}-q_2\beta_{i3}\quad {\scriptstyle (i=1,\,2,\,3)}\quad {\scriptstyle (1\,2\,3)} \\
A_2w_2=-u_2,\quad A_3w_3=-u_3,\quad \omega'=(A_1/A_2)\omega
\end{gathered}\tag{1.6}$$

Известно [3], что положение равновесия тела (1.3) может быть асимптотически стабилизировано по всем фазовым координатам q_i, β_{ik} ($i, k=1, 2, 3$) лишь при помощи трех управляющих моментов. В связи с этим поставим следующую задачу: так определить управления w_2, w_3 как функции фазовых координат тела q_i, β_{ik} ($i, k=1, 2, 3$), чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость нулевого решения уравнений (1.4), (1.5)

$$q_i=0,\quad \beta_{ik}=0,\quad h_k=0\quad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,3)},\quad \alpha=\beta=0\tag{1.7}$$

по части переменных q_i, β_{ik} и минимум функционала

$$\int_0^x \Omega(q_1, q_2, q_3, \beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \beta_{33}, w_2, w_3, \alpha, \beta)\, dt \tag{1.8}$$

где Ω — определенно-положительная по стабилизируемым переменным функция, которая будет найдена в процессе решения задачи.

2. Решение поставленной задачи основано на применении теорем Красовского — Румянцева об оптимальной стабилизации управляемых движений [1, 4].

Придерживаясь разработанной методики [2], проведем построение оптимального управления и функции Ω (1.8) в два этапа: сначала рассмотрим «укороченную» систему уравнений возмущенного движения, а затем обобщим полученные результаты на случай полных уравнений (1.4), (1.5).

Примем в качестве стабилизируемых переменных величины q_2, q_3, β_{11}, β_{12}, β_{13}, относительно которых возьмем следующую укороченную систему уравнений, получаемую на основании (1.4):

$$q_2^{\bullet} = -\omega' q_3 + w_2, \quad q_3^{\bullet} = \omega' q_2 + w_3 \tag{2.1}$$
$$\beta_{12}^{\bullet} = -q_3, \quad \beta_{13}^{\bullet} = q_2, \quad \beta_{11}^{\bullet} = q_3\beta_{12} - q_2\beta_{13}$$

Для изучения устойчивости нулевого решения системы (2.1)

$$q_j = 0, \quad \beta_{1i} = 0 \quad (j=2,\ 3;\ i=1,\ 2,\ 3) \tag{2.2}$$

рассмотрим функцию Ляпунова

$$2V = k\sum_{i=1}^{3} \beta_{1i}^2 + \sum_{j=2}^{3} m_j q_j^2 + 2q_2 \sum_{j=2}^{3} b_{1j}\beta_{1j} + 2q_3 \sum_{j=2}^{3} c_{1j}\beta_{1j} \tag{2.3}$$

и подынтегральную функцию минимизируемого функционала (1.8)

$$\Omega_1 = \sum_{j,k=2}^{3} e_{jk} q_j q_k + \sum_{j=2}^{3} n_j w_j^2 + F(\beta_{12}, \beta_{13}) \tag{2.4}$$

Здесь k, m_j, n_j ($j=2,\ 3$) являются исходными положительными параметрами, через которые будут выражены пока неопределенные коэффициенты b_{1j}, c_{1j}, e_{jk} ($j,\ k=2,\ 3$), а также коэффициенты квадратичной формы F.

Согласно теореме Н. Н. Красовского об оптимальной стабилизации [1] имеем

$$w_j = -\frac{1}{2n_j}\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j=2,\ 3) \tag{2.5}$$

для функции Ляпунова получаем уравнение в частных производных

$$-\frac{1}{4}\sum_{j=2}^{3} \frac{1}{n_j}\left(\frac{\partial V}{\partial q_j}\right)^2 - \omega'\left(\frac{\partial V}{\partial q_2} q_3 - \frac{\partial V}{\partial q_3} q_2\right) + \frac{\partial V}{\partial \beta_{13}} q_2 -$$

$$-\frac{\partial V}{\partial \beta_{12}} q_3 + \frac{\partial V}{\partial \beta_{11}} B_{11} + \sum_{j,k=2}^{3} e_{jk} q_j q_k + F(\beta_{12}, \beta_{13}) = 0 \tag{2.6}$$

Подставляя (2.3) в (2.6) и выделяя коэффициенты при одинаковых членах второго порядка $q_k\beta_{1j}$ (j, $k=2$, 3), получаем систему линейных алгебраических уравнений, из которой находим

$$b_{12}=-\mu k\omega', \quad c_{12}=-\mu kd_2, \quad b_{13}=\mu kd_3, \quad c_{13}=-\mu k\omega'$$

$$\mu=[d_2d_3+\omega'^2]^{-1}, \quad d_j=m_j/2n_j \quad (j=2,\ 3)$$

Затем получаем: $e_{22}=d_2^2n_2-b_{13}$, $e_{33}=d_3^2n_3+c_{12}$, $2e_{23}=\omega'(m_2-m_3)+b_{12}-c_{13}$.

Полагая для простоты $m_j=m$, $n_j=n$, $d_j=d$ ($j=2$, 3), имеем

$$b_{12}=c_{13}, \quad b_{13}=-c_{12}, \quad e_{22}=e_{33}=e=d^2n-2kd\mu, \quad e_{23}=0$$

Функция F приобретает вид $F=a(\beta_{12}^2+\beta_{13}^2)$, $a=\mu k^2/4n$

Окончательно для функции (2.4) и оптимального управления (2.5), (2.3) получаем

$$\Omega_1=e(q_2^2+q_3^2)+a(\beta_{12}^2+\beta_{13}^2)+n(w_2^2+w_3^2) \tag{2.7}$$

$$w_2=-dq_2-l_2\beta_{13}+l_3\beta_{12}, \quad w_3=-dq_3+l_2\beta_{12}+l_3\beta_{13}$$

$$l_2=kd\mu/2n, \quad l_3=k\omega'\mu/2n \tag{2.8}$$

Итак, найденное управление (2.8) обеспечивает оптимальную стабилизацию режима (2.2) по фазовым координатам q_j, β_{1j} ($j=2$, 3) в силу приближенной системы уравнений возмущенного движения (2.1).

Необходимо учесть, что из девяти переменных β_{ik} (i, $k=1$, 2, 3) независимыми являются лишь две. Можно, например, выразить все β_{ik} в виде функций двух углов Крылова θ, ψ, определяющих положение полуподвижной системы координат $Oz_1z_2z_3$ относительно инерциальной системы координат $OX_1X_2X_3$ [5]. Из сказанного следует, что если будет установлена стабилизируемость режима (1.7) полных уравнений (1.4), (1.5) по координатам β_{12}, β_{13}, то это будет означать стабилизируемость этого режима по всем β_{ik} (i, $k=1$, 2, 3).

Установим теперь, что функция Ляпунова (2.3), а значит и управление (2.8), решают задачу оптимальной стабилизации движения (1.7) по части переменных q_j, β_{1j} ($j=2$, 3) в силу исходных уравнений (1.4), (1.5). Подставив управление (2.8) в уравнения (1.4)—(1.6), вычислим полную производную по времени от функции (2.3) в силу этих уравнений

$$-V^{\boldsymbol{\cdot}}=\Omega=\Omega_1+\Omega_2 \tag{2.9}$$

Здесь Ω_1 — определенно-положительная по переменным q_j, β_{1j} ($j=2$, 3) функция (2.7), через Ω_2 обозначены члены выше второго порядка малости

$$\Omega_2=-\sum_{j=2}^{3}\left(\frac{\partial V}{\partial q_j}Q_j+\frac{\partial V}{\partial \beta_{1j}}B_{1j}\right)$$

В силу (1.6), (2.8) функция Ω_2 представляет собой знакопеременную квадратичную форму от стабилизируемых переменных q_j, β_{1j} ($j=2$, 3)

$$\Omega_2=\sum_{j,k=2}^{3} g_{jk}(q_1, \alpha, \beta)q_j\beta_{jk}$$

с коэффициентами g_{jk}, являющимися аналитическими функциями координат q_1, α, β, причем $g_{jk}(0, 0, 0) = 0$ $(j, k = 2, 3)$.

Легко видеть, что условия теоремы В. В. Румянцева (см. [4], теорема 3.1) будут выполнены, если функция (2.9) определенно-положительна по q_j, β_{1j} $(j=2, 3)$. Последнее имеет место [6], если коэффициенты g_{jk} будут достаточно малы, т. е. движение (1.7) устойчиво в обычном смысле по переменным q_1, α, β. Устойчивость движения (1.7) по q_1 очевидна ввиду наличия интеграла $q_1=\mathrm{const}$ (первое уравнение (1.4)). Устойчивость рассматриваемого движения по фазовым координатам α, β устанавливается, как и ранее [2], при помощи принципа сведения [6].

Сказанное выше имеет простой физический смысл. Действительно, в невозмущенном движении тела (1.3) ось уравновешенного гироскопа занимает неизменное направление в инерциальном пространстве и, как известно [7], обладает (без учета массы карданова подвеса) устойчивостью по обоим углам α, β. Малые возмущения тела по координатам q_i, β_{ik} не должны приводить к значительным угловым отклонениям оси установленного на нем гироскопа, т. е. устойчивость оси гироскопа по углам α, β должна сохраняться.

Итак, найденное управление (2.8) обеспечивает оптимальную (в смысле минимума функционала (1.8), (2.9)) стабилизацию перманентного вращения тела (1.3), (1.7) по фазовым координатам q_j, β_{1j} $(j=2, 3)$ (а значит в силу сказанного выше и по всем β_{ik} $(i, k=1, 2, 3)$), т. е. управление (2.8) стабилизирует в указанном смысле ось динамической симметрии тела Ox_1 в инерциальном пространстве.

Поступила 2 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. В кн.: Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
2. *Крементуло В. В., Соколова Л. Е.* Об оптимальной стабилизации вращательного движения твердого тела при помощи управляемого гироскопа. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 5.
3. *Лилов Л. К.* Об определении наименьшего числа управлений, стабилизирующих положения равновесия. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
4. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
5. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
6. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
7. *Николаи Е. Л.* Гироскоп в кардановом подвесе. М., «Наука», 1964.