

ПОВЕДЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СТУПЕНЧАТОЙ СЛУЧАЙНОЙ СИЛЫ

И. Л. АНТОНОВ

(Москва)

В работе [1] рассматривается поведение линейного осциллятора под действием силы, представляющей собой стационарную случайную функцию времени с равным нулю математическим ожиданиям. Как видно из этой работы, амплитуда колебаний осциллятора в среднем по ансамблю выборочных функций будет со временем неограниченно расти, если спектральная плотность силы отлична от нуля на частоте, совпадающей с частотой собственных колебаний осциллятора. При этом остается неясным, будет ли этот рост характерным для всех или некоторых выборочных функций и что качественно представляют собой выборочные функции случайного процесса на выходе системы.

В предлагаемой работе показано, что при некотором частном виде стационарной случайной силы амплитуда колебаний осциллятора, во-первых, не ограничена с вероятностью единица и, во-вторых, с той же вероятностью за бесконечное время бесконечно много раз обращается в нуль, причем математическое ожидание времени между двумя последовательными обращениями амплитуды в нуль равно бесконечности.

1. Рассмотрим задачу о движении линейного осциллятора

$$x'' + x = F(t) \quad (1.1)$$

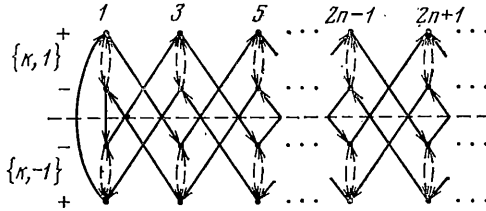
где $F(t)$ — случайная функция, реализации которой постоянны на интервалах времени длиной T и принимают значения 1 или (-1) , причем переход от одного значения к другому происходит скачком, в конце указанных интервалов времени по следующему закону: с вероятностью p происходит изменение значения, и с вероятностью q значение функции остается прежним, $p+q=1$. Если точки переключения различных реализаций равномерно разбросаны на отрезке $[0, T]$, то $F(t)$ представляет собой стационарную случайную функцию.

Исследуем случай $T=\pi$. Рассматривая движение на фазовой плоскости (x, x') , заметим, что при условии $T=\pi$ фазовые траектории состоят из полуокружностей с центрами в точках $(1, 0)$, если $F(t)=1$, и $(-1, 0)$, если $F(t)=-1$.

Будем рассматривать движение системы (1.1) при нулевых начальных условиях и считать, что для рассматриваемой реализации момент $t=0$ совпадает с одним из моментов переключения функции $F(t)$. Если это предположение не выполнено, решение системы будет состоять из двух частей, одна из которых совпадает с изучаемой, а вторая представляет собственные колебания системы; поправки, возникающие за счет второй части, не меняют существа получаемых выводов.

Из сказанного следует, что переход фазовой точки от движения по полуокружности с центром в $(1, 0)$ к движению по полуокружности с центром в $(-1, 0)$ может происходить только при пересечении ею оси абсцисс.

Будем считать, что система находится в состоянии $\{k, 1\}$, если точка движется в верхней полуплоскости по окружности радиуса k с центром в $(1, 0)$, и в состоянии $\{-k, 1\}$, если она движется по той же окружности, но в нижней полуплоскости. Нетрудно видеть, что множество возможных состояний системы можно записать в виде: $\{\pm(2m-1), \pm 1\}$, $m=1, 2, 3, \dots$. Переход системы из одного состояния в другое будет происходить так: из состояния $\{k, i\}$ система с вероятностью q перейдет в состояние $\{-k, i\}$ и с вероятностью p в состояние $\{-(k+2), -i\}$, $i=\pm 1, k=1, 3, 5, \dots$. Отсюда следует, что процесс переходов системы из одного состояния в другое можно описать с помощью однородной марковской цепи со счетным



Фиг. 1

множеством состояний. Граф, соответствующий этому процессу, представлен на фиг. 1.

Каждая вершина графа соответствует состоянию системы, цифры над вертикальными рядами точек означают амплитуды (радиусы полуокружностей), знаки перед горизонтальными рядами — знаки амплитуд, $\{k, 1\}$ и $\{k, -1\}$ слева от графа показывают, что два верхних ряда соответствуют состояниям $\{k, 1\}$, а два нижних — состояниям $\{k, -1\}$. Здесь и далее сплошные стрелки задают переходы с вероятностью p , пунктирные — с вероятностью q .

Поскольку множество состояний счетно, каждому состоянию можно поставить в соответствие число натурального ряда j .

Пусть $r_j(n)$ обозначает вероятность того, что система на интервале времени $((n-1)T, nT)$ находится в состоянии j , а r_{ij} — вероятность того, что система после одного переключения из состояния i перейдет в состояние j . Для краткости, в дальнейшем, интервал времени $((n-1)T, nT)$ будем называть n -м тактом. Согласно формуле полной вероятности

$$r_j(n) = \sum_i r_i(n-1) r_{ij} \quad (n=1, 2, 3, \dots, j=1, 2, 3, \dots) \quad (1.2)$$

суммирование производится по всем состояниям системы.

Если заданы начальные вероятности $r_i(0)$, система уравнений (1.2) позволяет определить распределение вероятностей в любой момент времени.

Получившаяся марковская цепь позволяет произвести укрупнение состояний [2], т. е. ввести подмножества X_k множества всех состояний X так, что процесс переходов системы из X_k в X_l описывается марковской цепью с вероятностями перехода

$$p_{kl} = \sum_{i \in X_l} r_{ki}$$

Вероятность того, что система на n -м такте находится в X_k , обозначим

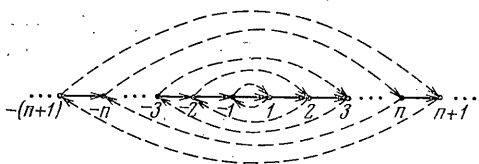
$$p_k(n) = \sum_{j \in X_k} r_j(n)$$

Для рассматриваемой марковской цепи указанные подмножества представляют собой пары состояний

$$\{2k-1, 1\}, \{-(2k-1), -1\}; \{-(2k-1), 1\}, \{(2k-1), -1\} \quad (k=1, 2, \dots)$$

Граф, иллюстрирующий процесс переходов между найденными подмножествами, изображен на фиг. 2.

Числами натурального ряда обозначены подмножества, образованные парами состояний $\{2k-1, 1\}, \{-(2k-1), -1\}$, отрицательными числами — подмножества, образованные парами $\{-(2k-1), 1\}, \{(2k-1), -1\}$.



Фиг. 2

В последующем изложении используются понятия и теоремы, относящиеся к однородным марковским цепям, подробное рассмотрение которых можно найти в [3, 4].

Из графа, представленного на фиг. 2, видно, что из любого состояния изучаемой марковской цепи можно попасть в любое другое состояние. Такая марковская цепь называется неприводимой. Кроме того, вероятности перехода за один такт, как легко видеть из фиг. 2, обладают следующим свойством:

$$\sum_i p_{ij} = \sum_j p_{ij} = p + q = 1$$

Матрица вероятностей перехода $\|p_{ij}\|$, обладающая указанным свойством, называется дважды стохастической [3].

Имеет место следующая теорема [3]:

Теорема 1. Если матрица вероятностей перехода бесконечной неприводимой марковской цепи является дважды стохастической, то все состояния этой цепи или невозвратные, или возвратные нулевые.

Не останавливаясь подробно на определениях возвратности или невозвратности состояния, отметим свойства этих состояний, важные для проводимого исследования: если состояние возвратно, то система с вероятностью единица за бесконечное время побывает в этом состоянии бесконечно много раз; если же состояние невозвратно, то на бесконечном интервале времени система с вероятностью единица лишь конечное число раз побывает в этом состоянии; другими словами, после некоторого конечного момента времени она никогда больше не возвращается в него [4].

Если состояния рассматриваемой цепи невозвратны, то вследствие структуры графа, изображенного на фиг. 2, для любого состояния k наступит такой момент времени t_k ($t_k < \infty$), что при $t > t_k$ система будет находиться только в состояниях, расположенных справа от k . В противном случае система была бы вынуждена находиться бесконечное время в множестве, состоящем из конечного числа состояний, что противоречит предположению о невозвратности состояний.

Таким образом, в случае невозвратности состояний рассматриваемого процесса происходил бы необратимый рост амплитуды колебаний, т. е. для каждого значения амплитуды наступил бы момент времени, начиная с которого амплитуда могла быть только больше.

Напротив, в случае возвратности состояний система бесконечно много раз побывает во всех состояниях, в том числе в состояниях 1 и (-1) и, следовательно, бесконечно много раз попадет в начало координат на фазовой плоскости (x, x') , т. е. амплитуда колебаний бесконечно много раз обратится в нуль.

Чтобы определить, к какому типу относятся состояния изучаемой марковской цепи, предположим, что $p_{-1}(0)=1$ и воспользуемся следующим критерием [3].

Теорема 2. При условии $p_{-1}(0)=1$ состояние (-1)

возвратно, если $\sum_{n=1}^{\infty} p_{-1}(n) = \infty$ и невозвратно, если $\sum_{n=1}^{\infty} p_{-1}(n) < \infty$

В силу теоремы 1 все остальные состояния будут одновременно с состоянием (-1) возвратными или невозвратными.

Ответ на вопрос, к какому типу принадлежат состояния рассматриваемой марковской цепи, дает возможность качественно представить себе процесс колебаний. Для количественной оценки развития процесса определим математическое ожидание времени, необходимого системе для первого попадания в состояние k .

Чтобы решить поставленные задачи, предположим, что состояние k является поглощающим, т. е. $p_{kk}=1$. Тогда, очевидно, вследствие начальных условий $p_{-1}(0)=1$ и структуры графа (фиг. 2) $p_j(n)=0$ для $|j|>k$ и всех n .

Считая, что вероятности переходов за один такт для всех остальных состояний остаются прежними, и обозначая $p_i'(n)$ вероятность нахождения системы на n -м такте в состоянии i при условии, что состояние k является поглощающим ($|i|<k$), получим $p_k'(n)=p_{k-1}'(n-1)p$, где $p_k'(n)$ — вероятность первого попадания системы в состояние k на n -м такте.

Обозначая через $\tau(k)$ математическое ожидание времени первого попадания системы в состояние k , с учетом того, что на каждый такт затрачивается π единиц времени, можем записать

$$\tau(k) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n p_k'(n) \quad (1.3)$$

Обозначая

$$P(n, k) = \sum_{|i|<k} p_i'(n)$$

получим

$$p_k'(n) = P(n-1, k) - P(n, k)$$

где, как следует из определения, $P(n, k)$ есть вероятность того, что система на n -м такте еще не попала в состояние k .

Подставляя найденное выражение в (1.3), получим

$$\tau(k) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n [P(n-1, k) - P(n, k)] = \pi \sum_{n=1}^{\infty} P(n-1, k) \quad (1.4)$$

Для определения сумм, входящих в формулу (1.4) и теорему 2, воспользуемся методом производящих функций.

Введем обозначения

$$P^\circ(s, k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(n, k) s^n, \quad P_j^\circ(s, k) = \sum_{n=1}^{\infty} p_j'(n, k) s^n \quad (|j| < k)$$

Тогда

$$\tau(k) = \pi[1 + P^\circ(1, k)], \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_{-1}(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{-1}^\circ(1, k) \quad (1.5)$$

Используя соотношения (1.2), запишем систему для определения $p_i'(n)$

$$p_1'(n) = p_{-1}'(n), \quad p_j'(n) = p p_{j-1}'(n-1) + q p_{-j}'(n-1) \quad (j=2, 3, \dots, k-1)$$

$$p_{-i}'(n) = p p_{-(i+1)}'(n-1) + q p_i'(n-1) \quad (i=1, 2, \dots, k-1), \quad p_k'(n) = p p_{k-1}'(n-1)$$

Для производящих функций, с учетом начальных условий $p_{-1}(0) = 1$, получим следующие уравнения:

$$P_1^\circ(s, k) = s + s P_{-1}^\circ(s, k), \quad P_j^\circ(s, k) = p s P_{j-1}^\circ(s, k) + q s P_{-j}^\circ(s, k) \quad (j=2, 3, \dots, k-1) \quad (1.6)$$

$$P_{-i}^\circ(s, k) = p s P_{-(i+1)}^\circ(s, k) + q s P_i^\circ(s, k) \quad (i=1, 2, \dots, k-1), \quad P_k^\circ(s, k) = p s P_{k-1}^\circ(s, k)$$

Решая полученную систему линейных уравнений, найдем $P_{-1}^\circ(1, k) = k p / q$ и, следовательно, согласно теореме 2 состояние (-1) является возвратным, поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{-1}(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{-1}^\circ(1, k) = \infty \quad \text{при} \quad q > 0$$

а при $0 < q < 1$ вместе с ним являются возвратными и все остальные состояния системы (при $q=1$ система будет все время находиться в состояниях (-1) и 1).

Таким образом, если $F(t)$ не вырождается в детерминированную функцию времени, т. е. $p \neq 0$ и $q \neq 0$, все состояния рассматриваемой марковской цепи будут возвратными и, следовательно, амплитуда колебаний будет бесконечно много раз обращаться в нуль.

В теореме 2 утверждается, что при выполнении указанных условий состояния системы будут возвратными и нулевыми. Состояние называется нулевым, если оно возвратно, и математическое ожидание случайной величины, равной интервалу времени между двумя последовательными возвращениями в это состояние, бесконечно.

Таким образом математическое ожидание случайной величины, равной интервалу времени между двумя последовательными обращениями амплитуды колебаний в нуль, бесконечно.

Для вычисления $\tau(k)$ заметим, что

$$p p_{k-1}'(n-1) = P(n-1, k) - P(n, k)$$

Переходя к производящим функциям, с учетом $p_{-1}(0) = 1$ можем записать $p s P_{k-1}^\circ(s, k) = s + s P^\circ(s, k) - P^\circ(s, k)$, откуда

$$P^\circ(s, k) = \frac{s}{1-s} [1 - p P_{k-1}^\circ(s, k)] \quad (1.7)$$

Найдя $P_{k-1}^\circ(s, k)$ по правилу Крамера из (1.6), заметим, что выражение $[1 - pP_{k-1}^\circ(s, k)]$ содержит множитель $(1-s)$ и, следовательно в (1.7) можно подставить $s=1$.

Вычислив $P^\circ(1, k)$, согласно (1.5) получим

$$\tau(k) = \pi \left[1 + \frac{k(1+kq)}{p} \right] = \pi \frac{q(k^2-1) + (k+1)}{1-q} \quad (1.8)$$

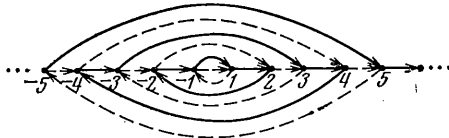
Заметим, что если k велико, $\tau(k)$ имеет порядок k^2 . При $q \ll 1$ и не слишком больших k $\tau(k) \approx (k+1)\pi$. Заметим также, что $\tau(k) = (k+1)^2\pi$ при $p=q=1/2$.

2. Рассмотрим случай $T=\pi/2$. Будем считать, что начальные условия нулевые и что момент $t=0$ совпадает с одним из моментов переключения функции $F(t)$. В этом случае фазовая траектория состоит из кусков (четвертей) окружностей с центрами в точках $(1, 0)$ или $(-1, 0)$. Однако теперь в момент переключения фазовая точка не будет находиться на оси $x=0$, и радиус окружности, по которой движется точка в момент переключения (амплитуда), можно разложить на две составляющих: одну, лежащую на оси $x=0$, и вторую, параллельную оси $x=0$.

Поскольку при переключении происходит мгновенная смена положения центра окружности, очевидно, что меняется при этом только та составляющая амплитуды, которая лежит на оси $x=0$. За один такт происходит поворот радиуса на угол $\pi/2$ и, следовательно, в момент следующего переключения меняться будет другая составляющая.

Таким образом, каждая составляющая меняется через такт, причем закон изменения аналогичен описанному выше.

Повторяя рассуждения п. 1, получим, что процесс изменения одной из составляющих амплитуды описывается марковской цепью, которой соответствует граф, изображенный на фиг. 3.



Фиг. 3

Точки 1 и (-1) здесь обозначают подмножества состояний, для которых значение исследуемой составляющей равно нулю, точки $2n, 2n+1, (-2n), -(2n+1), n=1, 2, \dots$ — подмножества состояний, для которых значение составляющей равно n .

Составив для данного случая уравнения, подобные уравнениям (1.6), и решив их, получим $P_{-1}^\circ(1, k) = k(p^2+q^2)/pq$.

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{-1}(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{-1}^\circ(1, k) = \infty$$

и, следовательно, согласно теореме 2 состояние (-1) , а вместе с ним и все остальные состояния марковской цепи, представленной на фиг. 3, являются возвратными нулевыми.

Для математического ожидания времени первого попадания в состояние k (k — четное) получим следующую формулу:

$$\tau(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{k[q + 2pq + (\frac{1}{2}k - 1)(p^2 + q^2)]}{pq} \right\} \quad (2.1)$$

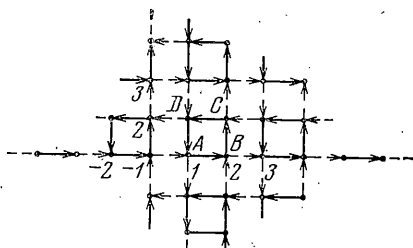
Анализируя эту формулу, замечаем, что для того, чтобы $\tau(k)$ было конечным, необходимо, чтобы и p и q были отличны от нуля и что при любых значениях p и q порядок величины $\tau(k)$ определяется членом $\frac{1}{2}k^2(p^2 + q^2)p^{-1}q^{-1}$.

Отметим, что при $p=q=1/2$ графы, изображенные фиг. 2 и 3, совпадают и значения в этом случае

$$\tau(k) = \pi / 2(k+1)^2 \quad (2.2)$$

Определение поведения одной из составляющих амплитуды еще не дает возможности судить о поведении полной амплитуды.

Граф, описывающий поведение полной амплитуды, имеет вид



Фиг. 4

Так же, как на фиг. 3, вершины графа с абсциссами $2n$, $2n+1$ имеют одну и ту же величину первой составляющей — n . Аналогично, по ординатам вершины определяется значение второй составляющей.

Так как провести полное исследование, подобное проделанному в предыдущих случаях, не представляется возможным ввиду сложности получающихся уравнений, ограничимся выяснением того, к какому типу принадлежат состояния данной цепи.

Поскольку матрица вероятностей переходов удовлетворяет условиям теоремы 1, то все состояния или невозвратные или возвратные нулевые.

На фиг. 4 легко видеть, что приведенный граф состоит из четверок состояний, например A , B , C , D , образующих квадраты, стороны которых изображают переходы с вероятностью p .

Эти квадраты, в свою очередь, связаны переходами с вероятностью q .

Точки, лежащие в одинаково расположенных вершинах всех квадратов, образуют укрупненные состояния [2]. Поэтому переходы между этими подмножествами можно описать с помощью марковской цепи. Используя теоремы об асимптотическом поведении марковских цепей [3], нетрудно показать, что по прошествии достаточно большого интервала времени с момента начала процесса вероятность того, что система в произвольный момент времени находится в одном из четырех указанных подмножеств, будет равна $1/4$.

Поэтому, если известно, что в произвольный момент времени система находится в одном из состояний A , B , C или D , то вероятность ее нахождения в этот момент в состоянии A (или B , C , D) равна $1/4$.

Обозначим $p(A|B)$ вероятность того, что система, находясь в данный момент времени в состоянии B , выйдет из данного квадрата в соседний через состояние A . Очевидно

$$p(A|A) = q \sum_{i=0}^{\infty} p^{4i} = \frac{q}{1-p^4}, \quad p(B|A) = pq \sum_{i=0}^{\infty} p^{4i} = \frac{pq}{1-p^4}$$

$$p(C|A) = p^2q \sum_{i=0}^{\infty} p^{4i} = \frac{p^2q}{1-p^4}, \quad p(D|A) = p^3q \sum_{i=0}^{\infty} p^{4i} = \frac{p^3q}{1-p^4}$$

Вероятность того, что система, находясь в произвольный момент времени в одном из состояний квадрата $ABCD$, выйдет из него через состояние A , согласно формуле полной вероятности, будет равна

$$p(A) = 1/4 p(A|A) + 1/4 p(A|B) + 1/4 p(A|C) + 1/4 p(A|D) = 1/4$$

т. е. если система в произвольный момент времени находится в квадрате $ABCD$, то в каждый из соседних квадратов она попадет с вероятностью $1/4$.

Из сказанного ясно, что асимптотическое поведение изучаемой марковской цепи, рассматриваемое как процесс переходов из квадрата в квадрат, совпадает с поведением частицы при симметричном блуждании по двумерной решетке. Но состояния марковской цепи, описывающей двумерное симметричное блуждание, — возвратные и нулевые, следовательно, таковыми являются и состояния рассматриваемой цепи.

3. Проведенные исследования показывают, что при воздействии на линейный осциллятор указанной стационарной случайной силы вынужденные колебания, возникающие при нулевых начальных условиях, обладают следующими свойствами: в «резонансном» ($T=\pi$) и в «нерезонансном» ($T=\pi/2$) случаях амплитуда колебаний с вероятностью единица неограничена; в обоих случаях с вероятностью единица амплитуда колебаний бесконечно много раз за бесконечное время будет обращаться в нуль, причем математическое ожидание времени между двумя последовательными обращениями амплитуды в нуль будет бесконечно большим.

Эти свойства не зависят от конкретных значений вероятности переключения p и, возможно, являются справедливыми для более общих стационарных случайных процессов.

Формулы (1.8) и (2.1) дают оценку времени, необходимого системе, чтобы впервые достигнуть заданного значения амплитуды колебаний. Формулы (1.9) и (2.2) показывают, что при $p=q=1/2$ для того, чтобы впервые достигнуть амплитуды n , в резонансном случае системе необходимо в среднем $(n+1)^2\pi$ единиц времени, в нерезонансном — не больше чем $\pi/2(2n+1)^2=2(n+1/2)^2\pi$, т. е. среднее время в этом случае не более чем вдвое превышает среднее время резонансного случая. Учитывая, что функция распределения вероятностей полной амплитуды максимальна вдоль диагонали $x=x$, для указанного отношения времен в случае полной амплитуды получим величину, близкую к $\sqrt{2}$.

Этот результат подтверждается вычислениями с применением спектрального подхода. Спектральная плотность $F(t)$ при $p=q=1/2$ дается формулой

$$S_F(\omega, T) = (1 - \cos \omega T) / 2\pi\omega^2$$

и согласно [1] дисперсия колебаний при достаточно большом t $\sigma_x^2(t, T) \sim S_F(1, T)t$, т. е. отношение амплитуды колебаний в момент t для случаев $T=\pi$ и $T=\pi/2$ будет равно

$$\sqrt{\sigma_x^2(t, \pi)/\sigma_x^2(t, \pi/2)} \sim \sqrt{S_F(1, \pi)/S_F(1, \pi/2)} = \sqrt{2}$$

Поступила 27 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников А. А. Поведение динамической системы второго порядка без демпфирования под воздействием случайных процессов. Изв. АН СССР. ОТН. Энергетика и автоматика, 1962, № 5.
2. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. М., «Наука», 1970.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М., Мир, 1964.
4. Розанов Ю. А. Случайные процессы. М., «Наука», 1971.