

**ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ АМОРТИЗАЦИИ
ДЛЯ КЛАССОВ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ**

Н. Н. БОЛОТНИК

(Москва)

Рассматривается минимаксная постановка задач оптимальной амортизации механических систем, рассчитанных на класс внешних воздействий. Решается задача оптимизации параметров амортизатора с линейной характеристикой в случае интегрального ограничения на внешнее воздействие и задача о построении оптимальной характеристики амортизатора, если внешнее воздействие представляет собой два удара, разделенные некоторым промежуток времени. Оптимальность понимается в смысле минимизации максимума модуля отклонения при ограниченной перегрузке или, наоборот, в смысле минимизации максимальной перегрузки при ограниченном максимуме модуля отклонения.

1. Рассмотрим систему, движение которой описывается дифференциальным уравнением и начальными условиями

$$x'' + u(x, x') = v(t), \quad x(t_0) = x'(t_0) = 0 \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) описывает, например, движение амортизируемого тела, расположенного в движущемся корпусе, в системе координат, связанной с корпусом. Здесь x — относительное смещение, $u(x, x')$ — сила, с которой амортизатор действует на тело, отнесенная к массе тела, $-v(t)$ — ускорение корпуса, точка в позиции штриха обозначает производную по времени. Функцию $u(x, x')$ в дальнейшем будем называть характеристикой амортизатора. В [1] была поставлена следующая задача. При заданном ускорении корпуса $-v(t)$ найти характеристику амортизатора $u_0(x, x')$, обеспечивающую минимум максимума модуля отклонения при ограниченном максимуме абсолютного ускорения (перегрузки), т. е. такую, что

$$\max_t |x_{u_0}(t)| = \min_u \max_t |x_u(t)| \quad (1.2)$$

при условии

$$|w| = |x'' - v(t)| = |u(x, x')| \leq D \quad (1.3)$$

Здесь D — заданное положительное число, $x_u(t)$ обозначает решение задачи Коши (1.1), соответствующее характеристике амортизатора $u(x, x')$. Эта задача для различных $v(t)$ решалась, например, в [1-4]. Редко, однако, имеется полная информация об ускорении корпуса $-v(t)$, которое определяется внешним воздействием. Поэтому более целесообразным представляется рассчитывать оптимальную характеристику не для какого-то конкретного внешнего воздействия, а для некоторого класса функций $v(t)$, который определяется условиями работы амортизатора.

Обозначим класс возможных внешних воздействий через V , а класс допустимых характеристик амортизатора — через U . Ставится следующая задача: найти допустимую характеристику $u_0(x, x')$, такую, чтобы

$$\max_{v(t) \in V} \max_t F(x_{u_0}(t), x_{u_0}'(t)) = \min_{u \in U} \max_{v \in V} \max_t F(x_u(t), x_u'(t)) \quad (1.4)$$

Здесь $F(x, x')$ — заданная функция, характеризующая качество амортизации. Отметим, что задачу (1.2), (1.3) можно рассматривать как частный случай задачи (1.4), если положить

$$U = \{u(x, x') : |u(x, x')| \leq D\}, V = \{v(t)\}, F(x, x') = |x|$$

В этом случае класс V состоит из единственной функции $v(t)$. Ниже рассмотрены две конкретные задачи оптимизации амортизационных систем, рассчитанных на класс внешних воздействий.

2. Рассмотрим систему, движение которой определяется линейным дифференциальным уравнением и начальными условиями

$$x'' + kx' + cx = v(t), \quad x(0) = x'(0) = 0 \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) описывает движение амортизируемого тела в случае, когда амортизатор состоит из пружины с линейной характеристикой и демпфера с линейным законом зависимости силы сопротивления от скорости. Параметры $k \geq 0, c \geq 0$ являются коэффициентом вязкости демпфера и коэффициентом жесткости пружины соответственно. Введем обозначения

$$I_1(k, c) = \max_{v(t)} \max_t |kx'(t, k, c) + cx(t, k, c)|$$

$$I_2(k, c) = \max_{v(t)} \max_t |x(t, k, c)|$$

Ставится следующая задача: найти параметры k_0, c_0 , такие, чтобы

$$I_1(k_0, c_0) = \min_{k, c} I_1(k, c) \quad (2.2)$$

при условиях

$$I_2(k, c) \leq D, \quad \int_0^{\infty} |v(t)| dt \leq M \quad (2.3)$$

Здесь D и M — заданные положительные числа, через $x(t, k, c)$ обозначено решение задачи Коши (2.1). Поставленная задача выражает требование минимизации максимума модуля перегрузки при ограниченном максимуме модуля отклонения. Эта задача соответствует постановке (1.4). Классы функций U и V описываются следующим образом:

$$U = \{kx' + cx : I_2(k, c) \leq D, k \geq 0, c \geq 0\}$$

$$V = \left\{ v(t) : \int_0^{\infty} |v(t)| dt \leq M \right\}$$

Обозначим через $G(t, k, c)$ решение задачи Коши (2.1), если $v(t) = \delta(t)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция. Выполняются соотношения

$$I_2 = M \max_t |G(t, k, c)|, \quad I_1 = M \max_t |G''(t, k, c)| \quad (2.4)$$

Докажем соотношения (2.4). Решение задачи Коши (2.1) записывается в виде

$$x(t, k, c) = \int_0^t G(t-\tau, k, c) v(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

Сделаем простые оценки

$$\begin{aligned} |x(t, k, c)| &= \left| \int_0^t G(t-\tau, k, c) v(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |G(t-\tau, k, c)| |v(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq \max_t |G(t, k, c)| \int_0^t |v(\tau)| d\tau \leq M \max_t |G(t, k, c)| \end{aligned}$$

Отсюда и из того, что при $v(t) = M\delta(t)$ выполняется равенство $\max_t |x(t, k, c)| = M \max_t |G(t, k, c)|$, непосредственно следует первое из равенств (2.4).

Из определения функции $G(t, k, c)$ и формулы (2.5) вытекает соотношение

$$kx' + cx = - \int_0^t G''(t-\tau, k, c) v(\tau) d\tau$$

с помощью которого аналогично доказывается второе равенство (2.4)

Таким образом, задача (2.2), (2.3) сводится к задаче отыскания параметров k_0, c_0 , обеспечивающих минимум максимума модуля перегрузки, если в начальный момент времени система подвергается мгновенному удару ($v(t) = M\delta(t)$). Согласно решению этой задачи, построенному в [5], оптимальные параметры определяются формулами

$$k_0 \approx 0.485 M/D, \quad c_0 \approx 0.361 M^2/D^2 \quad (2.6)$$

а соответствующее оптимальное значение функционала приближенно равно

$$I_1(k_0, c_0) \approx 0.521 M^2/D \quad (2.7)$$

Часто на практике возникает задача, двойственная к (2.2), (2.3), а именно, найти параметры k_1, c_1 амортизатора, обеспечивающего минимум максимума модуля отклонения при ограниченном максимуме модуля перегрузки, т. е. такие, что

$$I_2(k_1, c_1) = \min_{k, c} I_2(k, c)$$

при условиях

$$I_1(k, c) \leq R, \quad \int_0^{\infty} |v(t)| dt \leq M$$

где R — заданное положительное число. В силу соотношений (2.4) эта задача также сводится к соответствующей задаче отыскания оптимальных параметров в случае ударного воздействия. В [5] доказано, что оптимальные параметры лежат на границе области допустимых значений. Отсюда и из (2.6), (2.7) следует, что

$$I_2(k_1, c_1) \approx 0.521 M^2/R, \quad k_1 \approx 0.931 R/M, \quad c_1 \approx 1.330 R^2/M^2$$

3. При проектировании различных механических систем и конструкций часто возникает задача защиты от кратковременных ударных воздействий. Если период колебаний амортизационной системы значительно превышает время действия внешней силы, то можно считать, что система подвергается мгновенным ударам, т. е.

$$v(t) = \sum_{i=1}^N a_i \delta(t - T_i)$$

Здесь a_i — приращение относительной скорости амортизируемого тела в результате i -го удара, T_i — момент i -го удара, N — число ударов. В ряде работ решались задачи противоударной защиты в случае полной информации о внешнем воздействии. В [4], например, решалась задача (1.2), (1.3) построения оптимальной характеристики амортизатора как функ-

при x, \dot{x} , если $v(t) = a\delta(t)$, где a — заданное число. В [2] решалась эта же задача в случае

$$v = a \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

т. е. когда внешнее воздействие представляет собой последовательность периодически повторяющихся ударов равной интенсивности, действующих в одном направлении. Однако обычно полная информация об интенсивности и направлениях действия ударов отсутствует и целесообразно рассмотреть следующую задачу оптимальной амортизации для класса ударных воздействий. Пусть движение системы определяется уравнением

$$\ddot{x} + u(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^N a_i \delta(t - T_i)$$

с начальными условиями $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Требуется найти характеристику амортизатора $u(x, \dot{x})$, удовлетворяющую ограничению по перегрузке

$$|u(x, \dot{x})| \leq D \quad (3.1)$$

и доставляющую минимум функционалу

$$J = \max_{T_i} \max_{a_i} \max_t |x(t)| \quad (3.2)$$

при условиях

$$|a_i| \leq A, \quad T_1 = 0, \quad T_{i+1} - T_i \geq T_0, \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (3.3)$$

Здесь D, A, T_0 — заданные положительные числа. Соотношения (3.3) означают, что абсолютная величина приращения относительной скорости амортизируемого тела в результате одного удара не превышает A , первый удар происходит в начальный момент времени (это условие не ограничивает общности), и время между двумя последовательными ударами не меньше T_0 . Отметим, что в отличие от задачи, рассмотренной в [2], здесь допускаются удары в обе стороны, а их интенсивности и промежутки времени между ними заранее не заданы. Единицы измерения координаты x и времени t всегда можно выбрать таким образом, что $A = D = 1$. В дальнейшем будем предполагать эти равенства выполненными. В данной работе решается задача (3.1) — (3.3) для двух ударов ($N=2$).

Будем искать оптимальную характеристику амортизатора в виде $u(x, \dot{x}) = \text{sign } f(x, \dot{x})$, где $f(x, \dot{x})$ — функция, подлежащая определению. Тогда задача сводится к построению кривой переключения оптимальной характеристики. Поставленную задачу будем решать, исследуя поведение фазовых траекторий рассматриваемой системы.

Из уравнения движения следует, что в промежутках между ударами изображающая точка движется по одной из парабол семейства

$$x = -1/2 x^2 + C \quad \text{при } u = 1 \quad (3.4)$$

или по одной из парабол семейства

$$x = 1/2 x^2 + C \quad \text{при } u = -1 \quad (3.5)$$

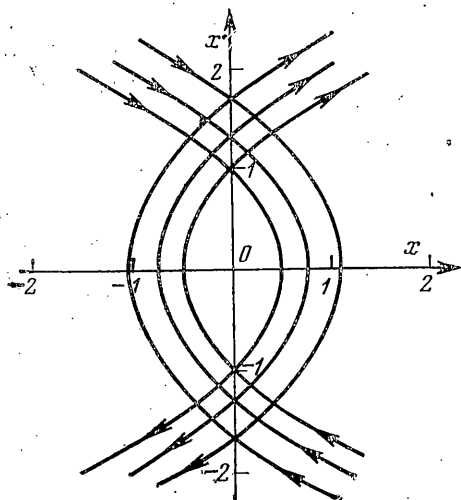
Эти траектории показаны на фиг. 1. Стрелки указывают направление движения. Из уравнения движения также следует, что время t_{12} движения между двумя точками фазовой плоскости по одной из парабол семейства (3.4) или (3.5) равно абсолютной величине разности скоростей, соответствующих этим точкам

$$t_{12} = |x_1 \dot{x}_1 - x_2 \dot{x}_2| \quad (3.6)$$

В [4] показано, что в случае одного удара амортизатор с кривой переключения

$$x=l(x^*)=\begin{cases} -1/2x^{*2} & \text{при } x^*>0 \\ 1/2x^{*2} & \text{при } x^*<0 \end{cases} \quad (3.7)$$

которой соответствует характеристика $u(x, x^*)=\text{sign}(x-l(x^*))$, является оптимальным. Эта кривая совпадает с кривой переключения оптимального управления в задаче о наискорейшем приведении в начало координат материальной точки единичной массы, обладающей одной степенью свободы, если управляющая сила ограничена по абсолютной величине единицей [6].



Фиг. 1

При этом максимум (по времени) модуля отклонения равен $1/2a_1^2$, и за время $t_*=|a_1|(1+\sqrt{2})$ изображающая точка приходит в начало координат, причем t_* является наискорейшим временем прихода в начало координат. Отсюда следует, что в случае одного удара наихудший случай (в смысле максимизации максимума модуля отклонения) соответствует $|a_1|=1$, и если $T_0 \geq 1+\sqrt{2}$, то амортизатор с кривой переключения (3.7) будет оптимальным в случае произвольного числа

ударов. При этом оптимальное значение функционала J равно 0.5. В силу этого ограничимся рассмотрением только значений T_0 , лежащих в интервале $0 < T_0 < 1+\sqrt{2}$.

Пусть координаты изображающей точки в момент второго удара равны x и x^* . Наихудший удар соответствует $|a_2|=1$, поскольку в этом случае изображающая точка переходит на параболу одного из семейств (3.4), (3.5) с максимальным значением $|C|$, что соответствует максимальному модулю отклонения. В результате удара со значением $a_2=1$ изображающая точка может перейти на траекторию семейства (3.4) с параметром

$$C_1=x+1/2(x^*+1)^2 \quad (3.8)$$

или на траекторию семейства (3.5) с параметром

$$C_2=x-1/2(x^*+1)^2 \quad (3.9)$$

В результате удара со значением $a_2=-1$ изображающая точка может перейти на траекторию семейства (3.4) с параметром

$$C_3=x+1/2(x^*-1)^2 \quad (3.10)$$

или на траекторию семейства (3.5) с параметром

$$C_4=x-1/2(x^*-1)^2 \quad (3.11)$$

Обозначим $\eta(x, x^*)=\{\min_u \max_{a_2} \max_t |x(t)| | x, x^*\}$. Выражение в фигурных скобках означает минимакс функции $|x(t)|$, взятый при условии,

что в момент второго удара координаты изображающей точки равны x, x^* . Обозначим через $\Omega(T, a_1)$ множество точек фазовой плоскости, в которые система может быть приведена за время, не превышающее T после первого удара, если в результате этого удара амортизируемое тело приобрело скорость $x^* = a_1$.

Путем простого перебора вариантов различных направлений удара и анализа фазовых траекторий доказывается, что

$$\eta(x, x^*) = \max \{|C_1|, |C_4|\} \text{ при } (x, x^*) \in \omega$$

$$\min_{(x, x^*) \in \Omega(T, a_1) \cap \omega} \eta(x, x^*) = \min_{(x, x^*) \in \Omega(T, a_1)} \eta(x, x^*) \quad (3.12)$$

$$\omega = \{x > 0, x^* > 0\} \cup \{x < 0, x^* < 0\} \cup \{-1 < x < 0, 0 < x^* < 1\} \cup \{0 < x < 1, -1 < x^* < 0\}$$

$$\min_{(x, x^*) \in \Omega(T, 1) \cup \Omega(T, -1)} \eta(x, x^*) > \min_{\substack{(x, x^*) \in \cup \Omega(T, \xi) \\ |\xi| < 1}} \eta(x, x^*)$$

Из последнего соотношения вытекает, что наименее благоприятный первый удар соответствует $|a_1| = 1$. Без ограничения общности будем предполагать, что $a_1 = 1$. Из (3.8) — (3.12) следует, что $\eta(x, x^*) \geq 1/2$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $x = x^* = 0$. Отсюда вытекает, что значение функционала J определяется соответствующим значением $\eta(x, x^*)$ и что оптимальное значение этого функционала в случае двух ударов не меньше, чем в случае одного удара.

Можно сформулировать следующие достаточные условия оптимальности амортизатора.

1. В момент времени T_0 (первый возможный момент второго удара) система находится в точке (x_*, x^*) области $\Omega(T_0, 1)$, соответствующей минимальному значению $\eta(x, x^*)$.

2. В моменты времени $t > T_0$ (если удар не произошел в момент T_0) значение $\eta(x, x^*)$ не превышает $\eta(x_*, x^*)$ до тех пор, пока не произойдет второй удар.

3. Ни в какой момент времени значение $|x|$ не превышает $\eta(x_*, x^*)$.

В силу второго равенства (3.12) в первом условии можно заменить $\Omega(T_0, 1)$ на $\Omega(T_0, 1) \cap \omega$, и далее будем рассматривать только такие амортизаторы, для которых $(x(T_0), x^*(T_0)) \in \Omega(T_0, 1) \cap \omega$.

Рассмотрим амортизатор с характеристикой, кривая переключения которой имеет вид

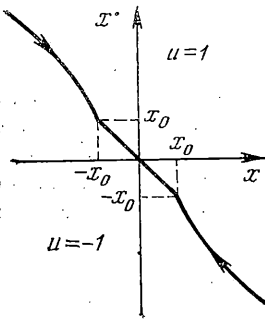
$$x = \Psi(x^*) = \begin{cases} {}^{1/2}x^{*2} + {}^{1/2}[1 - T_0^2(3 - 2\sqrt{2})] \text{ при } x^* < -x_0 \\ -x^* \text{ при } -x_0 \leq x^* \leq x_0 \\ -{}^{1/2}x^{*2} - {}^{1/2}[1 - T_0^2(3 - 2\sqrt{2})] \text{ при } x^* > x_0 \end{cases}$$

$$x_0 = 1 - T_0(\sqrt{2} - 1) \quad (3.13)$$

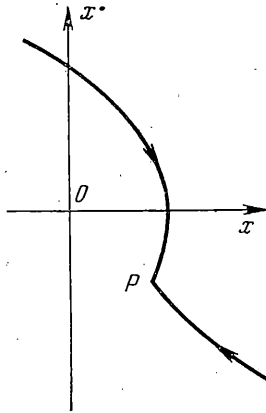
Эта кривая изображена на фиг. 2. Она симметрична относительно начала координат и состоит из прямолинейного участка, представляющего собой отрезок биссектрисы второго и четвертого координатных углов, и двух параболических участков, являющихся частями парабол семейств (3.4), (3.5). Такая кривая соответствует характеристике $u_0(x, x^*) = = \text{sign}[x - \Psi(x^*)]$. Если $T_0 \leq \sqrt{2}$ ($\sqrt{2}$ — это время движения из точки $(0, 1)$ по параболе $x = -{}^{1/2}x^{*2} + {}^{1/2}$ до пересечения с прямой $x = -x^*$), то амортизатор с характеристикой $u_0(x, x^*)$ переводит систему за время T_0 из положе-

ния $(0, 1)$ в точку с координатами $x_* = -1/2(1-T_0)^2 + 1/2$, $x_*' = 1 - T_0$. Изображающая точка при этом движется по параболе $x = -1/2x'^2 + 1/2$. Если $T_0 > \sqrt{2}$, то амортизатор с характеристикой $u_0(x, x')$ переводит систему за время T_0 из точки $(0, 1)$ в точку $(x_0, -x_0)$. Изображающая точка при этом движется сначала по параболе $x = -1/2x'^2 + 1/2$ до пересечения с параболическим участком кривой (3.13) и затем по параболическому участку кривой переключения приходит в положение $(x_0, -x_0)$.

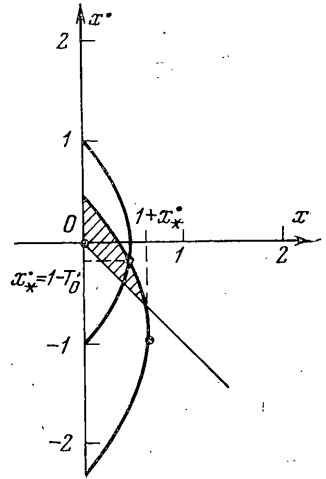
Известно [6], что оптимальное по быстродействию управление, переводящее систему, описываемую уравнением $x'' + u = 0$ из одной точки фазо-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

вой плоскости в другую при ограничении $|u| \leq 1$, принимает значение $+1$ или -1 , имеет не более одной точки переключения, и кривая переключения состоит из двух параболических участков — частей парабол семейств (3.4), (3.5), приводящих в точку назначения P (фиг. 3). Фазовые траектории оптимального движения состоят не более чем из двух участков парабол семейств (3.4), (3.5), причем участок, проходящий через точку назначения, лежит на кривой переключения. Отсюда, в частности, следует, что T_0 — наискорейшее время приведения системы из положения $(0, 1)$ в точку $(x_0, -x_0)$, если $T_0 > \sqrt{2}$.

Покажем, что амортизатор с характеристикой $u_0(x, x')$ является оптимальным. Из (3.8), (3.11), (3.12) вытекают соотношения

$$\eta(x, x') = \begin{cases} |C_4| & \text{при } x' < -x \\ |C_1| & \text{при } x' > -x \\ |C_1| = |C_4| = 1/2x'^2 + 1/2 & \text{при } x' = -x \end{cases}$$

$$\frac{\partial \eta(x, x')}{\partial x} = \begin{cases} 1 & \text{при } x' > -x \\ -1 & \text{при } x' < -x \\ x & \text{при } x' = -x \end{cases} \quad (3.14)$$

Покажем, что если $T_0 \leq \sqrt{2}$, то

$$\eta(x_*, x_*') = \min_{(x, x') \in \Omega(T_0, 1)} \eta(x, x') \quad (3.15)$$

Из (3.8) и (3.14) следует, что $\eta(x_*, x_*') = x_*' + 1/2(x_*' + 1)^2$. Из отмеченных выше свойств оптимального по быстродействию движения и из (3.6)

вытекает, что изображающая точка не пересечет прямую $x^* = -x$ за время, меньшее $\sqrt{2}$. Следовательно, если $T_0 \leq \sqrt{2}$, то точки фазовой плоскости x, x^* , соответствующие значениям $\eta(x, x^*) < \eta(x_*, x_*^*)$, лежат в области, определяемой неравенствами

$$x^{+1/2}(x^*+1)^2 < x_*^{+1/2}(x_*^*+1)^2, \quad x^* \geq -x$$

или, что то же

$$x^{+1/2}(x^*+1)^2 - x_*^{+1/2}(x_*^*+1)^2 < 0, \quad x^* \geq -x$$

Эта область изображена на фиг. 4 (заштрихована). Из свойств оптимального по быстродействию движения и из (3.6) следует, что в заштрихованную область нельзя попасть за время, не превышающее T_0 . Тем самым (3.15) доказано. С помощью аналогичных рассуждений, хотя и несколько более сложных, доказывається, что если $T_0 > \sqrt{2}$, то

$$\eta(x_0, -x_0) = \min_{(x, x^*) \in \Omega(T_0, 1)} \eta(x, x^*)$$

где $x_0 = 1 - T_0(\sqrt{2} - 1)$. Отсюда следует, что амортизатор с кривой переключения (3.13) удовлетворяет первому условию. Он, очевидно, удовлетворяет второму и третьему условиям. Это следует из вида фазовых траекторий, соответствующих такому амортизатору, и из (3.14). Отсюда вытекает, что амортизатор с характеристикой $u_0(x, x^*) = \text{sign}(x - \Psi(x^*))$ является оптимальным. Значение функционала $J = J_0$, соответствующее оптимальному амортизатору, определяется формулой

$$J_0 = \begin{cases} 2 - T_0 & \text{при } T_0 < \sqrt{2} \\ 1 + T_0^2 / (6 + 4\sqrt{2}) - T_0 / (1 + \sqrt{2}) & \text{при } \sqrt{2} \leq T_0 \leq 1 + \sqrt{2} \\ 1/2 & \text{при } T_0 > 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Отметим, что при $T_0 \rightarrow 1 + \sqrt{2}$ величина x_0 стремится к нулю, и кривая (3.13) переходит в кривую переключения (3.7) для задачи о наискорейшем приведении точки в начало координат. При этом функционал $J \rightarrow 1/2$.

Следует отметить наличие скользящего режима работы построенного оптимального амортизатора. Он реализуется, когда изображающая точка движется по биссектрисе второго и четвертого координатных углов.

Автор благодарит Ф. Л. Черноусько и Б. Н. Соколова за полезные замечания и обсуждение работы.

Поступила 7.X.1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурецкий В. В. Об одной задаче оптимального управления. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.
2. Большевцев Э. М. Выбор оптимального закона амортизации при ударных воздействиях. Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 5.
3. Гурецкий В. В. Предельные возможности защиты оборудования от воздействия ударов. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2.
4. Гроизкий В. А. О синтезе оптимальных амортизаторов. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
5. Болотник Н. Н. Оптимизация параметров некоторых механических колебательных систем. Изв. АН СССР, МТТ, 1974, № 5.
6. Понгрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.