МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1976

УДК 531.39

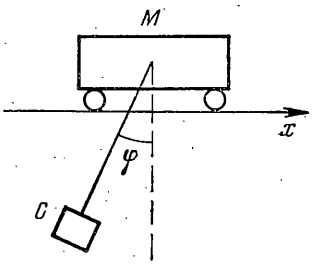
ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ВИСЯЩЕГО ГРУЗА

Б. Н. СОКОЛОВ, Ф. Л. ЧЕРНОУСЬКО

(Москва)

Построены оптимальные по быстродействию законы перемещения висящего груза (маятника), точка подвеса которого может перемещаться с ограниченной скоростью в заданном горизонтальном направлении. При этом требуется перевести первоначально покоящийся маятник в заданную точку и погасить его колебания. Задача поставлена в связи с исследованием оптимальных режимов мостовых кранов и подобных им подъемно-транспортных машин. Некоторые задачи об оптимальном управлении подъемными кранами рассматривались, например, в работах [1–3]. Данная работа по постановке и методике продолжает работу [2], но в отличие от постановки, принятой в [2], здесь исключается возможность обратного движения точки подвеса и предполагается лишь возможность торможения.

1. Рассматривается механическая система, представляющая собой физический маятник с управляемой точкой подвеса. Точка подвеса может передвигаться с ограниченной скоростью вдоль горизонтальной прямой в одном направлении. Обозначим через φ угол отклонения маятника от вертикали, через $x\geqslant 0$ — координату точки подвеса, отсчитанную от начального положения, v и w — скорость и ускорение точки подвеса, m — массу груза, L — расстояние от центра инерции до точки подвеса, I — момент инерции груза относительно точки подвеса (см. фиг. 1). Считая колебания груза малыми, запишем линейное уравнение колебаний под действием сил инерции и сил тяжести



Фиг. 1

$$I\varphi^{\cdot\cdot}+mgL\varphi=mLw \tag{1.1}$$

Движение точки подвеса описывается следующими уравнениями и ограничением:

$$x^{\cdot}=v,\ v^{\cdot}=w,\ 0\leqslant v\leqslant v_0 \tag{1.2}$$

Движение системы начинается в момент $t=0$ и заканчивается в некоторый момент $t=T$, причем в этот момент точка подвеса и груз должны снова покоиться. Запишем граничные условия для уравнений (1.1), (1.2)

$$\varphi(0)=\varphi^{\cdot}(0)=x(0)=v(0)=\varphi(T)=\varphi^{\cdot}(T)=v(T)=0 \tag{1.3}$$

Определим функционал $J(x(T))$ соотношением

$$J(x(T))=x(T)\geqslant 0 \tag{1.4}$$

Введем безразмерные (штрихованные) переменные

$$t=T_0t',\ x=v_0T_0x',\ v=v_0v',\ w=v_0T_0^{-1}w'$$

$$\varphi=v_0T_0^{-1}g^{-1}\varphi',\ T=T_0T',\ T_0=(I/mgL)^{1/2} \tag{1.5}$$

В безразмерных переменных соотношения (1.1), (1.2) примут вид

$$\varphi^{\cdot\cdot}+\varphi=w,\quad x^{\cdot}=v,\quad v^{\cdot}=w,\quad 0\leqslant v\leqslant 1 \tag{1.6}$$

Для сокращения записи штрихи в соотношениях (1.6) и далее опущены. Краевые условия (1.3) и функционал (1.4) в новых переменных имеют прежний вид. Сформулируем следующие две задачи оптимального управления.

Пусть движение механической системы определяется уравнениями и фазовым ограничением (1.6).

Задача 1. Найти такой закон управления $w(t)$ системой (1.6), чтобы были выполнены краевые условия (1.3) и условие $x(T)=a$, где a — заданная константа, и чтобы время T было наименьшим.

Задача 2. Найти такой закон управления $w(t)$ системой (1.6), чтобы были выполнены краевые условия (1.3), а функционал (1.4) в фиксированный момент T принимал максимальное значение.

Задачи 1 и 2 связаны между собой следующим образом. Если в результате решения задачи 2 полученная зависимость функционала J от T будет монотонно возрастающей (а это подтвердится ниже), то решение задачи 1 для некоторого a будет совпадать с решением задачи 2 для T, определяемого условием $J_T=a$. Ниже будет решаться задача 2. В этой задаче имеется ограничение на фазовую координату $0\leqslant v\leqslant 1$, а управление $w(t)$ неограничено. Однако переходом к новым переменным можно избавиться от фазового ограничения.

Преобразуем уравнение (1.6) и краевые условия (1.3). Введем функцию $\psi(t)$, равную безразмерной абсолютной скорости груза и связанную с φ и v соотношением

$$\varphi^{\cdot}=-\psi+v \tag{1.7}$$

Продифференцируем обе части равенства (1.7) по t и подставим $\varphi^{\cdot\cdot}$ в первое уравнение (1.6). Получим

$$\psi^{\cdot}=\varphi \tag{1.8}$$

Краевые условия для системы (1.7), (1.8) и второго уравнения (1.6) определим из краевых условий (1.3), используя (1.7), (1.8) при $t=0$ и $t=T$

$$\varphi(0)=\psi(0)=x(0)=\varphi(T)=\psi(T)=0 \tag{1.9}$$

Задача 3. Найти такой закон управления $v(t)$ системой, определяемой вторым уравнением (1.6) и (1.7), (1.8), чтобы были выполнены ограничение на управление $0\leqslant v\leqslant 1$ и краевые условия (1.9), а функционал (1.4) принимал максимальное значение.

Допустим, задача 3 решена и найдено оптимальное управление $v(t)$. Определим управление $v_1(t)$ следующим образом:

$$v_1(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t=0 \text{ и } t=T\\ v(t) & \text{при } 0<t<T\end{cases} \tag{1.10}$$

Изменение управления $v(t)$ в двух точках не отразится на его оптимальности, однако условия $v_1(0)=v_1(T)=0$ из (1.3) для v_1 будут выполнены.

Продифференцируем функцию $v_1(t)$, переходя, если надо, к обобщенным функциям

$$w(t)=v_1^{\cdot}(t) \tag{1.11}$$

Верно утверждение, что управление $w(t)$ решает задачу 2. Докажем это. Предположим, что $v(t)$, полученное при решении задачи 3, доставляет значение $J(x(T))=a$ функционалу (1.4).

Покажем, что управление $w(t)$ переводит систему (1.6) из начального положения в конечное (1.3) с таким же значением функционала $J(x(T))=$ $=a$. В самом деле, управление $v_1(t)$ из (1.10), подставленное в уравнения (1.7), (1.8), доставляет максимум (1.4). Дифференцируя равенство (1.7) и используя равенство (1.8), получим, что $w(t)$ удовлетворяет первому уравнению (1.6). Граничные условия (1.3) также будут выполнены. Для доказательства положим $t=0$ и $t=T$ в уравнениях (1.7) и (1.8) и подставим в эти уравнения соответствующие значения φ и ψ из (1.9). Получим, учитывая равенства $v_1(0)=v_1(T)=0$, краевые условия (1.3) для φ, $\dot\varphi$. Следовательно, решение системы первых трех уравнений (1.6) с управлением (1.11) удовлетворяет всем граничным условиям и $x(T)=a$.

Докажем, что систему (1.6) нельзя перевести из начального положения в конечное положение (1.3) с большим значением функционала (1.4). Будем рассуждать от противного. Пусть существует $w^*(t)$, решающее задачу 2, такое, что $x(T)=a^*>a$. Этому $w^*(t)$ будет соответствовать $\varphi^*(t)$ — решение первого уравнения (1.6) с граничными условиями (1.3). Положим

$$v^*(t)=\int\limits_0^t w^*(\tau)\,d\tau$$

и подставим в (1.7). Покажем, что решение $\psi^*(t)$, $\varphi^*(t)$ уравнений (1.7), (1.8) с управлением $v^*(t)$ удовлетворяет граничным условиям (1.9). В силу (1.3) должно быть выполнено $v^*(0)=v^*(T)=0$. Положим $t=0$ и $t=T$ в (1.7), (1.8) и подставим $v^*(0)=v^*(T)=0$ в (1.7). Используя соотношения (1.3) для φ и $\dot\varphi$, получим краевые условия (1.9). Таким образом, функции $\psi^*(t)$, $\varphi^*(t)$ с управлением $v^*(t)$ удовлетворяют уравнениям (1.7), (1.8) и граничным условиям (1.9). Следовательно, $v^*(t)$ доставляет задаче 3 значение функционала $x(T)=a^*$ — больше, чем оптимальное управление $v(t)$, что невозможно.

2. Таким образом, для решения задачи 2 достаточно найти решение задачи 3. Система дифференциальных уравнений (1.7), (1.8) и второго уравнения (1.6) и ограничение на управление $0\leqslant v\leqslant 1$ задачи 3 удовлетворяют всем условиям применимости принципа максимума Л. С. Понтрягина [4]. В соответствии с [4] выпишем функцию Гамильтона

$$H=p_1\varphi+p_2(v-\psi)+p_3v \tag{2.1}$$

и сопряженную систему

$$\dot p_1=-p_2,\quad \dot p_2=p_1,\quad \dot p_3=0 \tag{2.2}$$

Функция Гамильтона (2.1) достигает максимума по v на ограничении $0\leqslant v\leqslant 1$, если

$$v=\begin{cases}0 & \text{при } p_2+p_3<0\\ 1 & \text{при } p_2+p_3>0\end{cases} \tag{2.3}$$

Интегрируя систему (2.2) и подставляя результат в соотношение (2.3), получим (A_1, A_2, θ — постоянные интегрирования)

$$v(t)=\begin{cases}1 & \text{при } A_1\sin(t+\theta)+A_2<0\\ 0 & \text{при } A_1\sin(t+\theta)+A_2>0\end{cases} \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует, что $v(t)$ — релейная функция, принимающая значение нуля или единицы.

Пусть в начале и в конце интервала $[0, T]$ расположены интервалы ненулевой длины, на которых $v=0$. Так как при $t=0$ и $t=T$ маятник покоится, то эти интервалы отвечают покою всей системы. В этом случае, опуская эти интервалы, можно осуществить перемещение маятника на то же расстояние за меньшее время, т. е. оптимальное управление при заданном T в задачах 2, 3 сводится к оптимальному управлению для меньшего T. Как будет показано ниже, зависимость оптимального J (1.4) от T монотонна, поэтому такая ситуация невозможна. Не нарушая общности, будем искать лишь такие оптимальные управления, для которых $v=1$ при $t=+0$ и $t=T-0$, а число n ненулевых интервалов постоянства v нечетно, $n=2l+1$, $l\geqslant 0$. Через t_i обозначим длину i-го из этих интервалов. Тогда оптимальное управление задачи 2 можно искать в виде

$$v(t)=1 \text{ при } \sum_{j=1}^{i-1} t_j<t<\sum_{j=1}^{i} t_j \quad {\scriptstyle (i=1,3,5,\ldots,n)} \tag{2.5}$$

$$v(t)=0 \text{ при } \sum_{j=1}^{i-1} t_j<t<\sum_{j=1}^{i} t_j \quad {\scriptstyle (i=2,4,6,\ldots,n-1)}$$

$$v(0)=v(T)=0, \qquad \sum_{i=1}^{n} t_i=T, \qquad n=2l+1, \qquad l\geqslant 0$$

Значения v в моменты переключений несущественны.

Продифференцировав функцию (2.5), получим

$$w(t)=\sum_{i=0}^{n} (-1)^i\delta\left(t-\sum_{j=1}^{i} t_j\right) \tag{2.6}$$

Решение первого уравнения (1.6) с нулевыми начальными условиями определяется формулами

$$\varphi(t)=\int_0^t \sin(t-\tau)\,w(\tau)\,d\tau, \qquad \varphi^\cdot(t)=\int_0^t \cos(t-\tau)\,w(\tau)\,d\tau \tag{2.7}$$

Положим $t=T$ в (2.7) и подставим вместо w выражение (2.6). Приравняем полученные выражения согласно (1.3) нулю

$$\begin{gathered}\varphi(T)=\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\sin\left(\sum_{j=i}^{n} t_j\right)=0 \\ \varphi^\cdot(T)=\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\cos\left(\sum_{j=i}^{n} t_j\right)-1=0\end{gathered} \tag{2.8}$$

Формула (2.4) показывает, что длина двух соседних внутренних интервалов постоянства функции v равна 2π

$$t_i+t_{i+1}=2\pi \quad {\scriptstyle (1<i<n-1,\ n\geqslant 3)} \tag{2.9}$$

а длина крайних интервалов не превосходит длин внутренних нечетных интервалов, поэтому

$$t_1\leqslant 2\pi-t_2, \quad t_n\leqslant 2\pi-t_2 \quad {\scriptstyle (n\geqslant 3)} \tag{2.10}$$

Из соотношений (2.9), (2.5) следуют равенства

$$t_2=t_4=\ldots=t_{n-1},\ t_3=t_5=\ldots=t_{n-2} \tag{2.11}$$
$$T=t_1+2\pi(l-1)+t_n+t_2 \quad (n=2l+1\geqslant 3)$$

Перейдем к определению t_i. Согласно (2.9) все t_i при $n\geqslant 3$ лежат в интервале $(0, 2\pi)$. Упростим соотношения (2.8), используя равенства (2.9), (2.11)

$$\sin T=l[\sin(t_2+t_n)-\sin t_n],\quad \cos T-1=l[\cos(t_2+t_n)-\cos t_n] \tag{2.12}$$

Рассмотрим отдельно случай $l=0$, $n=1$. Из равенства (2.8) в этом случае имеем $T=2\pi k$, где k — целое число. Здесь оптимальный режим состоит из одного интервала, $v(t)\equiv 1$ при $0<t<T$, и функционал (1.4) равен $J=T=2\pi k$. В дальнейшем считаем $l\geqslant 1$ и представим T в виде

$$T=2\pi k+\tau,\ k=0, 1, 2, \ldots;\ 0<\tau<2\pi \tag{2.13}$$

Подставим T из (2.13) в выражение (2.12)

$$\sin\tau=2l\sin{}^1/_2t_2\cos(t_n+{}^1/_2t_2),\quad -\cos\tau+1=2l\sin{}^1/_2t_2\sin(t_n+{}^1/_2t_2) \tag{2.14}$$

Так как все t_i лежат в интервале $(0, 2\pi)$, то $\sin{}^1/_2t_2>0$. Поделив второе уравнение (2.14) на первое, найдем

$$\operatorname{tg}(t_n+{}^1/_2t_2)=\operatorname{tg}{}^1/_2\tau \tag{2.15}$$

Аргумент $t_n+{}^1/_2t_2$ в равенстве (2.15), согласно неравенствам (2.10), лежит в интервале $(0, 2\pi)$, а из второго уравнения (2.14) следует, что $\sin(t_n+{}^1/_2t_2)>0$. Поэтому этот аргумент, как и ${}^1/_2\tau$, лежит в интервале $(0, 2\pi)$ и из (2.15) имеем

$$t_n={}^1/_2(\tau-t_2) \tag{2.16}$$

Подставим равенство (2.16) в первое уравнение (2.14). Получим

$$\sin{}^1/_2t_2=l^{-1}\sin{}^1/_2\tau \tag{2.17}$$

Введем обозначение

$$\beta_l=\arcsin(l^{-1}\sin{}^1/_2\tau),\quad l\geqslant 1,\quad 0<\tau<2\pi \tag{2.18}$$

Очевидны следующие оценки, вытекающие из (2.18)

$$0<\beta_l<{}^1/_2\pi,\quad \beta_l<{}^1/_2\tau,\quad \pi-\beta_l>{}^1/_2\tau \tag{2.19}$$

Корнем уравнения (2.17), лежащим в интервале $(0, 2\pi)$, является

$$t_2=2\beta_l \tag{2.20}$$

а также $t_2=2(\pi-\beta_l)$. Второй корень следует опустить, так как, согласно равенству (2.16) и неравенству (2.19), он приводит к $t_n<0$. Для определения l и t_1 подставим в выражение (2.11) для T формулу (2.13) и полученные соотношения (2.16) и (2.20). Получим после упрощений

$$t_1=2\pi(k-l+1)+{}^1/_2\tau-\beta_l \tag{2.21}$$

Учитывая, что t_1 лежит в интервале $(0, 2\pi)$, найдем из (2.21), что

$$l=k+1,\ t_1=t_n={}^1/_2\tau-\beta_l,\ n=2l+1=2k+3 \tag{2.22}$$

Для вычисления функционала (1.4) следует согласно второму уравнению (1.6) проинтегрировать функцию v из (2.5). Пользуясь равенствами (2.22), (2.20), (2.11), получим

$$J=t_1+t_3+\ldots+t_n=t_1+t_n+(2\pi-t_2)(l-1)=2\pi k+\tau-2l\beta_l=T-2l\beta_l \tag{2.23}$$

Итак, решение задачи 2 определяется формулами (2.5), (2.6), где величины n, t_i для заданного T определены формулами (2.9), (2.11), (2.20), (2.22). В соответствии с этим решением имеем

$$\begin{gathered}T=2\pi k+\tau,\quad k=0,\ 1,\ldots;\quad 0\leqslant\tau<2\pi\\ l=k+1,\ n=2k+3,\ t_1=t_n={}^1/_2\tau-\beta_l\\ t_2=t_4=\ldots=t_{n-1}=2\beta_l,\ t_3=t_5=\ldots=t_{n-2}=2(\pi-\beta_l)\end{gathered} \tag{2.24}$$

где β_l определено равенствами (2.18).

3. Зависимость (2.23) максимального пути J от времени T перепишем, пользуясь соотношением (2.18), (2.24) и вводя обозначение

$$g_k(\tau)=\tau-2(k+1)\arcsin[(k+1)^{-1}\sin{}^1/_2\tau],\qquad 0\leqslant\tau<2\pi,\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{3.1}$$

в следующем виде:

$$J_T=2\pi k+g_k(\tau),\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{3.2}$$

Из (3.1) следует

$$g_0(\tau)=0,\qquad 0\leqslant\tau\leqslant\pi,\qquad g_0(\tau)=2(\tau-\pi),\qquad \pi\leqslant\tau<2\pi \tag{3.3}$$

Отсюда вытекает, что при $k=0$, $\tau\leqslant\pi$, т. е. при $T\leqslant\pi$, максимальный путь J равен нулю. Иными словами, за время, меньшее полупериода собственных колебаний маятника, нельзя указанным способом управления переместить маятник на конечное расстояние, погасив его колебания. Для сравнения заметим, что если допустить движение точки подвеса в обратную сторону, наложив ограничение $|v|<v_0$, то такое перемещение осуществимо [2]. При всех $k>0$ функции $g_k(\tau)$ являются строго монотонными и выпуклыми функциями τ, возрастающими от 0 до 2π на интервале $0\leqslant\tau\leqslant2\pi$. Кроме того, функции $g_k(\tau)$ из (3.1) — строго монотонные функции k, причем

$$g_0(\tau)<g_1(\tau)<\ldots<g_\infty(\tau)=\lim_{k\to\infty}g_k(\tau)=\tau-2\sin{}^1/_2\tau \tag{3.4}$$

Зависимости $g_k(\tau)$ при некоторых k даны на фиг. 2.

Зависимость J_T от T, определяемая соотношениями (3.1), (3.2), является строго монотонной при $T\geqslant\pi$ и состоит из графиков функций $g_k(\tau)$, концы которых помещены в соответствующие точки $J=T=2\pi k$. Значениям $T=2\pi k$ отвечают режимы без переключений ($v(t)\equiv1$), для остальных значений имеем $J<T$.

В силу монотонности и непрерывности зависимости J_T от T можно построить решение задачи 1 об оптимальном быстродействии следующим образом. Пусть требуется за кратчайшее время T переместить маятник на расстояние $a>0$, погасив его колебания. Найдем корень уравнения $J_T=a$. Для этого представим a в виде $a=2\pi k+b$, где $k\geqslant0$ — целое, $0\leqslant b<2\pi$. После этого найдем единственный корень τ уравнения $g_k(\tau)=b$. Найденные значения k, τ определяют время быстродействия T и все оптимальное решение согласно формулам (2.24). Для любого $a>0$ решение существует, единственно и обладает свойством $T>\pi$.

4. Практический интерес представляют режимы с фиксированным небольшим числом переключений, когда число участков постоянства скорости $v(t)$ точки подвеса задается заранее и от времени движения не зависит. Это квазиоптимальные режимы удобны для технической реализации, хотя и дают некоторый проигрыш по функционалу (1.4) по сравнению с оптимальным режимом. Соответствующие оценки будут даны ниже.

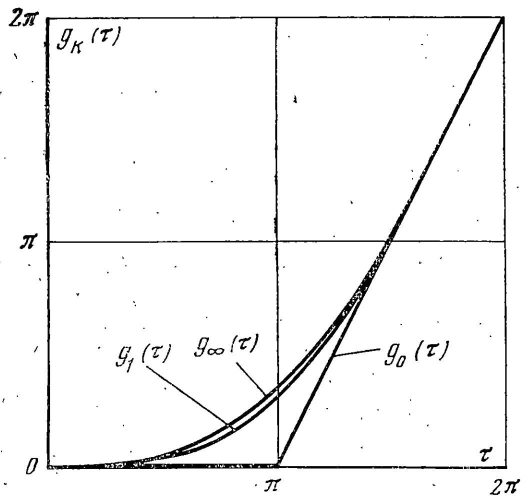
Рассмотрим режим с $2m+1$, $m=1,\ 2,\ 3,\ldots$ интервалами постоянства скорости $v(t)$. Этот режим будет оптимальным только при $T<2\pi m$. Оптимальные моменты переключений управления для $T<2\pi m$ находятся по формулам (2.24). Для $T>2\pi m$ построим режим управления следующим образом.

Представим $T=2\pi k+\tau$, $0\leqslant\tau<2\pi$ в виде $T=T_1+T_2$, где $T_1=2\pi(k-m+1)$ и $T_2=2(m-1)+\tau$. Пусть $J(x(T_2))$ – оптимальное значение функционала (1.4) задачи 2, в которой момент окончания движения положен равным T_2. Пусть $t_1, t_2, \ldots t_{2m+1}$ – соответствующие оптимальные длины интервалов постоянства скорости $v(t)$ (см. (2.24)). Положим

$$\tau_1=t_1+T_1,\quad \tau_2=t_2,\ldots,\ \tau_{2m+1}=t_{2m+1} \tag{4.1}$$

Управление $v(t)$ с интервалами постоянства (4.1) обеспечивает, очевидно, гашение колебаний маятника к моменту T. Обозначим через $J_m(x(T))$ соответствующее этому управлению значение функционала (1.4). Легко видеть, что

$$J_m(x(T))=2\pi(k-m+1)+J(x(T_2)) \tag{4.2}$$



Фиг. 2

Преобразуя выражение (4.2) при помощи формулы (3.2), получим

$$J_m(x(T))=2\pi k+g_{m-1}(\tau) \tag{4.3}$$

При $m=k+1$ формула (4.3) переходит в (3.2). Значения функций $J(x(T))$, $J_m(x(T))$ в точках $T=2\pi k$ равны T, а в остальные моменты времени

$$J_m(x(T))\leqslant J(x(T))<T \tag{4.4}$$

Оценим разность по функционалу между построенным квазиоптимальным и оптимальным режимами. Как следует из формул (4.3), (3.2) и (3.4), эта разность равна

$$J(x(T))-J_m(x(T))=g_k(\tau)-g_{m-1}(\tau)<g_\infty(\tau)-g_{m-1}(\tau) \tag{4.5}$$

Подставив в (4.5) вместо $g_\infty(\tau)$ его выражение (3.4), получаем, что искомая разность максимальна при $m=1$ и $\tau=\pi$ и не превосходит $\pi-2=1.1416$. Режимы с $m\geqslant2$ отличаются от оптимального уже менее чем на 0.1.

Аналогично приведенным в работе [2] рассуждениям можно показать, что формула (4.3) определяет наибольшее значение функционала (1.4) среди режимов с $2m+1$ участками постоянства скорости $v(t)$, а соответствующее ему управление в этом классе режимов будет оптимальным. Зависимость функционала (4.3) от времени T будет непрерывной и монотонно убывающей. Поэтому задачу оптимального по быстродействию переноса груза на заданное расстояние в рассматриваемом классе режимов (с $2m+1$ участками постоянства скорости) можно решать, обращая формулу (4.3). Для этого представим a в виде $2\pi k+b$ и определим τ из уравнения

$$g_{m-1}(\tau)=b \tag{4.6}$$

По формулам (2.24) при $l=m$ нужно вычислить t_i, $i=1, 2,\ldots, 2m+1$, а затем по (4.1) определить τ_i – оптимальные длины интервалов в режиме с $2m+1$ интервалами постоянства скорости $v(t)$. Этим завершается построение управления, квазиоптимального по быстродействию. Наиболее простой вид это управление имеет при $m=1$, когда решение задачи строится аналитически. Корень уравнения (4.6) при $m=1$, согласно (3.3) равен

$$\tau=\begin{cases}0 & \text{при}\quad b=0\\ {}^1/_2b+\pi & \text{при}\quad 0<b<2\pi\end{cases} \tag{4.7}$$

Из (4.7) следует, что $\tau>\pi$ при $b>0$. По формулам (2.24) найдем

$$\begin{gathered}t_1=t_3={}^1/_2\tau-\beta_1=\begin{cases}0 & \text{при}\quad 0\leqslant\tau<\pi\\ \tau-\pi & \text{при}\quad \pi\leqslant\tau<2\pi\end{cases}\\ t_2=2\beta_1=\begin{cases}0 & \text{при}\quad 0\leqslant\tau<\pi\\ 2\pi-\tau & \text{при}\quad \pi\leqslant\tau<2\pi\end{cases}\end{gathered} \tag{4.8}$$

Оптимальные длины τ_i интервалов постоянства скорости $v(t)$ при $m=1$ для квазиоптимального режима определим из (4.1)

$$\tau_1=t_1+2\pi k, \qquad \tau_2=t_2, \qquad \tau_3=t_3$$

где зависимости $t_i(b)$, $i=1, 2, 3$ определены формулами (4.8).

Поступила 10 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баничук Н. В., Черноусько Ф. Л.* Определение оптимальных и квазиоптимальных управлений в одной колебательной механической системе. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 2.
2. *Черноусько Ф. Л.* Оптимальное перемещение маятника. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
3. *Смехов А. А., Ерофеев Н. И.* Оптимальное управление подъемно-транспортными машинами. М., «Машиностроение», 1975.
4. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.