МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1976

УДК 531.539

К ТЕОРИИ ГИРОМАЯТНИКОВЫХ СИСТЕМ

В. Н. КОШЛЯКОВ

(Киев)

На основе теории интегральных инвариантов и канонических свойств гамильтоновых уравнений рассматриваются определенные качества (приводимость, устойчивость), присущие невозмущаемым по М. Шулеру гиромаятниковым системам.

Формируется интегральный инвариант Пуанкаре, с помощью которого обосновываются подстановки, приводящие к системе с постоянными коэффициентами. Приводятся необходимые и достаточные условия осуществимости контактного преобразования от выбранных канонических переменных к исходным переменным задачи.

1. Уравнения прецессионной теории пространственного гирогоризонткомпаса Геккелера — Аншютца являются удобной математической моделью для рассмотрения указанных выше вопросов. При сохранении членов первого порядка малости относительно возмущенных координат и их производных и без учета затухания дифференциальные уравнения возмущенного движения пространственного гирокомпаса [1] имеют вид

$$ml\frac{d}{dt}(V\alpha)-P_0l\beta-\Omega 2B\sin\sigma\delta=0 \tag{1.1}$$

$$\beta^{\bullet}+\frac{V\alpha}{R}-\Omega\gamma=0,\qquad \gamma^{\bullet}+\Omega\beta+\frac{2B\sin\sigma}{mlR}\delta=0$$

$$\frac{d}{dt}(2B\sin\sigma\delta)+mlV\Omega\alpha-l\left(P_0-\frac{mV^2}{R}\right)\gamma=0$$

Обозначения в (1.1) — те же, что и в [2]. Невозмущаемым будем считать движение, при котором

$$\alpha=\beta=\gamma=\delta=0 \tag{1.2}$$

Введем новые переменные, полагая в (1.1)

$$V\alpha=z_1,\quad 2B\sin\sigma\delta/ml=z_2,\quad \beta=z_3,\quad \gamma=z_4 \tag{1.3}$$

Уравнения (1.1) примут вид

$$z_1^{\bullet}=\Omega z_2+gz_3,\quad z_3^{\bullet}=-\nu^2g^{-1}z_1+\Omega z_4 \tag{1.4}$$

$$z_2^{\bullet}=-\Omega z_1+g(1-\mu^2)z_4,\quad z_4^{\bullet}=-\nu^2g^{-1}z_2-\Omega z_3,\quad \mu=V(gR)^{-1/2}$$

Здесь под величиной g следует понимать ускорение тяготения к центру земной сферы. Систему (1.4) можно представить также в форме

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt}=JA(t)\mathbf{z} \tag{1.5}$$

$$z=\begin{Vmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_4 \end{Vmatrix}, \quad A(t)=\begin{Vmatrix} \nu^2 g^{-1} & 0 & 0 & -\Omega \\ 0 & \nu^2 g^{-1} & \Omega & 0 \\ 0 & \Omega & g & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 & g(1-\mu^2) \end{Vmatrix}$$

Специальная матрица J (симплектическая единица) имеет вид

$$J=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{1.6}$$

Функция Гамильтона H для системы (1.5) строится по элементам гамильтониана этой системы (симметрической матрицы $A(t)$).

Согласно [2, 3] имеем

$$2H=\nu^2 g^{-1} z_1^2+\nu^2 g^{-1} z_2^2+g z_3^2+g(1-\mu^2) z_4^2+2\Omega(z_2 z_3-z_1 z_4) \tag{1.7}$$

Соответственные канонические уравнения имеют вид

$$z_1^{\bullet}=\partial H/\partial z_3, \quad z_3^{\bullet}=-\partial H/\partial z_1, \quad z_2^{\bullet}=\partial H/\partial z_4, \quad z_4^{\bullet}=-\partial H/\partial z_2 \tag{1.8}$$

Их можно представить в форме уравнений в вариациях Пуанкаре

$$z_1^{\bullet}=\frac{\partial^2 H}{\partial z_2\,\partial z_3} z_2+\frac{\partial^2 H}{\partial z_3^2} z_3, \qquad z_3^{\bullet}=-\left(\frac{\partial^2 H}{\partial z_1^2} z_1+\frac{\partial^2 H}{\partial z_1\,\partial z_4} z_4\right)$$

$$z_2^{\bullet}=\frac{\partial^2 H}{\partial z_1\,\partial z_4} z_1+\frac{\partial^2 H}{\partial z_4^2} z_4, \qquad z_4^{\bullet}=-\left(\frac{\partial^2 H}{\partial z_2^2} z_2+\frac{\partial^2 H}{\partial z_2\,\partial z_3} z_3\right) \tag{1.9}$$

Если z_s и z_s' ($s=1, 2, 3, 4$) — некоторые частные решения уравнений (1.4) и (1.9), то интегралом названных уравнений будет выражение

$$I\equiv z_1 z_3'+z_2 z_4'-z_3 z_1'-z_4 z_2'=\mathrm{const} \tag{1.10}$$

которое можно представить в форме одного из интегральных инвариантов механики. Обозначим

$$z_1=q_1, \quad z_3=p_1, \quad z_1'=q_3, \quad z_3'=p_3, \quad z_2=q_2, \quad z_4=p_2, \quad z_2'=q_4, \quad z_4'=p_4 \tag{1.11}$$

Варьируя выражение (1.10) и замечая, что $\delta I=0$, имеем

$$\sum_{i=1}^{4} A_i \delta q_i+\sum_{i=1}^{4} B_i \delta p_i=0 \tag{1.12}$$

В (1.12) функции A_i и B_i выражаются непосредственно через p_i и q_i.

Интегрируя выражение (1.12) по замкнутому контуру C, касающемуся трубки фазовых траекторий системы, имеем

$$I=\oint_{(C)} \sum_{i=1}^{4} (A_i \delta q_i+B_i \delta p_i) \tag{1.13}$$

Интеграл (1.13) является частным случаем универсального интегрального инварианта [4]

$$I'=\oint_{(C)} \sum_{i=1}^{n} [A_i(t, q_k, p_k)\,\delta q_i+B_i(t, q_k, p_k)\,\delta p_i] \tag{1.14}$$

который, в свою очередь, представим в виде $I'=cI_1$, где c — некоторая постоянная, а I_1 — интегральный инвариант Пуанкаре, определяющийся выражением

$$I_1=\oint\limits_{(C)}\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i$$

Итак, интеграл (1.10) может быть представлен в виде инварианта Пуанкаре, сохраняющего свое значение при произвольном смещении контура C вдоль трубки фазовых траекторий всякий раз, когда z_s и z_s' являются решениями канонических уравнений.

Можно заметить, что интеграл (1.10) выражает также постоянство симплектического произведения двух решений $\mathbf{z}$ и $\mathbf{z}'$ канонической системы (1.4), а именно $\mathbf{z}^TJ\mathbf{z}'=\text{const}$, где z^T означает транспонирование, а J — симплектическая единица (1.6).

2. В случае, когда в уравнениях (1.1) можно положить $P_0-mV^2/R\approx mg$, где g — ускорение силы тяжести в данной точке земной поверхности, уравнения (1.1) интегрируются в замкнутом виде в предположении произвольного закона движения точки подвеса прибора по земной сфере [1]. В этом же случае уравнения (1.1) оказываются приводимыми к системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [2, 5].

В работе [2] указана соответствующая приводящая подстановка, которая в принятых обозначениях выражается посредством линейного преобразования вида

$$\mathbf{y}=L\mathbf{z} \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ — столбцевые матрицы переменных y_s и z_s ($s=1, 2, 3, 4$), а неособенная матрица L имеет вид

$$L=\begin{Vmatrix} \nu g^{-1}\cos\theta & -\nu g^{-1}\sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta \\ \nu g^{-1}\sin\theta & \nu g^{-1}\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta & g\nu^{-1}\cos\theta & -g\nu^{-1}\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta & g\nu^{-1}\sin\theta & g\nu^{-1}\cos\theta \end{Vmatrix}$$

где

$$\theta=\int_0^t\Omega(\tau)\,d\tau \tag{2.2}$$

В результате приходим к уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\dot{y}_1=\nu^2g^{-1}y_3,\quad \dot{y}_2=\nu^2g^{-1}y_4,\quad \dot{y}_3=-gy_1,\quad \dot{y}_4=-gy_2 \tag{2.3}$$

Подстановка (2.1) с матрицей (2.2) легко устанавливается с помощью инварианта Пуанкаре (1.10.) Действительно, уравнения (1.4) с учетом допущения $P_0-mV^2/R\approx mg$ имеют знакоопределенный интеграл [6]:

$$W_1\equiv\nu^2g^{-1}z_1^2+\nu^2g^{-1}z_2^2+gz_3^2+gz_4^2=\text{const} \tag{2.4}$$

Поскольку этот интеграл имеет строгий минимум в точке $z_s=0$ ($s=1, 2, 3, 4$), то имеет место устойчивость по отношению к переменным z_s. Устойчивость будет сопутствовать и движению (1.2) для исходных переменных, поскольку по условиям движения и выбору параметров гирокомпаса для формы W_1, выраженной в переменных α, β, γ и δ, всегда выполняется обобщенный критерий Сильвестра [6].

Но если невозмущенное движение устойчиво, то в силу теоремы Четаева [7] уравнения в вариациях Пуанкаре являются приводимыми к системе с постоянными коэффициентами при помощи неособенной линейной подстановки с ограниченными коэффициентами, структура которой определяется инвариантом Пуанкаре.

Имея это в виду, выпишем в явном виде решение системы (1.4). Оно имеет [2] вид

$$\mathbf{z}=M\mathbf{z}_0 \tag{2.5}$$

где $\mathbf{z}$ и $\mathbf{z}_0$ — векторы с компонентами z_s и их начальными значениями $z_s(0)$, а матрица M имеет вид

$$M=\begin{Vmatrix} \cos\nu t\cos\theta & \cos\nu t\sin\theta & g\nu^{-1}\sin\nu t\cos\theta & g\nu^{-1}\sin\nu t\sin\theta \\ -\cos\nu t\sin\theta & \cos\nu t\cos\theta & -g\nu^{-1}\sin\nu t\sin\theta & g\nu^{-1}\sin\nu t\cos\theta \\ -\nu g^{-1}\sin\nu t\cos\theta & -\nu g^{-1}\sin\nu t\sin\theta & \cos\nu t\cos\theta & \cos\nu t\sin\theta \\ \nu g^{-1}\sin\nu t\sin\theta & -\nu g^{-1}\sin\nu t\cos\theta & -\cos\nu t\sin\theta & \cos\nu t\cos\theta \end{Vmatrix} \tag{2.6}$$

Удовлетворяя в (2.5) единичной матрице начальных условий и пользуясь затем инвариантом Пуанкаре (1.10), получаем четыре интегральных выражения

$$\begin{gathered} \nu g^{-1}\sin\nu t\cos\theta z_1'-\nu g^{-1}\sin\nu t\sin\theta z_2'+\cos\nu t\cos\theta z_3'-\cos\nu t\sin\theta z_4'=C_1 \\ \nu g^{-1}\sin\nu t\sin\theta z_1'+\nu g^{-1}\sin\nu t\cos\theta z_2'+\cos\nu t\sin\theta z_3'+\cos\nu t\cos\theta z_4'=C_2 \\ -\cos\nu t\cos\theta z_1'+\cos\nu t\sin\theta z_2'+g\nu^{-1}\sin\nu t\cos\theta z_3'-g\nu^{-1}\sin\nu t\sin\theta z_4'=C_3 \\ -\cos\nu t\sin\theta z_1'-\cos\nu t\cos\theta z_2'+g\nu^{-1}\sin\nu t\sin\theta z_3'+g\nu^{-1}\sin\nu t\cos\theta z_4'=C_4 \end{gathered} \tag{2.7}$$

где z_s' — некоторые частные решения уравнений (1.4), C_s — постоянные.

Приводящая матрица (2.2) формируется по коэффициентам при z_s' в левых частях выражений (2.7). При этом не следует принимать во внимание сомножители в (2.7), содержащие собственную частоту колебаний ν под знаком тригонометрических функций. Действительно, поскольку система (1.4) при наличии интеграла (2.4) приводима, то ее фундаментальная матрица представима в виде

$$z(t)=L(t)e^{Bt} \tag{2.8}$$

Здесь B — постоянная матрица, а $L(t)$ — матрица типа Ляпунова [8]. Сомножители с частотой ν, о которых выше шла речь, соответствуют постоянной матрице B в (2.8) и в структуру приводящей подстановки не входят.

3. В предположении постоянства V и Ω в работах [9, 10] получено достаточное условие устойчивости движения (1.2), которое представляется в форме $\nu^2(1-\mu^2)-\Omega^2>0$ или в виде

$$\Omega_a<\nu,\quad \Omega_a=[\Omega^2+(V/R)^2]^{1/2} \tag{3.1}$$

Здесь под Ω_a следует понимать полную угловую скорость опорного трехгранника, ориентированного по вектору V. При этом в работе [9] условие (3.1) получено на основе анализа интеграла, построенного в силу точных (нелинеаризованных) уравнений прецессионного движения гирогоризонткомпаса и позволяющего получить суждение об устойчивости движения «в большом» (при конечных углах отклонения системы от положений равновесия).

Интеграл этого же типа получен в работе [10], но при анализе устойчивости по Ляпунову сохраняются лишь члены второго порядка относительно переменных α, β, γ и δ. В принятых здесь обозначениях интеграл, полученный в работе [10], имеет вид

$$\begin{gathered} \nu^2 g^{-1}(V\alpha)^2+\nu^2 g^{-1}(2B\sin\sigma\delta/ml)^2+g\beta^2+g(1-\mu^2)\gamma^2+ \\ +2\Omega[2B\sin\sigma(ml)^{-1}\beta\delta-V\alpha\gamma]+\ldots=\text{const} \end{gathered} \tag{3.2}$$

где точками обозначены неучитываемые члены выше второго порядка малости относительно переменных α, β, γ и δ. Заметим, что выписанная часть интеграла (3.2) в точности соответствует функции Гамильтона (1.7), построенной в силу линейной системы (1.1) и выраженной в исходных переменных задачи.

Действительно, в стационарном случае (при постоянных V и Ω), функция Гамильтона H сохраняет постоянное значение во все время движения, что приводит к интегралу Якоби $H=h$.

Применяя к форме (1.7) критерий Сильвестра, заключаем, что она будет определенно-положительной при выполнении условия (3.1), которое в данном случае следует рассматривать как достаточное условие устойчивости по Ляпунову для стационарного случая.

Поскольку существует интеграл $H=h$, то при получении достаточного условия устойчивости по Ляпунову для стационарного случая нет необходимости в учете членов высших порядков, отброшенных в исходных уравнениях (1.1), так как все необходимые квадратичные члены учтены в функции Гамильтона (1.7), получающейся из уравнений (1.1).

Стационарное движение может быть устойчивым и тогда, когда функция H, входящая в интеграл Якоби, не является знакоопределенной [7]. В самом деле, независимо от знакоопределенности функции Гамильтона, при допущении $P_0-mV^2/R\approx mg$ уравнения (1.4) имеют интеграл (2.4), имеющий, как уже указывалось, строгий минимум в точке $z_s=0$, свидетельствующий об устойчивости независимо от условия (3.1).

4. Отметим некоторые особенности перехода к переменным z_s. При выборе переменных z_s, отличающемся от (1.3), может измениться каноническая структура полученной системы. Здесь полезно иметь в виду, что каноничность не нарушается, если от переменных α, β, γ и δ перейти к некоторым переменным z_s', связанным с переменными z_s, в которых система имеет структуру (1.5), линейным преобразованием

$$\mathbf{z}'=G\mathbf{z} \tag{4.1}$$

где G — постоянная ортогональная матрица, удовлетворяющая условию

$$G^TG=E \tag{4.2}$$

Здесь E — единичная матрица, G^T — транспонированная матрица G [11].

В результате преобразования (4.1) получается каноническая система

$$\mathbf{z}^{\cdot\prime}=J'A'(t)\mathbf{z}' \tag{4.3}$$

причем

$$J'=G^TJG,\ A'=G^TAG,\ J'A'=G^TJAG \tag{4.4}$$

Матрицы J и A определяются по (1.5) и (1.6). В качестве иллюстрирующего примера допустим, что в системе (1.1) осуществлен переход к переменным z_s' по схеме

$$V\alpha=z_1',\ 2B\sin\sigma(ml)^{-1}\delta=z_2',\ \gamma=z_3',\ \beta=z_4' \tag{4.5}$$

Сравнивая с (1.3), имеем $z_1'=z_1$, $z_2'=z_2$, $z_3'=z_4$, $z_4'=z_3$, вследствие чего матрица G имеет вид

$$G=\begin{Vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{Vmatrix}$$

Условие (4.2), как легко проверить, выполняется. Система уравнений относительно переменных z_s' имеет вид (4.3), где

$$J'=\left\|\begin{matrix}0 & E'\\ -E' & 0\end{matrix}\right\|,\qquad A'(t)=\left\|\begin{matrix}\nu^2 g^{-1} & 0 & -\Omega & 0\\ 0 & \nu^2 g^{-1} & 0 & \Omega\\ -\Omega & 0 & g(1-\mu^2) & 0\\ 0 & \Omega & 0 & g_2^*\end{matrix}\right\|$$

Здесь в качестве матрицы E' фигурирует первая из унитарных спиновых матриц Паули [12]

$$p_1=\left\|\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{matrix}\right\|,\qquad p_2=\left\|\begin{matrix}0 & i\\ i & 0\end{matrix}\right\|,\qquad p_3=\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{matrix}\right\|$$

5. Когда переменные z_s найдены, следует осуществить обратный переход к исходным переменным α, β, γ, δ, руководствуясь соотношениями (1.3). Гамильтоновы уравнения (1.8) в исходных переменных представляются в форме

$$\frac{d}{dt}(V\alpha)=\frac{\partial H}{\partial\beta},\quad \frac{d}{dt}(\lambda\delta)=\frac{\partial H}{\partial\gamma}$$

$$\frac{d\beta}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial(V\alpha)},\quad \frac{d\gamma}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial(\lambda\delta)}\qquad \left(\lambda=\frac{2B\sin\sigma}{ml}\right)\tag{5.1}$$

где

$$H=\frac{1}{2}\left[\frac{\nu^2}{g}(V\alpha)^2+\frac{\nu^2}{g}(\lambda\delta)^2+g\beta^2+g(1-\mu^2)\gamma^2-2\Omega(V\alpha\beta-\lambda\beta\delta)\right]$$

Выясним, в каком случае указанное выше обратное преобразование принадлежит к числу контактных. Непосредственно по виду системы (5.1) можно заключить, что названное преобразование будет контактным, если

$$V=\lambda=\text{const}\tag{5.2}$$

т. е. когда

$$2B\sin\sigma=mlV=\text{const}\tag{5.3}$$

В этом случае канонические уравнения относительно переменных α, β, γ, δ представляются в виде

$$\alpha^\cdot=\partial H'/\partial\beta,\ \delta^\cdot=\partial H'/\partial\gamma,\ \beta^\cdot=-\partial H'/\partial\alpha,\ \gamma^\cdot=-\partial H'/\partial\delta\quad(\lambda H'=H)$$

Нетрудно показать, что условие (5.2) является необходимым и достаточным условием контактности обратного преобразования к переменным α, β, γ и δ.

Действительно, обращаясь к соотношениям (1.3), имеем следующее выражение для матрицы перехода от переменных z_s к переменным α, β, γ, δ:

$$N=\left\|\begin{matrix}c' & 0 & 0 & 0\\ 0 & c'' & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\|\qquad\left(c'=\frac{1}{V},\quad c''=\frac{1}{\lambda}\right)\tag{5.4}$$

Для того, чтобы преобразование с матрицей N было контактным, необходимо и достаточно, чтобы матрица N была обобщенно-симплектической с постоянной валентностью, т. е. удовлетворяла бы условию

$$N^T J N = cJ \tag{5.5}$$

где N^T — транспонированная матрица N, c — некоторая постоянная, называемая валентностью канонического преобразования.

Используя матрицу (5.4), условие (5.5) получаем в виде

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & c' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c'' \\ -c' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c'' & 0 & 0 \end{Vmatrix} = c \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Это условие выполняется в случае, когда $c' = c'' = c = \text{const}$, что и приводит к зависимости (5.3).

6. Все изложенное выше переносится на гиромаятниковые системы, имеющие аналогию с пространственным гирогоризонткомпасом [5, 13]. В частности, в работе [13] рассмотрены случаи эквивалентности уравнений двухроторного гирокомпаса и уравнений движения гиромаятниковых систем, для которых в возмущенном движении справедливы условия

$$K_x = k\omega_x, \qquad K_y = k\omega_y, \qquad K_z = 0 \tag{6.1}$$

где K_x, K_y, K_z – проекции кинетического момента на оси, связанные с чувствительным элементом (платформой), ω_x, ω_y – проекции полной угловой скорости системы на оси приборного трехгранника, k – некоторая постоянная.

Частным случаем названных систем являются гиромаятниковые устройства, не имеющие баллистических девиаций при произвольном законе движения точки подвеса по поверхности земной сферы, для которых

$$k = mlR \tag{6.2}$$

К числу последних принадлежит, например, рассмотренный пространственный гирогоризонткомпас, невозмущаемая по Шулеру гироплатформа с ньютонометрами и другие системы, охватываемые условиями (6.1) и (6.2).

Поступила 2 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А. Ю.* К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
2. *Кошляков В. Н.* Теория гироскопических компасов. М., «Наука», 1972.
3. *Онищенко С. М., Сосницкий С. П.* О приводимости уравнений движения двухроторных гирокомпасов к каноническому виду. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 5.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М., Физматгиз, 1960.
5. *Андреев В. Д.* Теория инерциальной навигации (корректируемые системы). М., «Наука», 1967.
6. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М., «Наука», 1974.
7. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М., «Наука», 1965.
8. *Еругин Н. П.* Приводимые системы. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1946, т. 13.
9. *Жбанов Ю. К.* Исследование свободных колебаний в системе автономного определения координат движущегося объекта. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
10. *Меркин Д. Р.* Об устойчивости движения гирорамы. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
11. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М., «Наука», 1967.
12. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М., «Наука», 1973.
13. *Кондорский И. Д.* К теории гиромаятниковых систем. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 4.