однородной оболочки выражается через параметры деформации срединной поверхности, тогда как выражение потенциальной энергии неоднородной оболочки определяется теми же параметрами, но через деформации четырех поверхностей, определяемых центрами жесткости z_i, $i=1, 2, 3, 4$. В самом деле, деформации $\varepsilon_i+z_i\varkappa_i$ и $\varepsilon_i+z_4\varkappa_i$, $i=1, 2$ не зависят от опорной поверхности и определяют деформации поверхностей, отстоящих от опорной на расстоянии z_i. Отсюда следует, что каждому типу деформации соответствует свой центр и своя поверхность. Влияние коэффициента Пуассона представлено центром z_4 и жесткостями B_4, D_{44}. Поэтому при определении осевых деформаций имеем дело с двумя поверхностями, а при сдвигах и кручении – с одной.

Запишем приближенные значения усилий и моментов

$$T_1=B_1(\varepsilon_1+z_1\varkappa_1)+B_4(\varepsilon_2+z_4\varkappa_2)$$
$$M_1=D_{11}\varkappa_1+D_{44}\varkappa_2+B_1(\varepsilon_1+z_1\varkappa_1)z_1+B_4(\varepsilon_2+z_4\varkappa_2)z_4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Отсюда следует, что усилие T_1 является равнодействующей двух сил – силы $B_1(\varepsilon_1+z_1\varkappa_1)$ с центром приложения в точке z_1 и силы $B_4(\varepsilon_2+z_4\varkappa_2)$ с центром приложения в z_4. Отсюда следует, что равнодействующая их будет иметь центр приложения

$$z_{11}=[B_1(\varepsilon_1+z_1\varkappa_1)z_1+B_4(\varepsilon_2+z_4\varkappa_2)]T_1^{-1}$$

Момент можно записать в виде: $M_1=D_{11}\varkappa_1+D_{44}\varkappa_2+T_1z_{11}$.

Аналогичную запись будем иметь для второго направления

$$T_1=B_1(\varepsilon_1+z_1\varkappa_1)+B_4(\varepsilon_2+z_4\varkappa_2),\quad T_2=B_2(\varepsilon_2+z_2\varkappa_2)+B_4(\varepsilon_1+z_4\varkappa_1),\quad T_3=B_3(\varepsilon_3+z_3\varkappa_3)$$
$$M_1=D_{11}\varkappa_1+D_{44}\varkappa_2+T_1z_{11},\quad M_2=D_{22}\varkappa_2+D_{44}\varkappa_1+T_2z_{22},\quad M_3=D_{33}\varkappa_3+T_3z_{33}$$

Отметим, что при составлении разрешающих уравнений в усилиях и моментах вместо центров сил целесообразно использовать центры жесткостей, так как центры сил до решения упругой задачи неизвестны. В практических расчетах целесообразно за опорную поверхность принимать поверхность с одним из центров жесткостей. Тогда в уравнения будут входить разности между центрами жесткости, причем эти разности составляют десятые – сотые доли толщины оболочки и, как показали многочисленные числовые расчеты неоднородных пакетов пластин и оболочек, имеют малое влияние на величины усилий и моментов. Поэтому в первом приближении этими величинами можно пренебречь и решать задачу типа однородной с минимальными жесткостными характеристиками.

Поступила 19 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кармишин А. В.* Уравнения неоднородных тонкостенных элементов на основе минимальных жесткостей. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 6.
2. *Григолюк Э. И., Коган Ф. А.* Современное состояние теории многослойных оболочек. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 6.
3. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
4. *Королев В. И.* Упругопластические деформации оболочек. М., Машиностроение, 1971.

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМОЙ КОЛЬЦЕВЫХ РЕБЕР РАЗЛИЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

И. С. МАЛЮТИН

(Москва)

Рассматривается устойчивость цилиндрической оболочки с дискретным подкреплением произвольным количеством кольцевых ребер следующей регулярной структуры. Ребра одного вида (параметры которых отмечаем индексом *2*) расположены равномерно вдоль оболочки и посредине каждого из образующихся при этом участков расположены ребра другого вида (за ними закрепляется индекс *1*). Для оболочки, находящейся под действием внешнего давления и осевых сил, получено характеристическое уравнение для определения критических параметров.

1. Пусть взаимодействие оболочки и ребер характеризуется погонными нормальными и тангенциальными (в плоскостях ребер) контактными усилиями. Тогда для рассматриваемой структуры подкрепления имеет место следующая система однородных алгебраических уравнений относительно амплитудных значений тангенциальных и нормальных перемещений оболочки в местах расположения ребер [1]:

$$f_{kr}=2B\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{4}\left[\frac{\Delta_{2k}(s_j)}{\Delta'(s_j)}(a_{12}f_{2,2i-1}+b_{12}f_{3,2i-1})-\right.$$

$$\left.-\frac{\Delta_{3k}(s_j)}{\Delta'(s_j)}(a_{13}f_{2,2i-1}+b_{13}f_{3,2i-1})\right]\Phi_j(x_r,x_{2i-1})+2B\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\left[\frac{\Delta_{2k}(s_j)}{\Delta'(s_j)}(a_{22}f_{2,2i}+b_{22}f_{3,2i})-\right.$$

$$\left.-\frac{\Delta_{3k}(s_j)}{\Delta'(s_j)}(a_{23}f_{2,2i}+b_{23}f_{3,2i})\right]\Phi_j(x_r,x_{2i}) \tag{1.1}$$

$$\Phi_j(x,\xi)=\operatorname{sh}s_jx\frac{\operatorname{sh}s_j(l-\xi)}{\operatorname{sh}s_jl}-\operatorname{sh}s_j(x-\xi)\sigma_0(x-\xi)\qquad(k=2,3;\ r=1,2,\ldots,2m+1)$$

Здесь $x_i=il/2(m+1)$ – координата положения i-го ребра; $2m+1$ – общее количество ребер; $f_{ki}=f_k(x_i)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ – амплитудные функции соответственно тангенциального v и нормального w перемещений точек срединной поверхности оболочки ($v=f_2(x)\sin ny$, $w=f_3(x)\cos ny$); первый индекс у величин a_{st} и b_{st}, связанных с параметрами ребер и начальными усилиями в них, соответствует типу ребер; остальные обозначения те же, что в работе [1].

Решение уравнений (1.1) ищем в виде

$$f_{k,\,2r-1}=A_k\sin(N\pi x_{2r-1}/l),\quad f_{k,\,2r}=B_k\sin(N\pi x_{2r}/l) \tag{1.2}$$

где N – целочисленный параметр, характеризующий форму потери устойчивости, $1\leqslant N\leqslant 2m+1$.

Подставляя выражения (1.2) в уравнения (1.1) и производя необходимые суммирования, получим систему четырех однородных уравнений относительно A_k и $B_k(k=2,3)$

$$\begin{aligned}A_k&=A_2(a_{12}F_{2k}-a_{13}F_{3k})+A_3(b_{12}F_{2k}-b_{13}F_{3k})+B_2(a_{22}\Phi_{2k}-a_{23}\Phi_{3k})+B_3(b_{22}\Phi_{2k}-b_{23}\Phi_{3k})\\B_k&=A_2(a_{12}\Phi_{2k}-a_{13}\Phi_{3k})+A_3(b_{12}\Phi_{2k}-b_{13}\Phi_{3k})+B_2(a_{22}F_{2k}-a_{23}F_{3k})+B_3(b_{22}F_{2k}-b_{23}F_{3k})\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$F_{ik}=B\sum_{j=1}^{4}\frac{\Delta_{ik}(s_j)}{\Delta'(s_j)}\frac{\operatorname{sh}\alpha_j}{\operatorname{ch}\alpha_j-\cos\beta}\qquad\left(\alpha_j=\frac{s_jl}{m+1},\ \beta=\frac{\pi N}{m+1}\right)$$

$$\Phi_{ik}=2B\cos\frac{\beta}{2}\sum_{j=1}^{4}\frac{\Delta_{ik}(s_j)}{\Delta'(s_j)}\operatorname{sh}\frac{\alpha_j}{2}\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_j-\cos\beta}$$

Величины F_{ik} и Φ_{ik} могут быть представлены также в виде (при сохранении ниже для величин под знаком суммы обозначений работы [1])

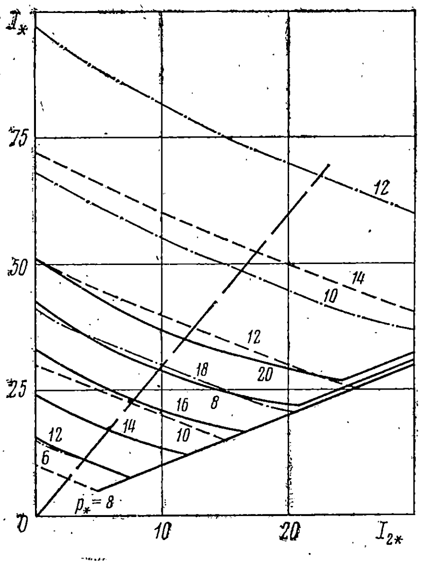
$$F_{ik}=B\frac{m+1}{l}\sum_s\frac{\omega_{ik}(\gamma_s)}{\omega(\gamma_s)},\qquad \Phi_{ik}=B\frac{m+1}{l}\sum_s(-1)^r\frac{\omega_{ik}(\gamma_s)}{\omega(\gamma_s)}$$

$$s=N,\ 2r(m+1)\pm N\qquad(r=1,2,\ldots)$$

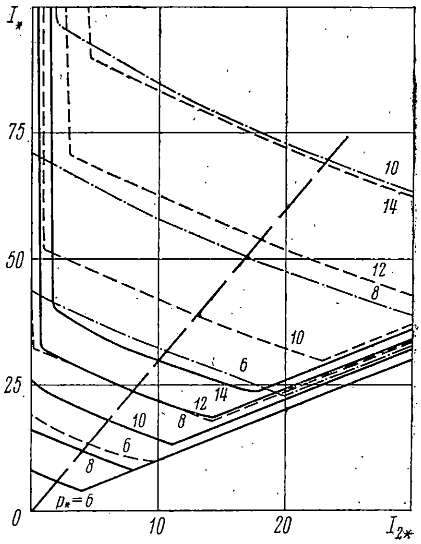
Приравнивая нулю определитель системы (1.3), получаем характеристическое уравнение. Придавая параметру N различные целочисленные значения, находим критическую нагрузку (наименьшее значение) или при заданной нагрузке критическую величину, например, жесткости ребер (наибольшее значение).

Остановимся на некоторых частных случаях. Прежде всего отметим, что в случае одинаковых ребер $a_{1k}=a_{2k}$, $b_{1k}=b_{2k}$, $A_k=B_k$, и система четырех уравнений (1.3) сводится к двум уравнениям, из которых следует характеристическое уравнение, полученное в работе [1].

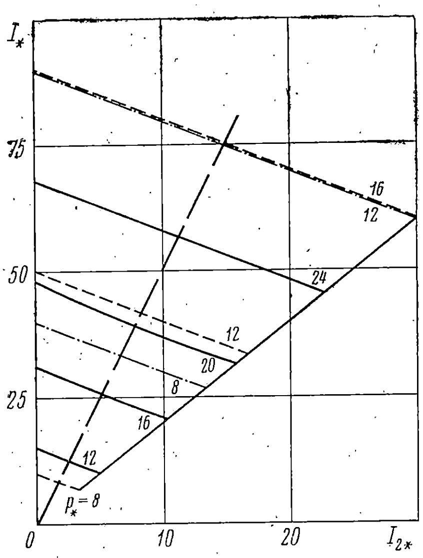
Рассмотрим случай, когда не учитывается касательное взаимодействие оболочки и ребер (заметим, что при симметричном расположении ребер относительно средин-



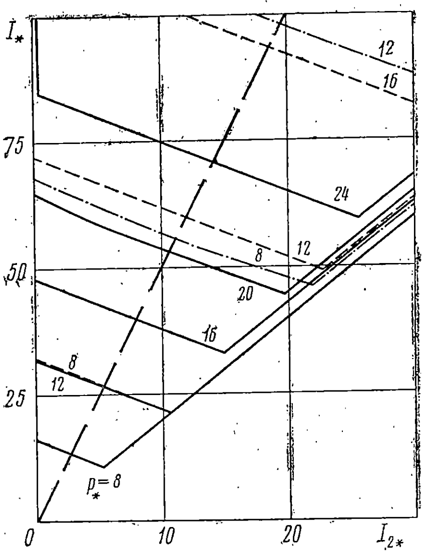
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ной поверхности оболочки это допущение практически не влияет на результат [1]. Этот случай получается из общего, если положить площади ребер равными нулю, т. е. положить $a_{kj}=0$ и $b_{k2}=0$. Тогда приходим к следующему характеристическому уравнению: $b_{13}b_{23}(F_{33}^2-\Phi_{33}^2)+(b_{13}+b_{23})F_{33}+1=0$.

В случае, когда пренебрегается касательным взаимодействием только для одного типа ребер, например, для тех, параметры которых отмечены индексом *1*, следует положить $a_{12}=a_{13}=b_{12}=0$, и характеристическое уравнение будет

$$
\begin{gathered}
(1+b_{13}F_{33})\left[1-2a_{23}F_{23}-a_{22}F_{22}+b_{23}F_{33}-c\left(F_{22}F_{33}+F_{23}^2\right)\right]+ \\
+b_{13}\Phi_{33}\left[c\left(\Phi_{23}F_{23}+F_{22}\Phi_{33}\right)+a_{23}\Phi_{23}-b_{23}\Phi_{33}\right]- \\
-b_{13}\Phi_{23}\left[c\left(F_{33}\Phi_{23}-F_{23}\Phi_{33}\right)+a_{22}\Phi_{23}-a_{23}\Phi_{33}\right]=0 \\
c=a_{22}b_{23}-a_{23}^2
\end{gathered}
$$

2. Для решения рассматриваемой задачи при отсутствии осевых сил применим упрощенное уравнение устойчивости, соответствующее приближению полубезмоментной теории. В этом случае согласно [2] имеем следующую систему однородных уравнений относительно амплитудных значений нормального перемещения f_i в местах расположения ребер:

$$2\mu^3 f_j = a_1 \sum_{i=1}^{m+1} f_{2i-1}\Psi(x_j, x_{2i-1}) + a_2 \sum_{i=1}^{m} f_{2i}\Psi(x_j, x_{2i}) \qquad (j=1,2,\ldots,2m+1) \tag{2.1}$$

$$\Psi(x,\xi) = \frac{\sin\mu x}{\sin\mu l}\sin\mu(l-\xi) - \frac{\operatorname{sh}\mu x}{\operatorname{sh}\mu l}\operatorname{sh}\mu(l-\xi) + [\operatorname{sh}\mu(x-\xi) - \sin\mu(x-\xi)]\,\sigma_0(x-\xi)$$

$$\mu^4 = n^4(n^2-1)\left[\frac{pR}{Eh} - \frac{h^2(n^2-1)}{12(1-\nu^2)R^2}\right], \qquad a_k = \frac{n^4(n^2-1)}{EhR}\left[T_k - \frac{E_k I_k}{R^2}(n^2-1)\right]$$

где p — наружное давление; E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки; R, h — радиус и толщина оболочки; E_kI_k — изгибная жесткость ребра ($k=1,2$); T_k — начальное кольцевое усилие в ребре; n — параметр волнообразования в окружном направлении; lR — длина оболочки.

Разыскивая решение системы (2.1) в виде $f_{2r-1}=A_1\sin(\pi N x_{2r-1}/l)$, $f_{2r}=A_2\sin(\pi N x_{2r}/l)$, приходим к двум однородным уравнениям относительно A_1 и A_2

$$A_1(1-a_1F_1)-A_2a_2F_2=0, \qquad A_1a_1F_2-A_2(1-a_2F_1)=0 \tag{2.2}$$

$$F_1 = \frac{1}{4\mu^3}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha-\cos\beta} - \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta}\right), \qquad \alpha=\frac{\mu l}{m+1}, \qquad \beta=\frac{\pi N}{m+1}$$

$$F_2 = \frac{1}{2\mu^3}\cos\frac{\beta}{2}\left(\frac{\sin{}^1/_2\alpha}{\cos\alpha-\cos\beta} - \frac{\operatorname{sh}{}^1/_2\alpha}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta}\right)$$

Приравнивая нулю определитель системы (2.2), получим характеристическое уравнение

$$a_1a_2\,(F_1^2-F_2^2)-(a_1+a_2)F_1+1=0 \tag{2.3}$$

Результаты расчета на основании уравнения (2.3) представлены в виде зависимостей безразмерной суммарной жесткости $I_*=[(m+1)E_1I_1+mE_2I_2]/EhR^3 10^6$ всех ребер, отражающей в определенной степени их вес, от безразмерной жесткости ребра одного из типов $I_{2*}=E_2I_2/EhR^3 10^6$ для различных значений параметра критического давления $p_*=10^5\,pR/Eh$, длины l и величины $\varepsilon=R^2(1-\nu^2)/h^2$ (при $T_k=0$). На фиг. 1 ($\varepsilon=2\cdot10^4$) и фиг. 2 ($\varepsilon=6\cdot10^4$) изображены зависимости для случая трех ребер ($m=1$), при этом сплошные линии соответствуют значению $l=6$, пунктирные — $l=8$ и штрихпунктирные — $l=10$. На фиг. 3 и 4 приведены аналогичные зависимости для случая подкрепления оболочки пятью ребрами ($m=2$). Приведенные кривые позволяют для заданного давления выбрать оптимальное (по весу) сочетание жесткостей ребер, соответствующее точкам с наименьшими ординатами кривых, и оценить получаемый при этом выигрыш в весе по сравнению с другими сочетаниями жесткостей или, например, со случаем подкрепления оболочки одинаковыми ребрами, характеризуемым на графиках точками пересечения кривых с пунктирными лучами.

Поступила 4 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малютин И. С.* Устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами, при действии внешнего давления и осевых сил. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 2.
2. *Малютин И. С.* Об устойчивости цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами, при действии внешнего давления и осевых сил. Инж. ж. МТТ, 1968, № 6.